ATTI

DELLA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXLIV

1947

SERIE OTTAVA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME II.

(1° semestre 1947)

ROMA

DOTT. GIOVANNI BARDI

TIPOGRAFO DELL'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1947

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta dell'11 gennaio 1947

Presidenza del Socio G. CASTELNUOVO

Il Presidente, aperta la seduta, legge la seguente

Commemorazione del Socio Federigo Enriques.

Nel novembre del 1892 venne a Roma per seguire il corso di Luigi Cremona, come studente di perfezionamento, un giovane non ancora ventiduenne, che si era laureato a Pisa l'anno precedente. Allievo di maestri quali il Betti, il Dini, il Bianchi, il Volterra, quel giovane possedeva larghe vedute sulla nostra scienza, ma non aveva ancora fissato la meta delle sue ricerche. Desiderava familiarizzarsi col nuovo indirizzo di geometria algebrica che per iniziativa di Corrado Segre si era cominciato a coltivare in Italia. Venne perciò da me a chiedere consigli. Stavo per suggerirgli la lettura di libri e memorie, ma mi accorsi subito che non sarebbe stata questa la via più conveniente. FEDERIGO ENRIQUES era un mediocre lettore. Nella pagina che aveva sotto gli occhi egli non vedeva ciò che era scritto, ma quel che la sua mente vi proiettava. Adottai quindi un altro metodo: la conversazione. Non già la conversazione davanti a un tavolo col foglio e la penna, ma la conversazione peripatetica.

Cominciarono allora quelle interminabili passeggiate per le vie di Roma, durante le quali la geometria algebrica fu il tema preferito dei nostri discorsi. Assimilate in breve tempo le conquiste della scuola italiana nel campo delle curve algebriche, l'ENRIQUES si accinse arditamente a trattare la geometria sopra una superficie algebrica. Egli mi teneva quotidianamente al corrente dei progressi delle sue ricerche, che io sottoponevo ad una critica severa. Non è esagerato affermare che in quelle conversazioni fu costruita la teoria delle superficie algebriche secondo l'indirizzo italiano.

Vi era, a dir vero, una Memoria fondamentale di Max Nöther sull'argomento, nella quale il geometra tedesco, con grande acume, aveva gettato le basi ed eretto qualche pilastro dell'edifizio. Ma era una Memoria oscura, dove alcune proprietà erano stabilite con dimostrazioni faticose che non gettavano luce sulla questione, altre erano intuite più che dimostrate. Al contrario

l'edifizio di cui l'ENRIQUES tracciò in pochi mesi il disegno, ha i pregi dell'armonia e della spontaneità.

La Memoria che contiene i risultati sull'argomento fu compiuta nei pochi mesi di quell'anno scolastico. Cominciata in gennaio, nel giugno 1893 fu presentata all'Accademia delle scienze di Torino e subito pubblicata.

Era naturale che un lavoro meditato e scritto rapidamente in un campo quasi inesplorato, dove l'analogia con la teoria delle curve trae spesso in inganno, presentasse qualche imperfezione. L'ENRIQUES se ne accorse, e preparò una nuova esposizione dell'argomento, che apparve nel 1896 tra le Memorie della Società dei XL. Salvo lievi aggiunte fatte più tardi, la teoria generale delle superficie algebriche ha in quest'ultimo lavoro un aspetto che è rimasto ormai nella scienza.

Senza entrare in particolari troppo tecnici, dirò che in quella Memoria si trovano studiate a fondo le proprietà dei sistemi lineari di curve algebriche sopra una superficie, e vien definita, mediante una relazione funzionale, una operazione con la quale si passa da un sistema lineare ad un altro, detto il sistema aggiunto. Quella relazione funzionale lascia subito apparire che il residuo di un sistema lineare rispetto al proprio aggiunto non dipende dal sistema da cui si parte. Il detto residuo ha carattere invariante di fronte alle trasformazioni birazionali della superficie in un'altra e vien chiamato sistema canonico.

Dall'esame di questo sistema e dalle relazioni tra un sistema lineare e il proprio aggiunto si ricavano vari caratteri invarianti per trasformazioni birazionali: i generi. Anche nel lavoro citato di Nöther comparivano tre di questi caratteri, due dei quali si credeva a quel tempo dovessero coincidere salvo in un caso molto particolare. Risulta invece che le cose non stanno così, e che i caratteri invarianti di una superficie sono più numerosi e tutti essenziali.

Stabiliti questi risultati fondamentali nelle due Memorie già citate, l'ENRIQUES può formulare un piano sistematico di ricerche che egli svolgerà poi fino agli ultimi anni. Il piano consiste nel caratterizzare le proprietà delle superficie in relazione ai valori dei generi, cominciando dalle superficie che hanno i generi più bassi. L'analogia porterebbe a pensare alla classificazione che fanno i naturalisti degli animali e delle piante, partendo dagli organismi più semplici. Ma perchè l'analogia tornasse, bisognerebbe immaginare un naturalista che, chiuso nel suo studio, indagasse, dal punto di vista teorico, quali tipi di organismi siano compatibili con le leggi della morfologia e della fisiologia, e poi ricercasse quali tra questi si incontrino effettivamente in natura.

Le dette ricerche dell'ENRIQUES, contenute in una quindicina di lavori ed ora raccolte in buona parte in un volume pubblicato con la collaborazione del prof. Campedelli, hanno condotto alla scoperta di un gran numero di superficie con proprietà singolari e impreviste.

A questo gruppo di lavori va pure aggiunta la fondamentale e voluminosa Memoria sulle superficie iperellittiche, con la quale ENRIQUES e SEVERI hanno

concorso al premio Bordin dell'Accademia delle Scienze di Parigi; il premio fu loro conferito nel 1907.

L'ENRIQUES ha inoltre compiuto molte altre importanti ricerche nella teoria generale delle superficie, delle quali solo qualcuna può esser qui nominata, per ragioni di brevità.

Di una tra esse conviene parlare per mettere in luce una delle doti più spiccate del suo ingegno, la dote della intuizione che più volte lo ha portato a stabilire un risultato molto prima di averne una dimostrazione soddisfacente. La intuizione interviene specialmente quando egli ricorre, come fa spesso, al principio di continuità, il quale conduce a trasportare le proprietà di un ente ad enti prossimi al primo e poi a tutti gli enti che stanno col primo in un medesimo sistema continuo.

Di questo metodo egli si è valso per stabilire una proprietà caratteristica delle superficie irregolari, cioè di quelle superficie nelle quali il genere geometrico differisce dal genere numerico. Ho accennato poc'anzi che all'epoca del Nöther, verso il 1880, si riteneva che i due generi fossero uguali (o, come oggi si dice, la superficie fosse regolare), salvo nel caso delle superficie rigate. Ma più tardi in Italia e in Francia si scoprirono molti altri esempi di superficie irregolari. L'ENRIQUES osservò che sopra tutte queste superficie esistono sistemi continui di curve algebriche non contenuti in sistemi lineari, mentre lo stesso fatto non si presenta sulle superficie regolari, e fu condotto quindi a considerare l'esistenza di tali sistemi continui come proprietà caratteristica delle superficie irregolari, e ad assegnare la dimensione dei detti sistemi in relazione alla differenza tra i due generi sopra nominati. Non era però facile giustificare queste intuizioni. La ingegnosa e delicata dimostrazione che l'ENRIQUES diede nel 1904, fondandosi sul principio di continuità, fu accolta inizialmente senza riserve, e la proprietà fu assunta come base di altre importanti ricerche. Ma più tardi, nel 1921, il Severi si accorse che nella dimostrazione si insinuava una tacita ipotesi che aveva bisogno di esser giustificata. Non ostante però gli sforzi dell'ENRIQUES, del Severi stesso e di altri, non oserei ancora affermare che quel punto dubbio sia stato chiarito. Eppure il teorema è vero, sia pure con qualche restrizione, e l'ha potuto stabilire nel 1910 Enrico Poincaré per via trascendente. Ciò non toglie interesse alla ricerca di una dimostrazione algebrica, che appare necessaria per la sistemazione armonica di tutta la teoria.

Un altro risultato fornito dall'ENRIQUES nel 1924, che ha dato e dà luogo tuttora a importanti ricerche, riguarda il modo di caratterizzare la curva di diramazione dei piani multipli. Anche qui si presenta una differenza essenziale tra la teoria delle curve e quella delle superficie. Se una curva algebrica piana è segata in un certo numero n di punti variabili da una retta che ruota intorno ad un punto, la curva proiettata da questo punto sopra una retta dà luogo ad una retta n-upla, i cui punti di diramazione sono le tracce delle tangenti condotte dal punto alla curva. Inversamente, fissato ad arbitrio un certo gruppo di punti sopra una retta, si può costruire una curva rappresentabile su quella retta n-upla con quei dati punti di diramazione. Ma la proprietà

analoga non vale per le superficie. La curva di diramazione di un piano n–uplo non può prendersi ad arbitrio, ma è soggetta a certe condizioni. L'ENRIQUES si propone di stabilirle in una Memoria del 1924, e vi riesce ; ma la forma del risultato non è tale da consentire la costruzione di tutte le curve che vi soddisfano. La questione è ancora aperta, non ostante le ricerche posteriori che vi sono state dedicate.

Molti altri argomenti sono trattati con varietà di mezzi e ricchezza di risultati nella cinquantina di lavori ove l'ENRIQUES esamina fondamentali problemi di geometria algebrica. Ma il parlarne qui con sufficiente chiarezza esigerebbe un tempo assai lungo e mi costringerebbe a sorvolare sulle altre benemerenze di FEDERIGO ENRIQUES nel campo della cultura. Ricorderò soltanto che egli ha cercato di diffondere la conoscenza della geometria algebrica, a cui ha dedicato tanta parte della sua attività, mediante due trattati. Il primo, in quattro volumi, redatto insieme ad uno dei suoi primi allievi, il Chisini, studia sotto molteplici aspetti le curve algebriche. È ricco di notizie storiche e di vedute originali; nuova ed esauriente è, ad esempio, la teoria dei punti singolari delle curve. Il secondo trattato in due volumi contiene lezioni sulla teoria delle superficie algebriche raccolte dal prof. Campedelli[1]. In questi ultimi anni l'ENRIQUES si accinse ad esporre con maggiore ampiezza la detta teoria per tener conto dei risultati più recenti. Il manoscritto fortunatamente era compiuto quando la morte lo colse, e la stampa ne è oggi curata dai suoi due ultimi discepoli, il Pompili ed il Franchetta.

Le ricerche di geometria algebrica delle quali abbiamo discorso sinora non rappresentano che una parte della attività dell'ENRIQUES nel campo stesso della matematica. Indagini di natura diversa gli furono suggerite dalla sua professione di insegnante. Qui giova ricordare che i lavori pubblicati durante l'anno di perfezionamento a Roma richiamarono su di lui l'attenzione dei cultori della nostra scienza, tanto che nel gennaio dell'anno successivo (1894) gli fu offerto l'incarico dell'insegnamento di geometria proiettiva a Bologna. Appena iniziato il corso egli si avvide che nei fondamenti di quel ramo di geometria, che pure sotto l'aspetto logico è il più perfetto, sussisteva ancora una lacuna. La dimostrazione che si dava del così detto teorema fondamentale di Staudt non aveva il rigore che oggi si richiede. Egli riesce subito a superare la difficoltà, e la dimostrazione da lui fornita è così perfetta e così semplice da trovar posto nell'insegnamento del primo anno universitario. La dimostrazione è riportata nel trattato di geometria proiettiva sintetica dell'ENRIQUES, nel quale questo ramo di matematica assume una forma classica che oserei dire definitiva.

La sua attenzione viene così attratta verso l'esame dei principî della geometria. In un corso di conferenze tenute a Bologna nell'anno scolastico 1894–95 egli osserva che, accanto al criterio logico di indipendenza e compatibilità dei

(1) Vanno ricordate inoltre le lezioni sopra *Le superficie razionali* redatte dal prof. Conforto.

postulati, conviene tener conto del criterio psicologico, il quale porta ad indagare le sensazioni ed esperienze che hanno condotto a formulare quei postulati. Donde viene un duplice indirizzo che si realizza nelle ricerche successive dell'ENRIQUES.

Al primo indirizzo appartiene uno scritto del 1898 in cui si stabilisce un gruppo di condizioni atte a permettere la introduzione di coordinate sopra una superficie o varietà a più dimensioni assegnata geometricamente. Vien così colmata una lacuna che si riscontra nella celebre Memoria di Riemann sui principî della geometria, ove l'esistenza delle coordinate è supposta *a priori*.

In seguito a questo e ad altri lavori sui principî della geometria, Felice Klein, che all'inizio di questo secolo stava organizzando la pubblicazione di una grande Enciclopedia tedesca delle matematiche, volle affidare all'ENRIQUES la redazione dell'articolo sui principî della geometria. Ne è risultata una Monografia ricchissima e altamente pregevole, ove son prese in esame tutte le vedute dei matematici e dei logici sull'argomento, da Euclide fino ai giorni nostri. Questa Monografia sarà sempre consultata con profitto da chiunque voglia formarsi un'idea chiara su tale vastissimo soggetto.

Le questioni inerenti ai principî della geometria hanno destato nell'ENRIQUES l'interesse per i problemi dell'insegnamento matematico, e in particolare dell'insegnamento secondario. Egli comprese subito l'importanza di una iniziativa dovuta al Klein, il quale fin dal 1894 aveva organizzato a Gottinga dei corsi estivi destinati agli insegnanti secondari, con lo scopo di far vedere a questi quale luce portassero alcune teorie di matematiche superiori sui problemi che erano chiamati a trattare nel loro insegnamento. Ispirandosi ad analoghi motivi l'ENRIQUES ebbe l'idea, già nei primi anni del suo insegnamento bolognese, di pubblicare una serie di monografie nelle quali vari problemi di geometria elementare venissero illuminati da un punto di vista più alto. Egli che aveva l'attitudine rara di saper trarre dalla collaborazione tutti i vantaggi, evitando gli inconvenienti a cui può dar luogo, scelse tra i suoi primi discepoli e tra i suoi giovani amici un gruppo di studiosi ai quali affidò temi determinati di geometria elementare, e tracciò loro il programma che dovevano svolgere per collegare l'argomento con le ricerche più recenti.

Frutto di questa collaborazione fu un volume intitolato *Questioni riguardanti la geometria elementare*, comparso nel 1900, volume che ebbe una grande e meritata fortuna, cosicchè si rese necessario ben presto di pubblicare una seconda e poi una terza edizione dell'opera. Quest'ultima consta di quattro volumi e comprende una revisione dei principî e dei più importanti problemi della geometria e dell'algebra elementare, esaminati col sussidio di teorie elevate. Alcuni articoli sono scritti dallo stesso ENRIQUES, tra gli altri quelli sulla evoluzione delle idee geometriche, sui numeri reali, sullo spazio e tempo davanti alla critica moderna. Si può dire non esservi oggi in Italia professore di scuola secondaria o candidato agli esami di concorso che non abbia meditato su quest'opera, la quale ha esercitato una benefica influenza sull'insegnamento dei nostri licei.

Con lo stesso proposito l'ENRIQUES curò, col concorso di vari collaboratori, la pubblicazione in veste italiana degli Elementi di Euclide, arricchiti di note storiche e critiche. E tra le sue benemerenze a favore dell'insegnamento e della cultura matematica vanno ricordati gli articoli che egli stesso scrisse o promosse intorno a questioni storiche o didattiche, articoli inseriti nel Periodico di matematiche, di cui tenne la direzione per quasi vent'anni.

Abbiamo già osservato che nell'esame dei principî della geometria l'ENRIQUES associa il problema logico al problema psicologico. Direi anzi che sotto l'aspetto affettivo l'interesse per quest'ultimo problema sia prevalente. Conservo una sua lettera del maggio 1896 in cui egli parla della passione con la quale si dedica agli studi di psicologia fisiologica. « Per parte mia » riferisco le sue parole « porto nella ricerca un entusiasmo che tu stimerai degno di « miglior causa, ma che è certo maggiore di quanto ne abbia mai provato per « qualsiasi altra questione ».

Frutto di questi studi proseguiti per alcuni anni è un articolo pubblicato nella *Rivista filosofica* del 1901 e poi sviluppato nel volume *Problemi della scienza*. Nel detto articolo, vari indirizzi geometrici sono messi in rapporto con le sensazioni provenienti dalla vista e dal tatto, dalle quali essi hanno avuto origine. Per comprendere tale legame, debbo ricordare che l'indirizzo geometrico di maggiore generalità è l'*Analysis situs* o Topologia, nel quale non sono ancora formati i concetti di retta, di piano, di lunghezza, di angolo, ma si considerano soltanto linee, superficie, corpi a tre dimensioni e si riguardano come equivalenti due enti che possano esser ricondotti l'uno all'altro mediante una trasformazione continua. Dalla topologia vanno poi staccandosi, mediante due diverse particolarizzazioni, la geometria metrica ove sono fondamentali i concetti di distanza e di angolo, e la geometria proiettiva dove non intervengono nozioni metriche ma solo relazioni di posizione fra punti, rette e piani. Ora la tesi dell'ENRIQUES è che i tre rami suddetti e precisamente la topologia, la geometria metrica e la proiettiva, avuto riguardo all'acquisto psicologico dei loro concetti fondamentali, sono legati a tre diversi ordini di sensazioni, rispettivamente alle sensazioni generali tattili muscolari, a quelle del tatto speciale, e a quelle della vista.

Le vedute psicologiche sui principî della geometria rappresentano soltanto un parziale risultato di profonde meditazioni filosofiche, le quali, iniziate durante gli studi all'Università pisana, si sono alternate lungo tutta la vita con le indagini matematiche e storiche. Dopo quindici anni di lavoro egli ci dà il primo frutto di quelle meditazioni nel poderoso volume *Problemi della scienza* pubblicato nel 1906. L'autore vuol richiamare l'attenzione del pubblico colto sul problema filosofico della conoscenza, e si propone di dare una veduta unitaria della scienza atta a combattere l'eccessiva specializzazione. Mentre in una prima parte dell'opera si esaminano i procedimenti psicologici e logici con i quali le impressioni dei sensi vengono raccolte, coordinate e trasformate per dar luogo alle teorie scientifiche, nella seconda parte i principî

delle varie scienze matematiche, fisiche e biologiche sono sottoposti ad una critica esauriente

Abbiamo già accennato ad alcune sue idee sui principî della geometria. Aggiungiamo ora che nell'esame dei principî della meccanica, a proposito delle nozioni di tempo, di spazio, di moto, di forza, egli espone delle vedute che contengono in germe le concezioni sulle quali Alberto Einstein, proprio in quegli anni, stava costruendo la sua prima teoria della relatività.

Il pensiero filosofico dell'ENRIQUES si chiarisce e precisa nei saggi che egli va via via pubblicando. Alcuni di questi sono raccolti nel volume intitolato *Scienza e razionalismo* apparso nel 1912, nel quale le vedute odierne son messe a raffronto con le concezioni filosofiche dei secoli scorsi.

In epoca recente egli ha voluto assoggettare ad un esame critico e storico il problema del determinismo, sul quale lo sviluppo attuale della fisica ha attirato l'attenzione di tutti i pensatori. È nato così un volumetto *Causalité et déterminisme*, pubblicato a Parigi nel 1941, dal quale tolgo e traduco alcuni brani che valgono a chiarire le vedute dell'autore sulla costruzione della scienza.

« Il contenuto delle teorie scientifiche » scrive l'ENRIQUES « consiste nel- « l'insieme delle previsioni sperimentali che esse rendono possibili; ma la « scienza considerata nel suo divenire è qualche cosa di più di questo conte- « nuto. Le ipotesi e le teorie hanno un valore euristico che corrisponde alla « soddisfazione di certe esigenze razionali.

« Perciò, in contrasto con la tendenza di Mach e della sua scuola, affermo » prosegue l'ENRIQUES « che le ipotesi e le rappresentazioni immaginative ci « conducono più in là che la scienza positiva. Vista sotto tale aspetto la spie- « gazione causale implica qualche cosa di più che la semplice risposta a questa « domanda: come si presenta il fenomeno che noi osserviamo ? La scienza va « oltre tale spiegazione quando essa tenta di render conto del perchè. Quest'ul- « tima domanda acquista un senso rispetto ad una rappresentazione immagi- « nativa che lega l'effetto alla causa col mezzo di una continuità di imma- « gini ».

Fin qui l'ENRIQUES. E qualche pagina più in là, a proposito della tendenza dei fisici contemporanei a rinunziare al determinismo che fu la guida dei loro maestri, egli scrive:

« Quel che ci ripugna è di accettare il non-intelligibile; e questa ripu- « gnanza non è che la nostra fede nella intelligibilità delle cose. Eccoci in « presenza di un *criterio metodologico* del tutto generale, che è il presupposto « della scienza che si tratta di creare, cioè della ricerca scientifica.

« Una scienza perfetta dovrebbe spiegare tutti i fenomeni possibili. È « questo evidentemente un ideale irraggiungibile, anzi privo di senso. Ma, « sia pure per via di astrazione, noi possiamo sforzarci di spiegare certi ordini « particolari di fenomeni costituenti un frammento della realtà e di compren- « derli in qualche modo col mezzo di una rappresentazione concettuale che « costituisca una teoria scientifica adeguata a quella realtà. E prima di veri-

« ficare la teoria con l'esperienza . . . noi richiediamo che la teoria sia in se « stessa *plausibile*, che essa soddisfi al *principio di ragion sufficiente* che è « l'aspetto mentale della causalità ».

Ho voluto riportare questi brani del suo ultimo libro perchè venisse posta in luce la posizione filosofica dell'ENRIQUES. Risulta chiaro che egli appartiene a quella scuola del razionalismo sperimentale che ha avuto in Galileo e Newton i fondatori e massimi rappresentanti, che ha guidato il pensiero di molti scienziati dei secoli scorsi, e che oggi stesso si vanta dei grandi nomi di Max Planck e di Alberto Einstein.

Per l'ENRIQUES il determinismo non è una questione che possa risolversi con opportune esperienze; il determinismo è un presupposto alla ricerca scientifica e alla costruzione di una scienza che dia una interpretazione intelligibile della natura.

Ho già osservato che gli scritti filosofici dell'ENRIQUES dimostrano, col progredire del tempo, un interesse crescente per la storia del pensiero scientifico. Durante gli anni giovanili, nel fervore delle ricerca matematica, il suo sguardo era rivolto all'avvenire e le questioni storiche non fermavano in modo particolare la sua attenzione. Ma a mano a mano che cresce la sua cultura, egli sente la necessità di illuminare ogni veduta scientifica o filosofica alla luce portata dai grandi pensatori dei secoli passati, e di presentare le conquiste attuali come prodotti di una evoluzione di idee maturate attraverso il tempo.

Questa tendenza, già manifesta in alcuni saggi del libro citato *Scienza e razionalismo* del 1912, informa tutto il contenuto del volume *Per la storia della logica* pubblicato nel 1922, nel quale si espone come le vedute delle scuole greche e in particolare di Aristotile si siano, nel corso del tempo, trasformate per dar luogo alle concezioni attuali.

Un progetto più grandioso sorge intanto nella sua mente: esporre la storia del pensiero scientifico in un'opera in tre volumi, dei quali il primo destinato al mondo antico e in particolare alla Grecia, il secondo al medioevo, il terzo al rinascimento e all'epoca contemporanea. Il primo volume è uscito nel 1932 in collaborazione col prof. De Santillana. Ricco di notizie, profondo nella critica e nel tempo stesso lucido e di gradevole lettura, questo volume ha avuto subito un largo successo. Gli autori, come essi stessi dichiarano, non compiono opera di paziente erudizione, nè si dilungano in discussioni di carattere filologico. Di fronte ad un frammento oscuro di qualche filosofo della Grecia, l'ENRIQUES parte dal preconcetto che il pensiero originale doveva esser chiaro e intelligibile, formula una ipotesi sul significato del testo e l'accoglie soltanto quando la tesi proposta si accorda con le conseguenze che i commentatori greci di epoca più recente hanno tratto da quel passo del loro predecessore.

Il successo di quel primo volume ha reso più acerbo il rammarico di non averlo veduto seguire dagli altri due in progetto. Da un lato la difficoltà di interpretare tanti oscuri pensatori del medioevo, d'altro lato gli avvenimenti politici e bellici dell'ultimo decennio, distolsero gli autori dalla prosecuzione dell'opera. Parziale compenso a tale mancanza è il *Compendio di storia del*

pensiero scientifico, pubblicato dagli autori stessi nel 1937 e destinato principalmente a colmare con una veduta d'insieme le lacune che l'insegnamento della filosofia e della storia lascia negli allievi delle nostre scuole secondarie.

Un fine analogo, limitato però allo sviluppo delle matematiche e ai suoi rapporti con le altre discipline, si propone un volume dal titolo *Le matematiche nella storia e nella cultura*, pubblicato nel 1938, nel quale sono raccolte dal prof. Frajese lezioni e conferenze tenute dall'ENRIQUES agli studenti della Facoltà di scienze.

Aggiungo che negli ultimi anni egli aveva compiuto uno studio profondo sul filosofo Democrito, tentando di ricostruirne l'opera in base agli scarsi frammenti che ci son rimasti. Il manoscritto è fortunatamente compiuto ed il volume verrà presto pubblicato per cura del dott. Mazziotti che lo aveva aiutato nella redazione.

Con questo volume, e con l'altro in corso di stampa sulla teoria delle superficie si chiude la prodigiosa attività di FEDERIGO ENRIQUES. Egli ha coltivato con pari profondità tre indirizzi, la matematica, la filosofia, la storia della scienza, ed ha scritto in ciascuno di essi opere che basterebbero da sole a riempire ed illustrare la intera vita di uno scienziato.

In Italia egli era noto specialmente per le ricerche geometriche. Le sue vedute filosofiche, discordi da quelle della scuola dominante, non hanno avuto nel nostro paese il consenso e la risonanza che meritavano, ma furono grandemente apprezzate in Francia, dove egli fu nominato dieci anni fa Socio corrispondente dell'*Académie des Sciences morales et politiques*, e in Inghilterra dove, per la sua opera filosofica, ebbe titoli ed onori.

Per chiudere questa commemorazione aggiungerò qualche notizia biografica, sebbene la sua vita, trascorsa interamente nell'intimità della famiglia e tra gli amici e i discepoli, non offra avvenimenti notevoli.

Nacque FEDERIGO ENRIQUES a Livorno il 5 gennaio 1871, da famiglia benestante. Dalla madre, donna di forte carattere, sempre propensa alle discussioni su argomenti spirituali, egli portò la vivacità dell'ingegno e lo spirito combattivo che si manifestarono fin dalla prima giovinezza. La famiglia si trasferì presto a Pisa, dove egli seguì le scuole secondarie, l'Università e la Scuola Normale Superiore, conseguendo brillantemente la laurea in matematica nell'estate del 1891. Dopo un anno di perfezionamento a Pisa, uno a Roma, e qualche mese trascorso a Torino con Corrado Segre, ebbe, come già dissi, l'incarico di Geometria proiettiva e descrittiva a Bologna, e nel 1896 fu nominato colà professore delle dette materie, in seguito a concorso.

A Bologna iniziò la vita di famiglia sposando la figlia di Achille Coen, valoroso professore di storia dell'Università di Firenze, e con lei ebbe sempre consenso di idee e di affetti.

I ventotto anni trascorsi colà furono forse i più lieti e fecondi della sua vita. In quella dotta città, dove lo spazio ristretto rende facili e frequenti i contatti tra i professori delle varie Facoltà, egli trovò l'ambiente più favorevole per lo scambio delle idee e l'incremento della sua cultura. Ho già detto

che egli era un mediocre lettore. Il difetto si attenuò col tempo, ma non sparì mai del tutto. Potrà quindi sorprendere come egli fosse riuscito a formarsi una così prodigiosa cultura in tutti i campi dello scibile. La verità è che egli apprendeva molto più attraverso l'udito che attraverso la vista. La conversazione intellettuale era la sua occupazione preferita. Egli sapeva sfruttare i colleghi delle varie discipline, biologi, giuristi, filologi, per acquistare nuove cognizioni. E quel che riceveva egli elaborava nella sua mente ed assimilava in un tutto armonico.

A Bologna la sua versatilità era ben nota ed apprezzata e gli amici ne profittavano quando si presentava l'occasione.

Una volta il professore di zoologia di quel tempo si rifiutò, non so per quale ragione, di presiedere la Commissione di esami della sua materia. Ai colleghi, imbarazzati sul modo di sostituirlo, l'ENRIQUES scherzando si offrì di prenderne il posto, pur di disporre di una o due settimane per la preparazione. La Facoltà lo prese in parola. Ed egli volle interrogare personalmente tutti gli allievi, e rivelò tale sicura competenza e tale equità che gli allievi respinti confessarono a lui di riconoscere giusta la loro punizione.

Durante il periodo di Bologna egli fu presidente della Società filosofica italiana dal 1907 al 1913, e in tale qualità egli organizzò e presiedette il IV Congresso internazionale di Filosofia che si riunì in quella città nel 1911.

Sul principio del 1922 l'ENRIQUES accettò l'offerta che gli veniva dalla Facoltà di Scienze di Roma di coprire una cattedra di matematiche superiori (poi geometria superiore) nella nostra Università. Ma nell'ambiente più vasto della Capitale, dove son rari gli incontri tra colleghi di Facoltà diverse, non trovò quei facili scambi di idee che tanto gli erano cari. Trovò bensì biblioteche più ricche per gli studi storici ai quali principalmente si volgeva la sua attenzione e maggior numero e varietà di allievi, italiani e stranieri, interessati all'uno o all'altro degli insegnamenti che impartiva. Fondò e presiedette a Roma l'Istituto nazionale per la storia delle scienze, ed organizzò una Scuola per la diffusione di questa disciplina.

Facile ed elegante parlatore, abile dominatore di assemblee, avrebbe potuto partecipare qui alla vita pubblica e portare a vantaggio della cultura nazionale le sue eccezionali doti intellettuali e morali. Ma la sua venuta a Roma coincise con l'istaurarsi del fascismo, ed egli, insofferente di ogni vincolo, assetato di libertà, profondamente individualista, avversò fin dal principio le ideologie di quel regime. Lasciò con dolore la cattedra nel 1938, in seguito alle leggi razziali, e trascorse inosservato il periodo della guerra e delle persecuzioni.

Al rifiorire delle pubbliche libertà nel 1944 riprese l'insegnamento, ma l'organismo era ormai stanco ed egli non sentiva più la forza di assumere posti di combattimento. Una affezione cardiaca, che lo affliggeva da qualche tempo e lo costringeva a saltuari periodi di riposo, non gli aveva tolto la passione della ricerca e dello studio, ma aveva fiaccato lo spirito battagliero e l'interesse per ciò che era estraneo alla vita intellettuale.

Morì improvvisamente nelle prime ore del 14 giugno 1946 e ci lasciò un vuoto incolmabile. Ne furono addolorati i colleghi, gli amici, gli ammiratori che egli si era conquistato in Italia e all'estero. Ma più amaramente, insieme alla moglie, ai figli a tutti noi che formavamo parte della sua famiglia, lo piansero gli allievi che lo amavano come un padre. E padre fu veramente per loro. Li accoglieva a tutte le ore nel suo studio, da loro si faceva accompagnare nelle passeggiate mattutine, li incitava e guidava nella ricerca, li educava al senso del dovere nella scienza e nella vita.

Con FEDERIGO ENRIQUES una grande luce si è spenta. Come avviene per i maggiori beni concessi all'uomo, dei quali si apprezza più intensamente il valore quando ci vengon tolti, così la scomparsa dell'ENRIQUES ci fa sentire qual fulgore irradiasse dalla sua persona e qual fermento di vita intellettuale, qual tesoro di sapienza abbiamo oggi perduto con lui.

PUBBLICAZIONI DI FEDERIGO ENRIQUES

MEMORIE SCIENTIFICHE ED OPUSCOLI

1890 – *Alcune proprietà dei fasci di omografie negli spazî lineari ad n dimensioni.* (« Rend. Acc. Lincei » (4), VI_2, p. 63).

1892 – *Le omografie cicliche negli spazî a n dimensioni.* (« Giornale di Batt. », XXX, p. 311).

– *Le omografie armoniche negli spazî lineari ad n dimensioni.* (Ibid., p. 319).

1893 – *Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane nel piano.* (« Rend. Acc. Lincei » (5). II_1, p. 468).

– *Sopra un gruppo continuo di trasformazioni di Jonquières nel piano.* (Ibid., p. 532).

– *Sugli spazî pluritangenti delle varietà cubiche generali appartenenti allo spazio a 4 dimensioni.* (« Giornale di Batt. », XXXI, p. 31).

– *Le superficie con infinite trasformazioni proiettive in sè stesse.* («Atti Ist. Veneto» (7), IV, p. 1590).

– *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche.* (« Memorie Torino » (2), XLIV, p. 171).

– *Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve iperellittiche.* (« Rend. Acc. Lincei » (5), II_2, p. 281).

– *Una questione sulla linearità dei sistemi di curve appartenenti ad una superficie algebrica.* (Ibid. (5), II_1, p. 558).

1894 – *Sui fondamenti della geometria proiettiva.* (« Rend. Ist. Lomb. » (2), XXVII, p. 550).

– *Intorno alla Memoria « Le superficie con infinite trasformazioni proiettive in sè stesse ».* (« Atti Ist. Veneto » (7), V, p. 638).

– *Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve ellittiche.* (« Rend. Acc. Lincei » (5), III_1, p. 481).

– *Ancora sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve ellittiche.* (Ibid., p. 536).

– *Sulla massima dimensione dei sistemi lineari di curve di dato genere appartenenti ad una superficie algebrica.* (« Atti Torino », XXIX, p. 275).

1895 – *Sulla irrazionalità da cui può dipendere la risoluzione di un'equazione algebrica* $f(xyz) \doteq 0$ *mediante funzioni razionali di due parametri.* (« Rend. Acc. Lincei » (5), IV_2, p. 311).

1895 – *Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva* (in coll. con G. Fano). («Rend. Palermo», IX, p. 79).
– *Sui sistemi lineari di superficie algebriche ad intersezioni variabili iperellittiche.* («Math. Ann.», XLVI, p. 179).
– *Alcune proprietà metriche dei complessi di rette ed in particolare di quelli simmetrici rispetto ad assi.* («Ann. Pisa», VII).
– *Sur les surfaces algébriques admettant un groupe continu de transformations birationelles en elles mêmes* (in coll. con G. Castelnuovo). («C. R. de l'Ac. des Sc.», CXXI, p. 242).
1896 – *Sopra le equazioni differenziali lineari del 4° ordine che divengono integrabili quando è noto un loro integrale particolare.* («Rend. Ist. Lomb.» (2), XXIX, p. 257).
– *Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche.* («Rend. Palermo», X, p. 30).
– *Sopra le superficie algebriche le cui curve canoniche sono iperellittiche.* («Rend. Acc. Lincei» (5), V_1, p. 191).
– *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche.* («Mem. Soc. It. d. Sc.» (3), X, p. 1).
– *Sui piani doppî di genere uno.* (Ibid., p. 201).
– *Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques* (in coll. con G. Castelnuovo). («Math. Ann.», XLVIII, p. 241).
1897 – *Sulla irrazionalità da cui può dipendere la risoluzione di un'equazione algebrica* $f(xyz)=0$ *mediante funzioni razionali di due parametri.* («Math. Ann.», XLIX, p. 1).
– *Le superficie algebriche di genere lineare* $p^{(1)}=2$ («Rend. Acc. Lincei» (5), VI_1, p. 139).
– *Sulle superficie algebriche di genere lineare* $p^{(1)}=3$ (Ibid., p. 169).
– *Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane dello spazio* (in coll. con G. Fano). («Ann. di Mat.» (2), XXVI, p. 59).
1898 – *Sulle ipotesi che permettono l'introduzione delle coordinate in una varietà a più dimensioni.* («Rend. Palermo», XII, p. 222).
– *Sui piani doppî di genere lineare* $p^{(1)}=1$ («Rend. Acc. Lincei» (5), VII_1, p. 234; 253).
– *Sopra le superficie che posseggono un fascio ellittico o di genere due di curve razionali.* (Ibid. VII_2, p. 281).
– *Sopra le superficie che posseggono un fascio di curve razionali.* (Ibid., p. 344).
1899 – *Sur les problèmes qui se rapportent à la résolution des équations algébriques renferment plusieurs inconnues.* («Math. Ann.», LI, p. 134).
– *Una proprietà delle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica regolare.* («Rend. Palermo», XIII, p. 95).
– *Sopra le superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali.* («Math. Ann.», LII, p. 449).
– *Programma di un corso di geometria superiore per l'anno 1897–98.* («Boll. Bibl. e St. Sc. Mat.», II, p. 76).
1900 – *Sur une classe de surfaces algébriques* (in coll. con G. Castelnuovo). («C. R. de l'Ac. des Sc.», CXXXI, p. 739).
– *Sulle condizioni di razionalità dei piani doppî* (in coll. con G. Castelnuovo). («Rend. Palermo», XIV, p. 290).
– *Sul preteso raddrizzamento delle immagini nella visione.* («Boll. di Mat.»).
– *Intorno alla seconda soluzione di Laplace del problema dei tre corpi.* («Atti Ist. Veneto», LX, p. 957).
1901 – *Sur les surfaces algébriques admettant des intégrales de différentielles totale de première espèce.* («Ann. Toulouse» (2), III, p. 77).
– *Remarque au sujet d'une note de M. S. Kantor.* («C. R. de l'Ac. de Sc.», CXXXII, p. 248).
– *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche* (in coll. con G. Castelnuovo). («Ann. di Mat.» (3), VI, p. 165).

1901 – *Intorno ai fondamenti della geometria sopra le superficie algebriche.* («Atti Torino», XXXVII, p. 19).
– *Sulla spiegazione psicologica dei postulati della geometria.* («Riv. di fil.»).
1902 – *Luigi Cremona.* («Rend. Bologna», VIII, p. 37).
1903 – *Sopra le superficie e le varietà a più dimensioni le cui geodetiche sono rappresentabili con equazioni lineari.* (Ibid.).
– *Estensioni e limiti dell'insegnamento della matematica, in ciascuno dei due gradi, inferiore e superiore, delle scuole medie* (in collab. con F. Severi, A. Conti). («Boll. di Mat.», II, 50).
1904 – *Sul gruppo di monodromia delle funzioni algebriche appartenenti ad una data superficie di Riemann.* («Rend. Acc. Lincei» (5), $XIII_1$, p. 382).
– *Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari.* («Rend. Bologna»).
1905 – *Sur les surfaces algébriques irrégulières.* («C. R. de l'Ac. de Sc.», CXL, p. 133).
– *Sur les surfaces algébriques de genre zéro.* (Ibid., p. 564).
– *Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in sè stesse.* («Rend. Palermo», XX, p. 61).
– *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero.* (Ibid., p. 1).
1906 – *Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique à plusieurs dimensions* (in coll. con G. Castelnuovo). («Ann. de l'Éc. Norm.» (3), XXIII, p. 339).
– *Sulle superficie algebriche che ammettono una serie discontinua di trasformazioni birazionali.* («Rend. Acc. Lincei» (5), XV_2, p. 665).
– *Intorno alle superficie algebriche di genere lineare* $p^{(1)} = 1$. («Rend. Bologna»).
– *Sui principi della meccanica.* (Ibid.).
– *L'ordinamento dell'Università in rapporto alla filosofia.* (I Conv. Soc. Fil. It.).
– *Sulla preparazione degli insegnanti di scienze.* (5° Congr. Ins. Sc. Medie).
1907 – *Prinzipien der Geometrie.* («Enz. Math. Wiss.», III_1, p. 129).
– *Intorno alle superficie iperellittiche* (in coll. con F. Severi). («Rend. Acc. Lincei» (5), XVI_1, p. 443).
– *Le principe d'inertie et les dynamiques non-newtoniennes.* («Scientia», II, p. 21).
– *La scienza eterodossa e la sua funzione sociale.* (Ibid., I, p. 323).
– *Sopra le superficie algebriche di genere uno.* («Mem. Soc. It. d. Sc.» (3), XIV, p. 327).
– *L'Università Italiana. Critica degli ordinamenti in vigore.* («Scientia», III, p. 133).
– *L'Università Italiana. La riforma dell'Università italiana.* (Ibid., p. 362).
1908 – *Intorno alle superficie iperellittiche irregolari* (in coll. con F. Severi). («Rend. Acc. Lincei» (5), $XVII_1$, p. 4).
– *Sui moduli delle superficie algebriche.* (Ibid., p. 690).
– *Un'osservazione relativa alle superficie di bigenere uno.* («Rend. Bologna» (2) XII, p. 40).
– *Il Rinascimento filosofico nella scienza contemporanea.* («Questioni filosofiche», ed. Formiggini).
– *Matematiche e Filosofia.* (4° Congr. di Mat., Roma, III, 373).
– *Id.* («Rass. contemp.», I, n. 10).
– *Le superficie di genere uno.* («Rend. Bologna» (2), XIII, p. 25).
– *Un caso di indeterminazione nella meccanica.* («Scientia», IV, p. 164).
– *Il valore della scienza.* («Ann. Univ. Bologna»).
1909 – *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* (in coll. con F. Severi). Première partie («Acta Math.», XXXII, p. 283, 1909). Deuxième partie (Ibid., XXXIII, p. 321, 1910).
– *Il principio di ragion sufficiente nella costruzione scientifica.* («Scientia», V, p. 1).
– *La teoria dello Stato e il sistema rappresentativo.* (Ibid., VI, p. 148).
– *Les deux écoles italiennes de droit pénale.* (Ibid., p. 372).
– *La valeur de la science.* («Revue du mois»).
– *Razionalismo e storicismo.* («Scientia», V, p. 350).

1910 – *Sulle trasformazioni razionali delle superficie di genere uno.* (« Rend. Bologna »).
- *Il pragmatismo.* (« Scientia », VIII, p. 146).
– *La filosofia positiva e la classificazione delle scienze.* (« Scientia », VII, p. 369).
La metafisica di Hegel. (« Riv. di fil. », II, 56).
– *La metaphysique de Hegel considerée d'un point de vue scientifique.* (« Rev. de Méth. et Mor. », XVIII, 1).
· *Fondements de la Géométrie.* (« Enc. des Sc. Math. »).

1911 – *I numeri e l'infinito.* (« Scientia », IX, p. 1).
– *Il problema della realtà.* (Ibid., p. 257).
– *La philosophie de Giovanni Vailati.* (Ibid., X, p. 171).
– *Sui numeri non archimedei e su alcune loro interpretazioni.* (« Boll. Mathesis », III, p. 87).
– *La filosofia italiana al congresso di Bologna.* (« Riv. di fil. », III, p. 361).
– *Esiste un sistema filosofico di Benedetto Croce?* (« Rass. contemp. », IV, n. 6).
– *Mettiamo le cose a posto.* (« Riv. di fil. », III, p. 582).
– *Sulla definizione del continuo lineare.* (« Rend. Bologna », XV, p. 39).

1912 · *Risposta a Benedetto Croce.* (« Riv. di fil. », IV, p. 295).
Matematiche e teoria della conoscenza. (« Scientia », XI, p. 1).
– *Matematiche e teoria della conoscenza* (trad. russa « Kagans Bote », Nr. 502, p. 265).
– *Il significato della critica dei principî nello sviluppo delle matematiche.* (« Scientia », XII, p. 172).
– *Sur le théorème d'existence pour les fonctions algébriques de deux variables indépendantes.* (« C. R. de l'Ac. de Sc. », CLIV, p. 418).
– *Alcune osservazioni intorno alle superficie razionali reali.* (« Rend. Bologna »).
– *Sopra una involuzione non razionale dello spazio.* (« Rend. Acc. Lincei » (5), XXI_1 p. 81).
· *Sui moduli di una classe di superficie algebriche e sul teorema d'esistenza per le funzioni algebriche di due variabili.* (« Atti Torino », XLVII, p. 300).
· *Grundeigenschaften der algebraischen Flächen* (in coll. con G. Castelnuovo). (« Enz. Math. Wiss. », III, C 6 *a*).
· *Die algebraischen Flächen vom Gesichtspunkte der birationalen Transformationen aus* (in coll. con G. Castelnuovo). (Ibid., C 6 *b*).
· *Die Probleme der Logik.* (« Enz. phil. Wiss. », I, p. 219).

1913 *Intorno alla risoluzione razionale di una classe di equazioni algebriche fra quattro variabili.* (« Ann. di Mat. » (3), XX, p. 109).
– *Sulla teoria geometrica degli immaginari.* (« Rend. Bologna »).
– *Il salto dalla teoria della conoscenza all'idealismo metafisico.* (« Riv. di fil. », V, p. 95).

1914 · *Sulla classificazione delle superficie algebriche e particolarmente sulle superficie di genere lineare* $p^{(1)} = 1$. Nota I (« Rend. Acc. Lincei » (5), $XXIII_1$, p. 206).
– Id. Nota II. (Ibid., p. 291).
– *Sul teorema d'invarianza della serie canonica* g^{p-1}_{2p-2} *appartenente ad una curva algebrica di genere p.* (« Rend. Bologna »).

1915 – *Opere matematiche di Luigi Cremona* (pubbl. sotto gli auspici della R. Acc. dei Lincei). (« Ann. di Mat. » (3), XXIV, p. 157).
· *Reflexions sur l'art d'écrire un traité; à propos d'un traité de mathématiques.* (« Scientia », XVIII, p. 152).
– *Sulle intersezioni di due varietà algebriche.* (« Rend. Bologna »).

1916 - *Sulla teoria delle singolarità delle curve algebriche.* (« Rend. Acc. Lincei » (5), XXV_1, p. 607.
– *L'intorno di una curva sopra una superficie algebrica.* (« Rend. Bologna »).

1917 – *Opere matematiche di Luigi Cremona* (pubbl. sotto gli auspici della R. Acc. dei Lincei). (« Ann. di Mat. » (3), XXVI, p. 225).
– *Sulla teoria delle omografie iperspaziali.* (« Rend. Acc. Lincei » (5), $XXVI_1$, p. 629).
– *Sui rami delle curve algebriche gobbe nell'intorno di un punto singolare.* (Ibid., $XXVI_2$, p. 415).

1917 – *Sull'analisi delle singolarità puntuali delle superficie algebriche mediante divisioni di polinomi.* (Ibid., p. 35).
– *Sur quelques questions soulevées par l'infini mathématique.* (« Rev. de Méth. et Mor. », XXIV, p. 149).
– *Osservazioni sulle falde d'una superficie algebrica nell'intorno di un punto singolare.* (« Rend. Bologna »).
1918 – *Sulla teoria della materia e sulle origini della meccanica in Democrito d'Abdera.* (Ibid.).
– *Il concetto della logica dimostrativa in Aristotele.* (« Riv. di fil. », X, p. 16).
1919 – *Questioni numerative e loro significato nella geometria sopra le curve algebriche.* (« Rend. Acc. Lincei » (5), $XXVIII_1$, p. 370).
– *Sulle curve canoniche di genere p dello spazio a p—1 dimensioni.* (« Rend. Bologna »).
– *Sul procedimento di riduzione all'assurdo.* (« Boll. Mathesis », XI, p. 6).
1920 – *Democrito e le origini della meccanica.* (« Atti S. I. P. S. », X, p. 474).
– *La evolucion del concepto de la geometria y la escuela italiana durante los ultimos cincuenta anos.* (« Rev. Mat. Hisp. Amer. »).
– *Sul gruppo proiettivo delle curve ellittiche normali e su certi fasci sizigetici di queste curve.* (« Rend. Bologna »).
– *La teoria democritea della scienza nei dialoghi di Platone.* (« Riv. di Fil. », XI, p. 14).
– *Razionalismo e misticismo.* (Ibid. p. 325).
1921 – *Sul teorema di esistenza per le funzioni algebriche.* (« Rend. Bologna »).
– *La relatività del movimento nell'antica Grecia.* (« Period. di Mat. » (4), I, p. 77).
– *Insegnamento dinamico.* (Ibid., p. 6).
– *Noterelle di logica matematica.* (Ibid., p. 233).
– *Polemica logico–matematica* (in coll. con C. Burali–Forti). (Ibid., p. 354).
– *La lingua internazionale.* (Ibid., p. 371).
– *La théorie kantienne des jugements a priori par rapport au développement historique de la science contemporaine.* (« Soc. franc. de phil. »).
– *L'oeuvre mathématique de Klein.* (« Scientia », XXX, p. 393).
1922 – *Il principio di degenerazione e la geometria sopra le curve algebriche.* (« Math. Ann. », LXXXV, p. 195).
– *Sulle equazioni algebriche* $f(xy) = 0$ *che si risolvono parametricamente mediante due polinomi.* (« Rend. Bologna »).
– *Le venerabili proprietà della materia.* (« Per. di Mat. » (4), II, p. 117).
– *Le teorie sulla forma della terra nell'antica Grecia.* (« Rend. Sem. Roma » (2), I p. 17).
– *Einstein e l'interpretazione subiettiva della scienza.* (« Per. di Mat. » (4), II, p. 77).
– *Sull'interpolazione nell'uso delle tavole dei logaritmi o delle funzioni trigonometriche.* (Ibid., p. 280).
– *Conservazione e progresso nelle Matematiche.* (Ibid., p. 483).
– *Il positivismo e la critica degli assiomi dell'eguaglianza.* (« Rend. Bologna » (4), II, p. 185).
1923 – *Sui fondamenti dell'aritmetica e sul principio dell'invarianza del numero.* (« Rend. Acc. Lincei » (5), $XXXII_2$, p. 113).
– *La polemica eleatica per il concetto razionale della geometria.* (« Per. di Mat. » (4), III, p. 73).
– *Sulle singolarità algebriche.* (« Rend. Sem. Roma » (2), II, p. 31).
1924 – *La signification et l'importance de l'histoire de la science et l'oeuvre de Paul Tannery.* (« Rev. de Méth. et Mor. », XXXI, p. 425).
– *Sur la théorie des équations et des fonctions algébriques d'apres l'école géométrique italienne.* (« Ens. Math. » XXIII, p. 309).
– *Sur la classification des surfaces algébriques au point de vue des transformations birationelles.* (« Bull. Soc. Math. Fr. », LII, p. 602).
– *Sulla costruzione delle funzioni algebriche di due variabili possedenti una data curva di diramazione.* (« Ann. di Mat. » (4), I, p. 185).

1924 – *Il significato umanistico della scienza nella cultura nazionale* («Per. di Mat.» (4), IV, p. 1).

– *Prefazione e note alla traduzione italiana di:* L. HEIBERG, *Matematiche, scienze naturali e medicina nell'antichità classica.* (Stock, Roma).

1925 – *Max Noether* (in coll. con G. Castelnuovo e F. Severi). («Math. Ann.», XCIIII, p. 161).

– *Note critiche sullo sviluppo dei concetti della meccanica in:* I. NEWTON, *Principî di filosofia naturale* (in coll. con U. Forti). (Stock, Roma).

1926 – *Il problema della forma della terra nell'antica Grecia* .(«Per. di Mat.» (4), VI, p. 73).

– *Il cerchio* (articolo di prova per l'«Enciclopedia italiana»). (Ibid., p. 26).

– *L'Italia nella collaborazione universale della cultura.* («Nuova antologia»).

– *Continuity and discontinuity of Sciences.* (Congr. intern. fil. Cambridge).

1927 – *Sull'immaginario in geometria.* Nota I. («Per. di Mat.» (4), VII, p. 140).

– *Id.* Nota II. (Ibid., p. 231).

– *La definizione come problema scientifico.* (Ibid., p. 73).

– *La teoria matematica della lotta per l'esistenza secondo Vito Volterra.* (Ibid., p. 111).

– *La géométrie non-euclidienne et la théorie de la connaissance in: In memoriam N. Lobatschefskiy* (Kazan).

– *Lettera aperta a S. E. il Ministro della Pubblica Istruzione.* («Per. di Mat.» (4), VII, p. 351).

1928 – *Nota in:* A. CLAIRAUT, *La teoria della forma della terra.* (Zanichelli, Bologna).

– *La riforma Gentile e l'insegnamento della matematica e della fisica nella scuola media.* («Per. di Mat.» (4), VIII, p. 68).

– *Gli studi matematici* (Leonardo, VI, n. 25).

1929 – *Ansichten über die Entwicklung der griechischen Wissenschaft.* («Abhandlungen Hamburg», VII, p. 70).

– *Les modifications essentielles de l'enseignement mathématique dans les principaux pays depuis 1910* (in coll. con H. Fehr, A. Chatelet, S. Gagulin. («Ens. Math.», XXVIII, p. 4).

– *Ueber die Geschichte des wissenschaftlichen Denkens bei den Griechen.* («Nachr. Hochschulges. Giessen», VII, p. 15).

1930 – *Introduzione a:* P. TANNERY, «*Pour l'histoire de la science hellène. De Thales à Empédocle*» (Gauthier–Villars, Paris).

– *Abeliano; Analisi; Angolo; Assioma; Assoluto; Assurdo; Betti Enrico; Cerchio; Curve* . . . (vol. I, II, III, V, VI, VII, IX, XI, XII, XVI, XVII, XVIII, XIX, XXII, XXIII, XXIV, XXV, XXVII, XXVIII, XXXII, XXXIII, XXXIV). «Enc. ital.».

– *Continuità* (in coll. con O. Chisini). (Ibid.)

– *La geometria non euclidea e i presupposti filosofici della teoria della relatività.* («Atti S. I. P. S.», $XVIII_1$, p. 411).

– *Il principio di ragione sufficiente nel pensiero greco.* «Scientia», XLVIII, p. 285).

– *Il determinismo e la fisica quantistica nel congresso fiorentino della Mathesis.* («Per. di Mat.» (4), X, p. 65.

– *Sul principio di identità dei polinomi.* (Ibid., p. 172).

– *Sopra le superficie algebriche trasformabili in rigate.* («Rend. Acc. Lincei» (6), XII_2, p. 3).

– *La filosofia di Elea e la posizione del problema della meccanica.* «Rend. Sem. Milano», IV, p. 1).

– *Philosophia de Elea et positione de problema de Mechanica* («Schola et vita», V, p. 5).

– *I motivi della filosofia di Eugenio Rignano.* («Scientia», XLVII, p. 377).

1931 – *Teoria delle superficie algebriche.* («Rend. Sem. Roma» (2), VII, p. 107).

1932 – *Intorno ad alcune serie invarianti di gruppi di punti sopra una superficie algebrica.* («Rend. Acc. Lincei» (6), XVI, p. 533).

– *Sulle irrazionalità aritmetiche che occorrono per la rappresentazione piana della superficie razionale a sezioni ellittiche dell'ottavo ordine.* (Ibid., p. 540).

1932 – *Platone e la teoria della scienza* (in coll. con G. D. de Santillana). («Scientia», LI, p. 5).
1933 – *Intorno alle serie continue composte di involuzioni razionali di gruppi di punti sopra una superficie algebrica.* (« Rend. Acc. Lincei » (6), XVII, p. 109).
– *L'infinito nella storia del pensiero.* (« Scientia », LIV, p. 381).
– *Sull'insegnamento dell'aritmetica.* (« Ann. Istr. Media », IX, p. 206).
1934 – *Signification de l'histoire de la pensée scientifique.* (« Act. scient. et industr. », n. 161).
– *Sulle superficie ellittiche di genere zero.* (« Rend. Acc. Lincei » (6), XIX, p. 195).
– *Sulla classificazione delle superficie algebriche, particolarmente di genere zero*; Lezioni raccolte da L. Campedelli. (« Rend. Sem. Roma » (3), I_2, p. 7).
– *L'infini dans la pensée des Grecs.* (« Scientia », LVII, p. 310).
– *Unicuique suum.* (« Per. di Mat. » (4), XV, p. 65).
– *Sul principio di Plücker–Clebsch* (in coll. con O. Chisini). (Ibid., p. 276).
1936 – *Curve infinitamente vicine sopra una superficie algebrica.* (« Rend. Sem. Roma » (4), I, p. 1).
– *Addizione alla memoria: « Curve infinitamente ecc. ».* (Ibid., p. 119).
– *La proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari e le curve infinitamente vicine.* (« Rend. Acc. Lincei » (6), XXIII, p. 459).
– *Sulle singolarità che nascono per proiezione di una superficie e varietà algebrica.* (In scritti matematici offerti a L. Berzolari, p. 351).
– *La philosophie de la nature.* (« Scientia », LIX, p. 218).
– *Pluralità e moto nella polemica eleatica e in particolare negli argomenti di Zenone.* (« Riv. di fil. », XXVII, p. 198).
– *La teoria della conoscenza scientifica nei suoi sviluppi da Kant ad oggi.* (« Atti S. I. P. S. »).
1937 – *Curve infinitamente vicine sopra una superficie algebrica.* (« Rend. Acc. Lincei » (6), XXVI, p. 193.
– *Descartes et Galilée.* (« Rev. de Méth. et Mor. », XLIV, p. 221).
– *Le problème de la raison.* (Congr. inter. Phys.).
1938 – *Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari.* (« Rend. Acc. Lincei » (6), XXVII, p. 493).
– *L'importanza della storia del pensiero scientifico nella cultura nazionale.* (Relazione discussa presso la R. Acc. Naz. dei Lincei, nella seduta del 6 febbraio 1938). (« Scientia », LXIII, p. 125).
1939 – *Des courbes paracanoniques appartenant à une surface algébrique irrégulière.* (« Boll. Soc. Roy. Sc. Liège », VIII, p. 422).
– *Piccole note su James Gregory e il suo soggiorno in Italia.* (« Roy. Soc. Edimburgo », p. 465).
– *Sopra le involuzioni irregolari appartenenti ad una superficie algebrica.* (Un. de Tucuman).
1940 – *Sur l'extension du thèoreme de Riemann–Roch au systèmes lineaires de courbes appartenant à une surface algébrique.* (« Bull. Soc. Math. »).
1942 – *Il pensiero di Galileo Galilei* (*sotto il nome di Adriano Giovannini*). (« Arch. della Cult. Ital. », IV).
– *L'errore nelle matematiche* (*sotto il nome di Adriano Giovannini*). (« Per. di Mat. » (4), XXII, p. 57).
1943 – *Sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica.* («Comm. Math. Helvetici », XV, p. 227).

TRATTATI

Lezioni di geometria proiettiva (autografato, Bologna, 1894, p. 214).
Id. (Zanichelli, Bologna, 1898, pp. IX + 377).
Id. II ediz. (Zanichelli, Bologna, 1904, pp. VIII + 409).

Vorlesungen über projektive Geometrie, tradotte da H. Fleischer (Teubner, Leipzig, 1903, pp. XIV + 378).

Id. 2. Auflage (Teubner, Leipzig, 1915, pp. XIV + 354).

Leçons de géometrie projective, tradotte da L. Lebèrenne (Gauthier–Villars, Paris, 1930, pp. IV + 430).

Lezioni di Geometria descrittiva. Per cura di J. Schimaglia (litogr. Bologna, 1895).

Id. Per cura di U. Concina. (Zanichelli, Bologna, 1902, pp. XI + 421).

Id. 2ª ediz. Per cura di U. Concina. (Zanichelli, Bologna, 1908, pp. XI + 365).

Conferenze di geometria. Fondamenti di una geometria iperspaziale. (litogr., Bologna, 1895).

Questioni riguardanti la geometria elementare. (Raccolte e coordinate da F. Enriques). (Zanichelli, Bologna, 1900, pp. VII + 532).

Fragen der Elementargeometrie. Gesammelt und zusammengessellt von F. Enriques. I. Teil: *Die Grundlagen der Geometrie*; tradotto da H. Thiene (Teubner, Leipzig, 1911: pp. X + 366).

II. Teil: *Die geometrischen Aufgaben, ihre Lösung und Lösbarkeit*; tradotto da H. Fleischer (Teubner, Leipzig, 1907, pp. XII + 348).

Id. II. ed. (Teubner, Leipzig, 1922–23).

Problemi della scienza (Zanichelli, Bologna, 1906, pp. IV + 593).

Probleme der Wissenschaft; tradotti da K. Grelling (Teubner, Leipzig, 1910, pp. X + 272, VI + 340).

Problemi della scienza, traduzione russa di A. Batschinski e G. G. Spett. Parte I (Kosmos, Mosca, 1910, pp. III + 209).

Les concepts fondamentaux de la science. Trad. par L. Rougier (Duned et Pinet, Paris, 1912).

Problems of science. Trad. by K. Royce (Open Court Chicago, 1914, pp. XVI + 292).

I numeri e l'infinito (Zanichelli, Bologna, 1911, pp. 26).

Scienza e razionalismo (Zanichelli, Bologna, 1912).

Questioni riguardanti le matematiche elementari. Vol I (Zanichelli, Bologna, 1912, pp. VII + + 649); vol. II (Zanichelli, Bologna, 1914, pp. VI + 811).

Id. 3ª ediz.: Parte I, vol. I (Zanichelli, Bologna, 1924, pp. VIII + 398); parte I, vol. II (Zanichelli, Bologna, 1925, pp. XI + 466); parte II (Zanichelli, Bologna, 1926, pp. 606); parte III (Zanichelli, Bologna, 1927, pp. 492).

Questiones relativas a la Matematica Elemental, trad. per cura della « Revista Mat. Hispano–Americana » (Valladolid, 1921).

Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche. Pubblicate per cura del dr. O. Chisini. Vol. I (Zanichelli, Bologna, 1915, pp. XIV + 398); Vol. II (Zanichelli, Bologna, 1918, pp. 714); Vol. III (Zanichelli, Bologna, 1924, pp. 593); vol. IV (Zanichelli, Bologna, 1934, pp. 274).

Courbes et fonctions algébriques d'une variable; traduzione di M. Légaut (Gautier–Villars, Paris, 1926).

Conferenze sulla geometria non–euclidea per cura del dr. O. Fernandez (Zanichelli, Bologna, 1918).

Id. trad. spagnola di O. Fernandez (Madrid, 1918).

Per la storia della logica. I principî e l'ordine della scienza nel concetto dei pensatori matematici (Zanichelli, Bologna, 1922, pp. 302).

The historic development of logic; the principles and structure of science in the conception of mathematicals thinkers; traduzione di J. Rosenthal (Holt, New York, 1929, pp. 282).

L'evolution de la logique; traduzione di G. E. Monod–Herzen (Chiron, Paris 1925, pp. 204).

Zur Geschichte der Logik. Grundlage und Auflau der Wissenscheft im Urteil der mathematischer Denker; traduzione di L. Bieberbach (Teubner, Leipzig, 1927, pp. V + 240).

Gli elementi di Euclide e la critica antica e moderna. Editi da F. Enriques col concorso di diversi collaboratori. I. libri I–IV (Stock, Roma, 1925, pp. 325); II. libri V–IX. (Zanichelli Bologna, 1930, pp. 356); III. libri X (Zanichelli, Bologna, 1932, pp. 366). IV. libri XI–XIII (Zanichelli, Bologna, 1935, pp. 360).

L'evolution des idées géometriques dans le pensée grecque: point, ligne, surface; traduzione di M. Solavine (Gauthiers–Villars, Paris, 1927, pp. VIII + 48).
Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche, raccolte da L. Campedelli (Lit. C.E.D.A.M., Padova, 1932, IV + 484).
Storia del pensiero scientifico (in coll. con G. D. Santillana). Vol. I: *Il mondo antico* (Zanichelli, Bologna, 1932, pp. 682).
Compendio di storia del pensiero scientifico dall'antichità fino ai tempi moderni (in coll. con G. D. Santillana) (Zanichelli, Bologna, 1937, pp. VI + 481).
Il significato della storia del pensiero scientifico (Zanichelli, Bologna, 1936, pp. VI + 72).
Le matematiche nella storia e nella cultura (Zanichelli, Bologna, 1938, pp. XXI + 340).
Causalità e determinismo (Hermann, Paris, 1941).
Id., trad. it. (Casa Atlantica, Roma, 1945).

TESTI PER LE SCUOLE MEDIE

in collaborazione con UGO AMALDI.

Elementi di geometria ad uso delle scuole secondarie superiori. (Zanichelli, Bologna, 1903; numerose edizioni successive, talune delle quali profondamente rielaborate).
Elementi di geometria ad uso delle scuole normali. (Zanichelli, Bologna, 1903; rielaborati in varie edizioni successive, sotto il titolo « edizione ridotta »).
Elementi di geometria ad uso delle scuole tecniche. (Bologna, Zanichelli, 1909; varie edizioni, successivamente rielaborate in: *Elementi di geometria ad uso delle scuole complementari*, 1926; *Elementi di geometria ad uso delle scuole complementari e di avviamento al lavoro*, 1930; *Nozioni di geometria ad uso delle scuole di avviamento al lavoro*, 1931; *Nozioni di geometria ad uso delle scuole di avviamento professionale*, 1934).
Nozioni di geometria ad uso delle scuole complementari. (Bologna, Zanichelli, 1910; varie edizioni rielaborate in *Nozioni intuitive di geometria ad uso degli istituti magistrali inferiori*, 1931).
Nozioni di geometria ad uso dei ginnasi inferiori. (Bologna, Zanichelli, 1910; rielaborate in varie edizioni successive).
Zasady Gieometrji Elementarnej do użytku szkół średnich tradotto da W. L. Wojtowicz. (Varsavia, Leopoli, 1916).
Nozioni di matematica ad uso dei licei moderni. (Zanichelli, Bologna, I vol., 1914; II vol., 1915).
Nociones intuitivas de Geometrìa tradotte da F. D. Jaime. (Buenos– Aires, 1929)
Elementos de Geometrìa tradotti da F. La Menza. (Buenos–Aires, 1929).
Algebra elementare ad uso dei ginnasi superiori e del corso inferiore degli istituti tecnici. Vol. I. (Bologna, Zanichelli, 1931).
Algebra elementare ad uso dei licei classici e del corso superiore degli istituti tecnici. Vol. II. (Bologna, Zanichelli, 1932).
Algebra elementare ad uso del primo biennio dei licei scientifici. Vol. II. (Bologna, Zanichelli, 1933).
Algebra elementare ad uso del corso ordinario degli istituti tecnici. Vol. II. (Bologna, Zanichelli, 1934).
Algebra elementare ad uso dei licei classici. Vol. II. (Bologna, Zanichelli, 1934).
Complementi di algebra ad uso del secondo biennio dei licei scientifici. (Bologna, Zanichelli, 1933).
Nozioni di geometria ad uso della scuola media. (Bologna, Zanichelli, 1946).
Elementi di algebra ad uso delle scuole medie superiori. (Bologna, Zanichelli, parte I e II, 1946).

NOTE DI SOCI

Geometria. — *Sulle Jacobiane di una corrispondenza puntuale fra piani.* Nota [1] del Socio E. Bompiani.

1. – Ho già avuto occasione [2] di occuparmi della corrispondenza puntuale fra piani π , π' nell'intorno di un punto O della Jacobiana di un piano (nel quale cessa di esistere la proiettività fra direzioni uscenti da punti corrispondenti O , O').

Nel lavoro citato ho supposto il punto O semplice per la Jacobiana di π, ed ho posto in evidenza l'esistenza di un E_1 (direzione) per O *stazionario*, cioè tale che all'intorno del 1° ordine di O secondo E_1 corrisponde sempre O' (a meno di infinitesimi del 2° ordine): agli E_2 tangenti all'E_1 stazionario corrispondono elementi cuspidali.

Questo E_1 stazionario è, in generale, distinto dalla tangente in O alla Jacobiana: in questo caso, a cui è dedicato il lavoro citato, non è possibile approssimare la trasformazione nell'intorno della coppia (O , O') con trasformazioni cremoniane e perciò mi sono servito di trasformazioni approssimanti razionali [1 , 2] con le quali ho potuto raggiungere una forma canonica per gli sviluppi della trasformazione (e quindi la determinazione degli invarianti).

In questa Nota esamino invece l'ipotesi opposta, di coincidenza dell'elemento stazionario con l'elemento della Jacobiana in O, dando per essa una forma canonica degli sviluppi.

2. – Sia O , O' una coppia a jacobiano nullo (alle direzioni per O' corrisponda una sola direzione per O, *stazionaria*).

Se la direzione stazionaria coincide con la tangente alla Jacobiana in O con la sola scelta intrinseca di $y = 0 , y' = 0$ le equazioni della corrispondenza sono del tipo

$$(2.1)\qquad \begin{cases} x' = ay + a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + \cdots \\ y' = \qquad\qquad 2b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{30}x^3 + \cdots \end{cases} \qquad a \neq 0 .$$

Ad un elemento tangente in O alla tangente stazionaria

$$y = \beta x^2 + \gamma x^3 + \cdots$$

corrisponde in π' l'elemento

$$x' = (a\beta + a_{20})x^2 + a(\gamma + 2a_{11}\beta + a_{30})x^3 + \cdots$$
$$y' = \qquad\qquad (2b_{11}\beta + b_{30})x^3 + \cdots$$

(1) Presentata nella seduta dell'11 gennaio 1947.

(2) E. Bompiani, *Corrispondenza puntuale fra piani proiettivi: esame delle Jacobiane.* «Memorie Acc. d'Italia», vol. XIV, n. 2, pp. 11–21 (1943).

generalmente cuspidale. Fa eccezione l'E_2 caratterizzato da

$$a\beta + a_{20} = 0$$

cioè

$$y = -\frac{a_{20}}{a} x^2 + \cdots \tag{2.2}$$

che diremo E_2^* *eccezionale* (è di flesso se e solo se $a_{20} = 0$).

Già questo E_2 fornisce un invariante della trasformazione pertinente all'intorno del 3° ordine. Si ha infatti per la Jacobiana

$$\begin{vmatrix} 2a_{20}x + 2a_{11}y + [2] & a + 2a_{11}x + 2a_{02}y + [2] \\ 2b_{11}y + 3b_{30}x^2 + [2] & 2b_{11}x + 2b_{02}y + [2] \end{vmatrix} = 0$$

quindi limitandosi ai termini del 2° ordine per la Jacobiana

$$2ab_{11}y + (3ab_{30} - 4a_{20}b_{11})x^2 + \cdots = 0$$

cioè

$$y = \frac{4a_{20}b_{11} - 3ab_{30}}{2ab_{11}} x^2 + \cdots \tag{2.3}$$

Questo E_2 jacobiano ha con l'E_2^* eccezionale un invariante di contatto

$$\frac{3ab_{30} - 4a_{20}b_{11}}{2a_{20}b_{11}}$$

ed è quindi invariante

$$\frac{ab_{30}}{a_{20}b_{11}} .$$

Ad un E_3 passante per l'elemento eccezionale, caratterizzato da γ, corrisponde un elemento la cui tangente è data da

$$(2b_{11}\beta + b_{30})x' = (a\gamma + 2a_{11}\beta + a_{30})y' \qquad \left(\beta = -\frac{a_{20}}{a}\right)$$

sicchè *si ha una proiettività fra quegli* E_3 *e le rette per* O'.

Un altro E_2 eccezionale si ha per

$$\beta = -\frac{b_{30}}{2b_{11}}$$

perchè il corrispondente elemento in π' ha $y' = 0$ per tangente quadripunta. L'invariante di contatto di questo E_2 eccezionale con il precedente è

$$\frac{ab_{30}}{2a_{20}b_{11}}$$

e quindi non differisce dal precedente. Ciò prova che i due E_2 eccezionali e l'E_2 jacobiano non possono darsi ad arbitrio: due di essi determinano il terzo.

3. – All'elemento di flesso in π' tangente in O' ad $y' = 0$ corrisponde un elemento nodato di tangenti $(2b_{11}x + b_{02}y)y = 0$: se $b_{11} \neq 0$ può prendersi la tangente nodale diversa da $y = 0$ come $x = 0$ e con ciò $b_{02} = 0$.

Ad un E_2 tangente in O ad $x = 0$, $x = \alpha y^2 + \cdots$, corrisponde in π' l'elemento di flesso

$$y' = \frac{2 b_{11} \alpha + b_{03}}{a^3} x'^3 + \cdots$$

Ne viene determinato un particolare E_2 per cui l'elemento corrispondente ha un flesso di specie superiore, quando

$$\alpha = - \frac{b_{03}}{2 b_{11}}$$

cioè l'E_2

$$x = - \frac{b_{03}}{2 b_{11}} y^2.$$

Risulta intanto da quanto precede che nel caso generale, relativamente all'ipotesi che c'interessa, sono $a \neq 0$, $a_{20} \neq 0$, $b_{11} \neq 0$, $b_{30} \neq 0$ e che se si riesce, con opportuna scelta di riferimenti, a fare $a = a_{20} = 2 b_{11} = 1$ il valore di b_{30} è un invariante.

4. – Cerchiamo anzitutto di approfondire come si possano scegliere i riferimenti (di cui sono fissate le sole rette $x = 0$, $y = 0$, $y' = 0$) nei due piani in modo da semplificare le equazioni della trasformazione fino ai termini del 2° ordine (senza supporre per questi alcuna speciale circostanza).

Risulta da una rapida esplorazione che, disponendo convenientemente dei riferimenti (lasciando fissi gli elementi specificati) può farsi sempre $a_{11} = a_{02} = 0$. Partiamo dunque da tale coppia di riferimenti che dia alle equazioni della trasformazione la forma

$$(4.1) \qquad \begin{cases} x' = ay + a_{20} x^2 + a_{30} x^3 + 3 a_{21} x^2 y + 3 a_{12} x y^2 + b_{03} y^3 + [4] \\ y' = \quad 2 b_{11} xy + b_{30} x^3 + 3 b_{21} x^2 y + 3 b_{12} x y^2 + b_{03} y^3 + [4] \end{cases}$$

e cerchiamo per quali cambiamenti, necessariamente del tipo

$$(4.2) \qquad x = \frac{m\bar{x}}{1 - \alpha\bar{x} - \beta\bar{y}} \quad , \quad y = \frac{n\bar{y}}{1 - \alpha\bar{x} - \beta\bar{y}}$$

$$(4.3) \qquad x' = \frac{p\bar{x}' + q\bar{y}'}{1 - \gamma\bar{x}' - \delta\bar{y}'} \quad , \quad y' = \frac{r\bar{y}'}{1 - \gamma\bar{x}' - \delta\bar{y}'}$$

la predetta particolarità non venga alterata. Basterà occuparsi per ora dei termini fino al 2° ordine.

Per essi

$$(4.4) \qquad \begin{cases} x = m\bar{x} + m\bar{x}(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) \\ y = n\bar{y} + n\bar{y}(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) \end{cases}$$

e

$$(4.5) \qquad \begin{cases} x' = p\bar{x}' + q\bar{y}' + (p\bar{x}' + q\bar{y}')(\gamma\bar{x}' + \delta\bar{y}') \\ y' = r\bar{y}' + r\bar{y}'(\gamma\bar{x}' + \delta\bar{y}') \end{cases}$$

Dall'ultima confrontata con la seconda delle (4.1) e utilizzando le (4.4) si ha

$$r\bar{y}' + r\bar{y}'(\gamma\bar{x}' + \delta\bar{y}') = 2b_{11}\,mn\,\bar{x}\bar{y} + [3]$$

e questa fino ai termini del 2° ordine equivale a

$$\bar{y}' = \frac{2b_{11}\,mn}{r}\bar{x}\bar{y} + [3]. \tag{4.6}$$

Analogamente procedendo sulla prima delle (4.5)

$$p\bar{x}' + q\bar{y}' + p\gamma\bar{x}'^2 = na\bar{y} + na\alpha\bar{x}\bar{y} + na\beta\bar{y}^2 + a_{20}m^2\bar{x}^2 + [3]$$

cioè

$$\bar{x}' = \frac{na}{p}\bar{y} + \frac{a_{20}m^2}{p}\bar{x}^2 + \frac{na\alpha}{p}\bar{x}\bar{y} + \frac{na\beta}{p}\bar{y}^2 - \\ - \frac{q}{p}\frac{2b_{11}\,mn}{r}\bar{x}\bar{y} - \gamma\left(\frac{na}{p}\right)^2\bar{y}^2 + [3]. \tag{4.7}$$

Affinchè questa mantenga la particolarità voluta dev'essere

$$a\alpha r = 2b_{11}\,qm$$
$$p\beta = an\gamma$$

e se inoltre vogliamo che i coefficienti di $\bar{y}$ e di $\bar{x}^2$ in $\bar{x}'$ e quello di $\bar{x}\bar{y}$ in $\bar{y}'$ siano uguali ad 1 dev'essere

$$an = p$$
$$a_{20}m^2 = p$$
$$2b_{11}\,mn = r.$$

Se dunque partiamo dalle equazioni della trasformazione per cui $a = a_{20} = 2b_{11} = 1$, $a_{11} = a_{02} = 0$, affinchè le (2) e (3) conservino questa forma occorre e basta che, scelto m ad arbitrio, si abbia

$$n = p = m^2,\ r = m^3 \quad , \quad q = \alpha m^2,\ \beta = \gamma.$$

Riassumendo:

Alle equazioni di una trasformazione puntuale in una coppia di punti (O, O') tali che O appartenga alla Jacobiana del suo piano e di più la tangente ad essa in O sia la tangente stazionaria può darsi in generale la forma

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} x' = y + x^2 + a_{30}x^3 + 3a_{21}x^2y + 3a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + [4] \\ y' = \quad xy + \quad \mathrm{I}x^3 + 3b_{21}x^2y + 3b_{12}xy^2 + b_{03}y^3 + [4] \end{cases}$$

ove I è un invariante.

Tale forma si conserva per tutti i cambiamenti di riferimento del tipo

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{m\bar{x}}{1 - \alpha\bar{x} - \beta\bar{y}} \\ y = \dfrac{m^2\bar{y}}{1 - \alpha\bar{x} - \beta\bar{y}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{m^2(\bar{x}' + \alpha\bar{y}')}{1 - \beta\bar{x}' - \delta\bar{y}'} \\ y' = \dfrac{m^3\bar{y}'}{1 - \beta\bar{x}' - \delta\bar{y}'} \end{cases}$$

ove m, α, β, δ sono arbitrari.

5. – Bisogna ora procedere in modo analogo per l'intorno del 3° ordine. Sviluppando le (II) si ha

$$(5.1)\qquad \begin{cases} x = m\bar{x} + m\bar{x}(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) + m\bar{x}(\alpha\bar{x} + \beta y)^2 + [4] \\ y = m^2\bar{y} + m^2\bar{y}(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) + m^2\bar{y}(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y})^2 + [4] \end{cases}$$

e

$$(5.2)\qquad \begin{cases} x' = m^2(\bar{x}' + \alpha\bar{y}') + m^2(\bar{x}' + \alpha\bar{y}')(\beta\bar{x}' + \delta\bar{y}') + m^2(\bar{x}' + \alpha\bar{y}')(\beta\bar{x}' + \delta\bar{y}')^2 + [4] \\ y' = m^3\bar{y}' + m^3\bar{y}'(\beta\bar{x}' + \delta\bar{y}') + m^3\bar{y}'(\beta\bar{x}' + \delta\bar{y}')^2 + [4] \end{cases}$$

Tenuto conto che fino all'intorno del 2° ordine la trasformazione è data da

$$\bar{x}' = \bar{y} + \bar{x}^2 + [3]$$
$$\bar{y}' = \bar{x}\bar{y} \qquad + [3]$$

si ha, fino ai termini del 3° ordine,

$$m^3\bar{y}' = m^3\bar{x}\bar{y} + 2m^3\bar{x}\bar{y}(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) + m^3 b_{30}\bar{x}^3 + 3m^4 b_{21}\bar{x}^2\bar{y} +$$
$$+ 3m^5 b_{12}\bar{x}\bar{y}^2 + m^6 b_{03}\bar{y}^3 - m^3\beta\bar{x}\bar{y}^2 + [4]$$

cioè

$$\bar{y}' = \bar{x}\bar{y} + b_{30}\bar{x}^3 + (3mb_{21} + 2\alpha)\bar{x}^2\bar{y} + (3m^2 b_{12} + \beta)\bar{x}\bar{y}^2 + m^3 b_{03}\bar{y}^3 + [4].$$

Questa equazione mostra che si possono sempre render nulli i coefficienti di $\bar{x}^2\bar{y}$ e di $\bar{x}\bar{y}^2$. Supposto di esser già partiti dalle (I) in cui $b_{21} = b_{12} = 0$ i cambiamenti di riferimento che conservano questo carattere sono quelli (II) per cui $\alpha = \beta = 0$.

In questa ipotesi le (5.1) e (5.2) dànno

$$m^2\bar{x}' = m^2\bar{y} + m^2\bar{x}^2 + m^3 a_{30}\bar{x}^3 + 3m^4 a_{21}\bar{x}^2\bar{y} + 3m^5 a_{12}\bar{x}\bar{y}^2 + m^6 a_{03}\bar{x}^3 -$$
$$- m^2\delta\bar{x}\bar{y}^2$$

e si vede che si può determinare δ in modo che sia nullo il coefficiente di $\bar{x}\bar{y}^2$. Supposto che già nelle (I) sia $a_{12} = 0$ per conservare questa particolarità dev'essere $\delta = 0$.

Si può poi determinare m in modo che risulti $ma_{30} = 1$ e perciò:

Nell'intorno di una coppia (O , O') *del tipo considerato le equazioni della trasformazione sono in generale riducibili alla forma canonica*

$$x' = y + x^2 + x^3 + 3a_{21}x^2y + a_{03}y^3 + [4]$$
$$y' = xy + Ix^3 + b_{03}y^3 + [4]$$

In essa tutti i coefficienti sono invarianti ed è univocamente determinato il riferimento in ogni piano.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Geometria. — *La « piccola variazione » di una curva algebrica reale connessa, con speciale riguardo al caso di Harnack.* Nota I di B. BIGI, presentata [1] dal Socio L. BERZOLARI.

L'applicazione dei metodi di « piccola variazione » allo studio delle curve algebriche reali può farsi risalire ad A. F. Möbius [2] ed a G. K. Clifford [3]; tali metodi furono poi variamente utilizzati da F. Klein, A. Harnack, D. Hilbert, L. S. Hulburt, V. Ragsdale, P. Field, K. Rohn, L. Brusotti, M. Piazzolla Beloch, G. Biggiogero, A. Wiman, C. Gigli, M. A. Farina, V. E. Galafassi, L. Torre, M. P. Gugliada . . . [4].

Interviene peraltro a presentare la « piccola variazione » di una curva riducibile (piana, spaziale o iperspaziale) nel suo aspetto più elevato una veduta di F. Severi, secondo la quale essa non è che la traduzione nel campo reale del passaggio da una curva algebrica connessa alla curva algebrica generica della famiglia di curve irriducibili cui la curva connessa viene attribuita [5] (considerazione questa che può estendersi anche a curve irriducibili dotate di singolarità).

Nel corso di Geometria superiore, tenuto presso l'Università di Pavia nell'anno 1943–44, il prof L. Brusotti ha avuto occasione di presentare sistematicamente sotto tale aspetto la « piccola variazione » di una curva algebrica reale dotata di punti doppî ordinarî, ed io nella mia dissertazione di laurea [6] mi sono in particolare occupata di quella di una curva algebrica

(1) Nella seduta del 14 dicembre 1946.

(2) A. F. MÖBIUS, *Ueber die Grundformen der Linien der dritter Ordnung.* (« Abh. K. Sachs. Gesellschaft der Wiss. », 1 (1851), pp. 1–81), oppure *Werke*, 2 (Leipzig 1886) pp. 89-176, fig. 3, 3);

(3) G. K. CLIFFORD, *Il senso comune nelle scienze esatte.* (Milano 1886), p. 110 (traduzione ital. anonima, ma dovuta a G. A. MAGGI).

(4) Per la bibliografia in proposito cfr. specialmente: L. BERZOLARI, *Allgemeine Theorie der höheren ebenen algebraischen Kurven*, in « Encycl. der math. Wiss. », III, 2, pp. 314–455, a pp. 387–392; K. ROHN und L. BERZOLARI, *Algebraische Raumkurven und abwickelbare Flächen*, ibid., pp. 1229–1436, a pp. 1344–47; e per i lavori più recenti L. BRUSOTTI, *Sul genere dei modelli algebrici di un sistema spaziale di k circuiti.* « Ann. Scuola Sup. di Pisa », (2), 1 (1932), pp. 61–77; *Sul numero dei circuiti delle curve algebriche reali di una quadrica reale*, « Rend. di Mat. e delle sue applic. » (5), 3 (1942), pp. 113–120. Si sono qui trascurati gli autori che si occupano esclusivamente di curve dei primi ordini; per essi cfr. specialmente A. ROSENBLATT, *Untersuchungen über die Gestalten der algebraischen Kurven sechster Ordnung.* (« Bull. Ac. Sc. Cracovia », 1910 (A), pp. 635–676).

(5) F. SEVERI, a) *Sulla classificazione delle curve algebriche e sul teorema d'esistenza di Riemann.* (« Rend. R. Acc. Lincei », (5), 24 (1915), pp. 877–888, 1011–1020), a pp. 1019–1020. b) *Nuovi contributi alla teoria dei sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica.* (« Rend. R. Acc. Lincei » (5) 25 (1916), pp. 459–471, 551–562, a p. 556.

(6) *Sulla « piccola variazione » di una curva algebrica reale connessa*, presentata all'Università di Pavia nell'anno 1944–45.

reale connessa a componenti (irriducibili) reali prive di singolarità e di mutui contatti.

In essa ho specialmente tenuto presente il caso che, in senso largo, può dirsi di Harnack [7], cioè il caso in cui la parte reale della trasformata per « piccola variazione » possegga il massimo numero ($= p + 1$) di circuiti compatibile col proprio genere p, ed ho stabilito in proposito condizioni necessarie e sufficienti. A tale questione è dedicato il presente lavoro.

1. In uno spazio S_r ad r dimensioni sia Σ un sistema di circuiti (unidimensionali, in numero finito e privi di singolarità), tale che per ciascuno dei punti di connessione non ne passino più di due.

Si dirà che Σ è *connesso* quando, assunti due qualunque dei suoi circuiti, sia sempre possibile estrarre dal sistema una successione di circuiti per cui gli assunti siano il primo e l'ultimo e due consecutivi ammettano punti di connessione. Si dirà invece che Σ *non* è *connesso* (o che è *sconnesso*) quando esso si componga di $g > 1$ sistemi connessi $\Sigma_i\ (i = 1, 2, \cdots, g)$ fra di loro privi di punti di connessione.

Se si applica al sistema Σ, composto di $g \geqq 1$ sistemi connessi Σ_i (per $g = 1$, Σ è connesso), un procedimento di «piccola variazione», un carattere di Σ, relativo al numero dei circuiti del trasformato, è la *ciclicità*: essa viene definita come *il massimo numero z di circuiti che da Σ si possano ottenere per « piccola variazione »* [8].

Supposto Σ formato da l circuiti, se ancora è $g\ (g \geqq 1)$ il numero dei sistemi connessi Σ_i componenti Σ, detto t il numero dei punti di connessione, è possibile dimostrare [9] che è

$$z \leqq -l + 2g. \tag{1}$$

Si dirà massimale un sistema Σ per il quale sia

$$z = t - l + 2g.$$

(7) Cfr. A. HARNACK, *Ueber die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven.* («Math. Ann.», *10* (1876), pp. 189–198), e F. KLEIN, *Ueber Riemmann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale*, Leipzig, 1882, oppure *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, 3, Berlin 1923, p. 274.

(8) Cfr. *Lemma* I *Lemma* II in L. BRUSOTTI, *Curve algebriche reali prossime a multilateri nello spazio* S_r (Succ. Fusi, Pavia, 1922), pp. 3–5, Lemmi ivi introdotti per i sistemi connessi ma che, con analoghe dimostrazioni, nel caso dei sistemi anche non connessi, si possono così enunciare:

Lemma I: *È sempre possibile applicare a Σ (composto di $g \geqq 1$ sistemi connessi) un procedimento di « piccola variazione » che lo riduca a g circuiti (privi di singolarità e di mutue intersezioni).*

Lemma II: *Se esistono procedimenti di « piccola variazione » spezzanti Σ in c circuiti, ed è $g \leq c' < c$, esistono pure procedimenti spezzanti Σ in c' circuiti.*

La conoscenza di z ci assicura che da Σ per « piccola variazione » si possono ottenere trasformati dotati di c' circuiti, quando sia $g \leq c' \leq z$.

(9) Le considerazioni che conducono alla (1), e che qui si omettono per brevità, possono raccostarsi a quelle svolte in L. BRUSOTTI (8), pp. 7–8.

Si dirà del pari massimale il procedimento di « piccola variazione » che, applicato ad un Σ *massimale, ne tragga un trasformato con* z *circuiti.*

2. Sia D una curva reale connessa formata di k componenti irriducibili reali e prive di singolarità, legate quindi fra di loro da punti di connessione (che qui si suppongono *doppî ordinarî per* D) reali o distribuiti in coppie di immaginario–coniugati. Precisamente, la curva D si componga di $h \geqq 1$ gruppi Γ_i ($i = 1, 2, \cdots, h$) di componenti irriducibili, ciascun Γ_i costituendo una curva algebrica connessa anche quando si trascurino gli eventuali punti di connessione distribuiti in coppie di immaginario–coniugati (nè essendo contenuto in analogo gruppo più ampio). Per essere D curva connessa, inoltre, ciascun Γ_i dovrà (per $h > 1$) appoggiarsi in coppie di punti immaginario–coniugati ad almeno un $\Gamma_j (j \neq i)$. Sia k_i il numero delle componenti il gruppo Γ_i, sia g_i quello dei sistemi connessi in cui si ripartiscono i circuiti delle corrispondenti parti reali.

Si potrà assimilare D ad un singramma [10] connesso (ed associargli così il carattere μ di questo), quando si convenga che ciascun vertice del singramma rappresenti un gruppo Γ_i, ciascuno spigolo una delle coppie di punti immaginario–coniugati che connettono i varî gruppi: ed infatti i gruppi Γ_i ed i loro mutui punti di connessione costituiscono due insiemi di elementi fra i quali intercorre la relazione che le coppie di punti di connessione intervengono fra due gruppi (ogni spigolo è incidente a due punti), mentre (se $h > 1$) ogni gruppo è così connesso ad almeno un altro gruppo (ogni punto è incidente almeno ad un segmento). In particolare si dirà che D ha *configurazione arborescente* (e quindi carattere $\mu = 0$) quando esso si possa (con le convenzioni dette) astrattamente assimilare ad un *albero*. Per $h = 1$ il singramma si riduce ad un solo vertice (e sarà inteso come albero degenere).

3. Tenute presenti le notazioni e convenzioni dei nn. 1 e 2, vogliamo dimostrare che: *condizione necessaria e sufficiente perchè da una curva algebrica reale* D *connessa costituita da* k *componenti irriducibili reali prive di punti multipli sia deducibile per « piccola variazione » una curva la cui parte reale abbia massimo numero di circuiti compatibile col genere è che*:

α) *le* k *componenti abbiano parti reali dotate del massimo numero di circuiti compatibile col rispettivo genere* [11].

β) I. *Per ciascun gruppo* Γ_i *siano tutti i punti di connessione reali e distribuiti su* l_i *circuiti, con*

$$l_i = k_i + g_i - 1 .$$

Tali l_i *circuiti costituiscano un sistema massimale* (num. 1).

(10) Denominazione introdotta in L. BRUSOTTI, *Premesse topologiche allo studio dei fasci reali di curve algebriche sopra una superficie algebrica reale* (in corso di stampa in « Annali di Matematica »), ed equivalente alla voce anglosassone e tedesca *Graph* (D. KÖNIG, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Leipzig 1936).

(11) Tale massimo è, per una curva algebrica reale di genere p, uguale a $p + 1$ (A. HARNACK (7)).

II. *La curva* D *sia inoltre suscettibile di configurazione arborescente* (n. 2);

γ) *la « piccola variazione » topologica sia quella massima le* (n. 1) *e sia traducibile in « piccola variazione » algebrica* [12].

Geometria. — *Punto flecnodale delle superficie.* Nota di A. Rollero, presentata [1] dal Socio E. Bompiani.

1. Il problema di determinare un riferimento proiettivo intrinseco nell'intorno di un punto O di una superficie è stato risolto nel caso di un generico punto [2] e nei casi di un punto di flesso o parabolico [3].

In quanto segue risolvo il problema analogo nel caso di un punto flecnodale (cioè con una tangente quadripunta) mettendo quindi in rilievo alcune proprietà geometriche inerenti all'intorno di un tale punto.

2. Fascio di quadriche invarianti. – Nell'intorno del 3° ordine del punto flecnodale O della superficie F valgono proprietà analoghe a quelle del punto ordinario. Precisamente, nel sistema ∞^3 delle quadriche aventi contatto del 2° ordine in O con la superficie, si trova un fascio di quadriche tali che il gruppo delle tangenti nel punto triplo alla curva d'intersezione è composto della tangente quadripunta contata tre volte.

(12) Data nello spazio S_r una curva algebrica reale D, dotata di punti doppi ordinari (nè di altre singolarità), è noto come ad ogni « piccola variazione » algebrica ad essa applicabile corrisponda una ben determinata « piccola variazione » topologica. Viceversa, si dimostra che per una curva algebrica reale D appartenente all' S_r ogni « piccola variazione » topologica è traducibile in una « piccola variazione » algebrica almeno in due casi, e cioè:

1°) quando la D giaccia in una famiglia di curve algebriche non speciali, come risulta applicando il ragionamento usato in L. Brusotti [8] pp. 5–6 per i multilateri non speciali.

2°) quando la D appartenga ad un sistema lineare ∞^R (di dimensione R abbastanza alta) su una superficie algebrica, in modo che il passaggio semplice di una generica curva C del sistema sulla superficie per i punti doppi della D apporti altrettante condizioni lineari indipendenti, come si ottiene estendendo il procedimento seguìto per il caso delle curve piane in L. Brusotti, *Sulla « piccola variazione » di una curva piana algebrica reale.* (« Rend. R. Acc. Lincei » (5), 30 (1921), pp. 375–379).

Se si verifica pertanto uno dei casi sopra detti, la seconda parte della condizione γ risulta superflua.

(1) Nella seduta del 14 dicembre 1946.

(2) V. E. Bompiani, *Costruzione di elementi superficiali a partire da elementi curvilinei.* « Rend. Acc. Lincei », vol. XXV, 1937, pp. 149–154; *Gli analoghi proiettivi dei teoremi di Meusnier e di Eulero.* « Rend. Sem. Matem. Univer. Roma » (4), vol. II, 1938, pp. 99–120; E. Bortolotti, *Quadriche di Moutard e fascio canonico.* « Rend. Acc. Lincei », vol. XXV, 1937, pp. 158–65; A. Rollero, *Sulla determinazione del riferimento per lo studio proiettivo–differenziale delle superficie.* « Rend. Acc. Lincei », 1946.

(3) V. I. Popa, *Contributo allo studio proiettivo–differenziale delle singolarità. Punto di flesso e punto parabolico delle superficie.* « Rend. Sem. matem. Univers. Roma » (4), 1938, fasc. 2)

Assunte la tangente asintotica quadripunta t_0 in O (o , o , o) come asse x e l'altra tripunta t come asse y , e l'asse z e la retta all'infinito del piano tangente come polari rispetto a detto fascio, la superficie nell'intorno di O è rappresentata da

$$z = axy + qy^3 + a_{40}\,x^4 + a_{31}\,x^3\,y + a_{22}\,x^2\,y^2 + a_{13}\,xy^3 + a_{04}\,y^4 + [5]$$

($a \neq 0$, $q \neq 0$) e il detto fascio di quadricle da

$$z = axy + \rho z^2 \qquad (\rho \text{ arbitrario}).$$

3. LA TANGENTE IN O ALLA LINEA FLECNODALE. – Un altro elemento geometrico relativo al punto O è la tangente in esso alla *linea flecnodale*.

Se si vuole che nel punto O'(δx , δy , O) prossimo ad O vi sia una tangente 4–punta bisogna che

$$4\,a_{40}\,\delta x + a_{31}\,\delta y = 0$$

(come si vede per esempio scrivendo l'equazione delle tangenti asintotiche in O' ed imponendo che vi sia una tangente 4–punta); cioè la tangente alla linea flecnodale per O è

$$z = 0 \quad , \quad 4\,a_{40}\,x + a_{31}\,y = 0 .$$

In generale questa tangente sarà diversa dalle tangenti asintotiche in O , quindi $a_{40} \neq 0$, $a_{31} \neq 0$.

4. CUBICHE NODATE INVARIANTI. – Il ramo di sezione piana tangente in O non di flesso è rappresentato da

$$x = -\frac{q}{a}\,y^2 - \frac{a_{04}}{a}\,y^3 + [4].$$

Vi sono ∞^2 cubiche nodate in O contenenti l'E_3 di questo ramo e tangenti alla tangente 4–punta. Le loro rette dei flessi formano fascio intorno ad un punto (O , q , O , a_{04}) della tangente al ramo considerato.

Preso questo punto come punto all'infinito su quella tangente si ha $a_{04} = 0$.

Ne risulta anche determinato il piano $x = 0$ tangente nel punto ora determinato a tutte le quadriche del fascio considerato.

5. IL RIFERIMENTO INVARIANTE. – Con le semplificazioni apportate dalle determinazioni già fatte si ha per la superficie lo sviluppo:

$$z = axy + qy^3 + a_{40}\,x^4 + a_{31}\,x^3\,y + a_{22}\,x^2\,y^2 + a_{13}\,xy^3 + [5] .$$

Poichè rimangono da determinare l'asse z nel piano $x = 0$ e il piano improprio, passante per la polare dell'asse z nella polarità rispetto al fascio

di quadriche considerato, poniamo $Y = y - hz$, $T = 1 - hax - kz$, con h e k arbitrari.

Cerchiamo ora le F^3 aventi un punto doppio biplanare nel punto $x = Y = T = 0$ e i piani ivi tangenti separanti armonicamente i piani $x = 0$ e $T = 0$ $(T^2 - \lambda^2 x^2 = 0)$ e contenenti inoltre la calotta del 3° ordine di F di centro O.

Una F^3 soddisfacente alle prime condizioni è del tipo

$$(T^2 - \lambda^2 x^2)\, z = [x^3, x^2 Y, xY^2, Y^3, x^2 T, xYT, Y^2 T]$$

ove [ ] indica una combinazione lineare omogenea dei termini in essa contenuti. Per la coincidenza fino al 3° ordine di O degli sviluppi di F^3 e di F mancano a 2° membro i termini in $x^3, x^2 T, Y^2 T, x^2 Y, xY^2$ e potrà scriversi

$$T^2 z = axYT + qY^3 + \lambda^2 x^2 z .$$

Determiniamo ora quelle F^3 che tagliano F in O in una curva le cui quattro tangenti coincidono in $x = 0$ (tangente asintotica non quadripunta).

Bisogna determinare h, k, λ^2, in modo che si abbia la coincidenza voluta. Eseguendo effettivamente il calcolo si trova

$$a_{13} = -2haq \quad , \quad a_{22} = a^2 k \quad , \quad a\lambda^2 = a_{31} .$$

Esiste una sola F^3 *soddisfacente alle condizioni imposte.*

Preso il suo punto biplanare come punto improprio sull'asse z $(h = k = 0)$ si ha $a_{13} = a_{22} = 0$, e per la F^3

$$z = axy + qy^3 + \frac{a_{31}}{a} x^2 z .$$

Infine il punto unità può prendersi in $z = 0$ sulla tangente in O alla linea flecnodale $(a_{31} = -4 a_{40})$, in quel punto $(\neq O)$ ove detta retta interseca la conica ulteriore sezione (oltre ad $y = z = 0$) di F^3 con $z = 0$ $(q = -a)$; ed il punto-unità dello spazio sulla quadrica invariante $z = axy$ $(a = 1)$.

Rimane così determinato lo sviluppo canonico

$$z = xy - y^3 + I(x - 4y) x^3 + [5]$$

ove $I (= a_{40})$ *è l'unico invariante del 4° ordine.*

La F^3 con punto biplanare approssimante è

$$z = xy - y^3 - 4 I x^2 z .$$

Il significato geometrico di I è dato ovviamente dai birapporti che determinano i due piani tangenti nel punto biplanare di F^3.

6. Osservazioni varie. – Mantenendoci nel caso di O flecnodale generico, cioè $I \neq 0$, è facile constatare che, come già per un punto generico delle

superficie [4], esistono ∞^3 quadriche *non degeneri* a contatto del 3° ordine in O con entrambi i rami di linee asintotiche di F uscenti da O: mentre però fra dette ∞^3 quadriche ne esistono ∞^2 a contatto del 4° ordine con l'asintotica che *non* ha flesso in O, non ne esiste alcuna a contatto del 4° ordine con l'altra.

Ancora: mentre per un punto generico di F esistono ∞^4 superficie cubiche a contatto del 4° ordine con F in quel punto [5], se O è un punto flecnodale generico di F *non* esiste alcuna superficie del 3° ordine a contatto del 4° ordine con F in O (mentre ve ne sono per $I = 0$).

Infine fra le ∞^3 quadriche a contatto del 2° ordine con F in O ne esistono ∞^2 che incontrano F secondo una linea avente in O un punto triplo delle cui tangenti in O una è t_0 e le altre due distinte da t_0 e da t, coincidono con una retta t' di π [6] passante per O; anzi, in corrispondenza di ogni retta t' di π passante per O (distinta da t_0 e da t) possono trovarsi ∞^1 quadriche per ciascuna delle quali la linea di intersezione con F presenta in O un punto triplo delle cui tangenti in O due coincidono con t' e la terza con t_0. Data una generica delle ∞^1 quadriche testè esaminate, sia C la linea sua intersezione con F: in generale la linea proiezione di C su π da un generico punto dello spazio presenta in O un ramo lineare (con tangente t_0) ed un ramo del 2° ordine e di 1ª classe (con tangente t'). Sia γ quel ramo (del 2° ordine) di C che risulta tangente in O a t', e lo si proietti da un generico punto Ω dello spazio sopra un piano generico: la proiezione γ' di γ su detto piano presenta in O' (proiezione di O) un ramo del 2° ordine e di 1ª classe; se Ω sta su π, γ' presenta, in generale (si escluda Ω appartenente a t'), in O' un ramo del 2° ordine e di 2ª classe il quale può sostituirsi, in generale, mediante un ramo del 1° ordine (contato 2 volte) fino all'intorno del 2° ordine di O' (su questo ramo lineare vengono a trovarsi 2 punti doppi successivi di γ'). Se invece Ω sta sulla coniugata armonica di t' rispetto a t, t_0 allora γ' presenta in O' un ramo del 2° ordine e di 2ª classe il quale può sostituirsi mediante un ramo lineare fino all'intorno del 3° ordine di O' (su questo ramo lineare vengono a trovarsi ora 3 punti doppi successivi di γ').

(4) V. E. BOMPIANI, *Determinazioni proiettivo-differenziali relative ad una superficie dello spazio ordinario.* « Atti Acc. Scienze di Torino », vol. LIX, 1924; E. BOMPIANI, *Invarianti di intersezione di due curve sghembe.* « Rend. Acc. Lincei », vol. XIV (6), 1931.

(5) V. E. BOMPIANI, *Gli analoghi proiettivi dei teoremi di Meusnier e di Eulero*, nota citata.

(6) Indichiamo con π il piano tangente ad F in O.

Matematica. – *Su alcune totalità di archi di traslazione di un autoomeomorfismo piano, conservante il senso delle rotazioni e privo di punti uniti.* Nota di G. Scorza Dragoni, presentata [1] dal Corrisp. R. Caccioppoli.

In questa Nota mi propongo di riassumere i risultati ultimi di una mia ricerca, iniziata nella Memoria *Sugli archi di traslazione di un autoomeomorfismo piano e sulle loro curve di accumulazione* [2], proseguita nella Nota *Estensione alle quasi-traiettorie di un teorema di Brouwer sulle traiettorie di un autoomeomorfismo piano* [3], conclusa nella Memoria *Alcuni teoremi sulle traslazioni piane generalizzate* [4].

1. Lo spazio ambiente sia un piano reale, euclideo π.

Sia t una traslazione piana generalizzata, cioè una trasformazione topologica di π in (tutto) se stesso, la quale mantenga il senso delle rotazioni e sia priva di punti uniti.

Se λ è un arco di traslazione (di t), cioè se λ è una curva semplice e aperta che ha come estremi un punto P e l'immagine, $t(P)$, di questo nella t e che ha comune con la propria immagine, $t(\lambda)$, soltanto il punto $t(P)$, indicheremo con

$$\sigma(\lambda) = \cdots t^{-1}(\lambda) + \lambda + t(\lambda) + \cdots$$

la traiettoria generata da λ e dalle sue immagini nelle successive potenze della t.

Una traiettoria si presenta di per sè come immagine continua di una retta. Ma è noto che una traiettoria è immagine biunivoca e bicontinua di una retta.

I punti del piano, che non appartengono a $\sigma(\lambda)$ e che si possono congiungere con un punto di $\sigma(\lambda)$ (prefissabile ad arbitrio) mediante una curva semplice e aperta che abbia soltanto un punto, anzi soltanto un estremo, su $\sigma(\lambda)$,

(1) Nella seduta dell'11 gennaio 1947.

(2) «Memorie della R. Accademia d'Italia», Classe di scienze fis., mat. e nat., vol. IX (1937), pp. 1–75.

(3) «Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei», Classe di scienze fis., mat. e nat., serie 8ª, vol. I (1946), pp. 156–161.

(4) In corso di stampa negli «Annali dell'Università di Trieste».

La Nota presente è una riproduzione presso che letterale della prefazione di questa ultima Memoria. Alla quale rimando per tutte le indicazioni bibliografiche.

Mi sia infine permessa una lieve rettifica nella dimostrazione riassunta a pie' di p. 87 della mia Memoria *A proposito di alcuni teoremi sulle equazioni differenziali ordinarie.* [«Rendiconti del Seminario matematico dell'Università di Padova», vol. XV (1946), pp. 60–131]. Ivi, in luogo di: «La frontiera di E′ individua ...», si legga: «L'insieme chiuso, somma della frontiera di E′ e dei segmenti contenuti nei lati di R_2 ed aventi entrambi gli estremi su E′, individua ...».

si distribuiscono in due insiemi aperti e connessi: i campi adiacenti a $\sigma(\lambda)$. Tutti questi risultati risalgono a Brouwer.

2. Si supponga fissato un verso positivo per le rotazioni di π.

Sia $\lambda = P\,t(P)$ un arco di traslazione, che sia anche un segmento; brevemente, sia $\lambda = P\,t(P)$ un segmento di traslazione di estremi P e $t(P)$.

Si assuma come positivo su λ il verso che da P porta a $t(P)$. In conformità di ciò e del verso positivo di π, si distinguano in positivo, uno, e in negativo, l'altro, i due campi adiacenti a $\sigma(\lambda)$.

Dopo di che definiamo un segmento di traslazione δ come un *segmento caratteristico positivo* di λ, se esiste un segmento $\tau = RS$ il quale goda delle seguenti proprietà:

sia uno pseudoarco di traslazione di prima specie di origine R – cioè soddisfaccia alle $\tau \cdot t(R) = 0$, $\tau \cdot t^{-1}(R) = 0$ e ad una (ed una sola) delle $\tau \cdot t(\tau) = S$, $\tau \cdot t(\tau) = t(S)$ —;

contenga δ — di guisa che δ è l'unico segmento di traslazione appartenente a τ ed ha un estremo in S e l'altro in un punto interno a τ —;

abbia per origine R un punto interno a λ;

appartenga, una volta privato dell'origine, al campo positivo adiacente a $\sigma(\lambda)$.

In guisa perfettamente analoga si definiscono i *segmenti caratteristici negativi* di λ.

Invece una retta h è una *retta caratteristica positiva* di λ, se h contiene una (ed una sola) semiretta r che goda delle seguenti proprietà:

r e $t(r)$ sono prive di punti comuni;

l'origine R di r è interna a λ;

r — R appartiene al campo positivo adiacente a $\sigma(\lambda)$.

In maniera analoga si definiscono le *rette caratteristiche negative* di λ.

È noto che un segmento di traslazione λ ammette sempre almeno un segmento caratteristico positivo o almeno una retta caratteristica positiva; analogamente nei riguardi dei segmenti caratteristici negativi e delle rette caratteristiche negative.

Fra gli enti caratteristici positivi di λ ve ne è sempre almeno uno normale a λ (anzi ve ne è sempre almeno uno parallelo a una direzione diversa da quella di λ e prefissata ad arbitrio); analogamente nei riguardi degli enti caratteristici negativi. Tutti questi ultimi risultati risalgono a v. Kerékjártó.

3. Introduciamo un'altra definizione, per poter raggiungere una certa rapidità espositiva.

Data una totalità w di segmenti di traslazione, una decomposizione di w in un numero *finito* di classi

$$w_1, \cdots, w_n$$

è una *decomposizione regolare*, se

$w_1, \cdots, w_n$ sono a due a due prive di elementi comuni;

se

esiste (almeno) un segmento s_i o (almeno) una retta r_i che sia un segmento caratteristico positivo o una retta caratteristica positiva per tutti gli elementi di w_i $(i = 1, \cdots, n)$;

e se

una circostanza analoga si presenta nei riguardi degli enti caratteristici negativi.

Per esempio, a norma di un mio risultato:

La totalità dei segmenti di traslazione contenuti in un segmento prefissato è suscettibile di una decomposizione regolare.

4. Nella prima delle mie Memorie citate, io ho posto appunto la quistione seguente: è possibile decomporre in modo regolare la totalità dei segmenti di traslazione contenuti in un rettangolo e paralleli ad una direzione fissa?

E nell'ultima delle mie Memorie citate, io dò una risposta affermativa a quella domanda. Anzi dimostro che:

Si può decomporre in modo regolare la totalità di tutti i segmenti di traslazione contenuti in un rettangolo prefissato.

Ne segue facilmente che ogni insieme V di segmenti di traslazione può essere decomposto in modo regolare, se i suoi elementi appartengono tutti ad uno stesso rettangolo.

Che se poi gli elementi di V sono tutti paralleli ad una direzione fissa, allora si può dare una decomposizione regolare di V, nelle classi

$$V_1, \cdots, V_m,$$

in modo che tutti gli elementi di V_j $(j = 1, \cdots, m)$ abbiano comune uno stesso ente caratteristico positivo e uno stesso ente caratteristico negativo, entrambi aventi per direzione la direzione normale a quella comune a tutti gli elementi di V.

5. La mia dimostrazione circa l'esistenza di decomposizioni regolari per la totalità $w(s)$ dei segmenti di traslazione contenuti in un segmento prefissato s, ed alla quale si è alluso alla fine del n. 3, si basa su tre dati essenziali:

α) la chiusura di $w(s)$;

β) un teorema di Brouwer sulle traiettorie di una traslazione piana generalizzata;

γ) i teoremi di v. Kerékjártó, ricordati alla fine del n. 2;

Orbene, la totalità $w(\Gamma)$ dei segmenti di traslazione contenuti in un rettangolo Γ non è chiusa. Sicchè per il nostro scopo occorrono:

α') uno studio sulla natura degli elementi d'accumulazione di $w(\Gamma)$;

β') l'estensione del teorema di Brouwer a questi elementi di accumulazione;

γ') l'analoga estensione dei risultati di v. Kerékjártó.

La questione α') è risoluta completamente nel primo dei miei lavori citati.

La β') riceve una soluzione parziale nel secondo dei miei lavori citati. Altri contributi in questo senso, completamente sufficienti allo scopo, sono forniti nel terzo dei miei lavori citati.

Nel quale riceve una risposta anche la quistione γ'); e quindi anche quella della decomponibilità di $w(\Gamma)$ in modo regolare.

In tal modo rimane confermata una presunzione che avevo avanzata altrove [5].

6. I risultati contenuti in una mia Memoria recente [6], mostrano che è opportuno considerare anche archi di traslazione costituiti da una spezzata di due lati ortogonali fra loro.

Sia $\lambda^* = PQ \dot{+} Qt(P)$ un simile arco. Allora uno dei due campi adiacenti a $\sigma(\lambda)$ contiene i punti interni all'angolo retto $\overline{PQ}\hat{t}(\overline{P})$ e abbastanza vicini a Q. Questo campo venga detto di *prima categoria*. Dopo di ciò è chiaro che cosa si debba intendere per segmento *caratteristico di prima categoria* rispetto a λ^*, o per retta *caratteristica di prima categoria* rispetto a λ^*.

Consideriamo ora un insieme w^* di archi di traslazione quali λ^*. Una decomposizione di w^* in un numero *finito* di classi,

$$w_1^*, \cdots, w_n^*,$$

prive a due a due di elementi comuni, si dirà *semiregolare*, se esiste (almeno) un segmento s_i^*, o (almeno) una retta r_i^*, che sia un segmento caratteristico di prima categoria, oppure una retta caratteristica di prima categoria per tutti gli elementi di w_i^* $(i = 1, \cdots, n)$.

Ebbene nel terzo dei miei lavori citati io dimostro, fra l'altro, che:

Una totalità quale la w^* è suscettibile di una decomposizione semiregolare, se i suoi elementi sono contenuti in uno stesso rettangolo;

e se

le due direzioni individuate dai due lati dei suoi elementi non dipendono dall'elemento che si considera.

Anzi, in queste ipotesi, è sempre lecito supporre che i segmenti quali gli s_i^* e le rette quali le r_i^* [7] *siano sempre paralleli a una (eventualmente variabile con i) di quelle due direzioni.*

(5) G. Scorza Dragoni, *Ueber die fixpunktfreien Abbildungen der Ebene* [«Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hansischen Universität», vol. 14 (1941), pp. 1–21] p. 21.

(6) G. Scorza Dragoni, *Un teorema fondamentale sulle traslazioni piane generalizzate e sua maggiore determinazione* [in corso di stampa nei «Rendiconti del Seminario matematico dell'Università di Padova»].

(7) Beninteso, si tratta di quei segmenti e di quelle rette che esistono.

Geometria. — *Sul contatto di due rigate lungo una comune generatrice.* Nota di A. ROLLERO, presentata[1] dal Socio E. BOMPIANI.

1. Scopo del presente lavoro è di dimostrare i teoremi seguenti:

Siano R , R′ *due rigate non sviluppabili e sia g una loro comune generatrice, non singolare per alcuna di esse; allora:*

α) *se* R , R′ *hanno in tre punti distinti di g contatto di ordine* $s > 1$, *esse hanno contatto di ordine s in tutti i punti di g*;

β) *se* R , R′ *hanno in due punti distinti di g contatti rispettivamente degli ordini s ed* $s - 1$ $(s \geqq 2)$, *esse hanno contatto d'ordine* $s - 1$ *in ogni punto di g*;

γ) *se* R , R′ *hanno in un punto di g contatto d'ordine* $s \geqq 3$, *esse hanno contatto di ordine* $s - 2$ *in ogni punto di g*;

δ) *se* R , R′ *hanno in tutti i punti di g contatto d'ordine* $s - 1$ [2] $(s \geqq 2)$, *esistono due punti, distinti o eventualmente coincidenti di g , in cui esse hanno contatto d'ordine s .*

I teoremi α) , δ) appaiono come naturali generalizzazioni di ben note conseguenze del teorema di Chasles (relativo alle rigate), mentre i teoremi β) , γ) possono considerarsi come casi limiti del teorema α).

Le difficoltà che si presentano nel presente studio, oltre che nella necessità di usare equazioni parametriche per la rappresentazione delle rigate, hanno sede nel fatto che, mentre l'intorno del 1° ordine (su una rigata R) di un punto P variabile lungo una generatrice g di R è ben definito, per ogni posizione di P, da un ente geometrico (piano tangente, proiettività di Chasles), altrettanto non può dirsi, al variare di P su g , per l'intorno di P (su R) di ordine > 1. Si può giungere a quanto ci si è prefissi con il procedimento che segue.

2. Sia g una generatrice *non* singolare di una rigata R non sviluppabile: R , nell'intorno di g q, può individuarsi mediante due sue sezioni piane distinte C_1 , C_2 [3], fra i cui punti sia assegnata una corrispondenza biunivoca (un punto di C_1 ed uno di C_2 saranno omologhi in questa corrispondenza qualora siano staccati su C_1 , C_2 da una stessa generatrice di R). Fissiamo il riferimento in modo che il punto fondamentale A_4 del tetraedro coincida col punto di g appartenente a C_1 ed il punto fondamentale A_3 col punto di g da cui esce C_2 .

Poichè g non è singolare le tangenti a C_1 , C_2 nei punti A_4 , A_3 di g sono sghembe: si può scegliere allora, ad esempio, come punto fondamen-

(1) Nella seduta dell'11 gennaio 1947.

(2) Si esclude, naturalmente, che R , R′ abbiano in ogni punto di g contatto d'ordine $> s - 1$.

(3) Fatte con piani non passanti per g.

tale A_1 il punto di intersezione della tangente a C_1 in A_4 col piano di C_2 e come punto A_2 l'intersezione della tangente a C_2 in A_3 col piano di C_1.

Ciò posto, dette x, y, z, t le coordinate omogenee di punto, C_1 si rappresenta con equazioni parametriche:

$$(1) \qquad x = u \quad , \quad y = \sum_{i \geq 2} a_i u^i \quad , \quad z = 0 \quad , \quad t = 1$$

mentre per C_2 si hanno le equazioni:

$$(2) \qquad x = \sum_{i \geq 2} b_i u^i \quad , \quad y = \sum_{i \geq 1} c_i u^i \quad , \quad z = 1 \quad , \quad t = 0 .$$

ove le a, b, c sono costanti ed è $c_1 \neq 0$; la corrispondenza fra i punti di C_1 e di C_2, di cui s'è detto, è fissata dall'eguaglianza dei valori di u in punti corrispondenti.

Dalle (1), (2) segue che le equazioni parametriche di R sono:

$$(3) \quad x = \lambda u + \mu \sum_{i \geq 2} b_i u^i \quad , \quad y = \lambda \sum_{i \geq 2} a_i u^i + \mu \sum_{i \geq 1} c_i u^i \quad , \quad z = \mu \quad , \quad t = \lambda .$$

Volendo rappresentare l'intorno d'ordine s di A_4 ($\lambda = 1$, $\mu = 0$, $u = 0$) si dovrà scrivere uno sviluppo di y in funzione di x, z arrestato ai termini di grado s (inclusi) in x, z: per ottenere ciò, considerate le 2 equazioni:

$$(4) \qquad x = u + z \sum_{i \geq 2} b_i u^i$$

$$(5) \qquad y = \sum_{i \geq 2} a_i u^i + z \sum_{i \geq 1} c_i u^i$$

occorrerà ricavare u dalla (4):

$$(6) \qquad u = x - b_2 x^2 z - b_3 x^3 z + \cdots$$

e sostituire ad u, nel 2° membro della (5), il 2° membro della (6). Si osservi che, per quanto si richiede, è sufficiente arrestare lo sviluppo (6) ai termini di grado $s - 1$; ciò facendo a 2° membro della (6) compariranno $b_2 . b_3 , \cdots , b_{s-2}$. Si noti anzi che il 2° membro della (6), arrestato come s'è detto ai termini di grado $s - 1$ inclusi, contiene un termine in x, mentre tutti gli altri termini hanno come fattore la z; il termine di grado massimo in x che ivi compare è $- b_{s-2} x^{s-2} z$. Sostituendo ora il 2° membro della (6) nel 2° membro della (5) si ottiene lo sviluppo, arrestato ai termini di grado s (inclusi) in x, z, che rappresenta l'intorno di ordine s di A_4 su R; sviluppo nel quale compaiono pertanto i coefficienti:

$$(7) \qquad a_2 , \cdots a_s \quad ; \quad c_1 , \cdots c_{s-1} \quad ; \quad b_2 , \cdots b_{s-2} .$$

Sicchè l'intorno di ordine s di A_4 su R è individuato dai coefficienti (7). Proponiamoci di far vedere adesso, viceversa, come tale intorno individui i coefficienti (7). Può constatarsi agevolmente che ciò vale, ad esempio per $s = 2, 3, 4$; supponiamo che questa proprietà valga per $s = k - 1$ e dimostriamola per $s = k$: dopo aver fatto ciò, in base al principio di induzione, potremo ritenerla vera per s qualsiasi. Si parta dunque

dall'ipotesi che l'intorno d'ordine $k-1$ di A_4 su R individui i coefficienti $a_2, \cdots a_{k-1}$; $c_1, \cdots c_{k-2}$; $b_2, \cdots b_{k-3}$ e si esaminino, nello sviluppo di y in funzione di x, z ottenuto dalle (4), (5) eliminando u, i coefficienti dei termini in $x^k, x^{k-2}z^2, x^{k-1}z$. Mentre il coefficiente di x^k è a_k, nel coefficiente di $x^{k-2}z^2$, oltre a coefficienti già determinati, compare linearmente b_{k-2} (moltiplicato per c_1, che è già precedentemente determinato) e non vi compare c_{k-1}; infine nel coefficiente di $x^{k-1}z$ compare linearmente c_{k-1} (oltre ad altri coefficienti determinati). Queste considerazioni sono sufficienti per affermare che l'intorno d'ordine k di A_4 su R, supposti determinati $a_2, \cdots a_{k-1}$; $c_1, \cdots c_{k-2}$; $b_2, \cdots b_{k-3}$, individua a_k, c_{k-1}, b_{k-2}: e pertanto, per quanto s'è detto, l'intorno di ordine s (con s qualsiasi ≥ 2) di A_4 su R individua i coefficienti (7).

Volendo ora rappresentare l'intorno d'ordine s di A_3 ($\lambda = 0, \mu = 1, u = 0$) si avranno da considerare le equazioni:

$$x = ut + \sum_{i \geq 2} b_i u^i \tag{8}$$

$$y = t \sum_{i \geq 2} a_i u^i + \sum_{i \geq 1} c_i u^i . \tag{9}$$

Ricavando u dalla (9) e sostituendo lo sviluppo ottenuto nel 2° membro della (8) si ottiene uno sviluppo che, arrestato ai termini di grado s (inclusi) in y, t rappresenta l'intorno d'ordine s di A_3 su R: in base a queste considerazioni non è difficile constatare che detto intorno è individuato da:

$$a_2, \cdots a_{s-2} \; ; \; c_1, \cdots c_{s-1} \; ; \; b_2, \cdots b_{s-2}, b_{s-1}, b_s \tag{10}$$

e che esso, supposti determinati $a_2, \cdots a_{s-2}$; $c_1, \cdots c_{s-1}$; $b_2, \cdots b_{s-2}$ [4], individua b_{s-1} e b_s.

Infine, volendo studiare l'intorno di ordine s (su R) di un generico punto A ($\lambda = 1, \mu = \mu_0 \neq 0, u = 0$) di g bisognerà considerare le equazioni:

$$x = (z - \mu_0) \sum_{i \geq 2} b_i u^i + u + \mu_0 \sum_{i \geq 2} b_i u^i \tag{11}$$

$$y = (z - \mu_0) \sum_{i \geq 1} c_i u^i + \sum_{i \geq 2} a_i u^i + \mu_0 \sum_{i \geq 1} c_i u^i \tag{12}$$

Ricavando u dalla (11) e sostituendo nella (12) si ottiene uno sviluppo di y in funzione di $x, (z - \mu_0)$ che, arrestato ai termini in $x, (z - \mu_0)$ di grado s inclusi, rappresenta appunto l'intorno d'ordine s di A su R: da ciò, come può verificarsi, segue che detto intorno è individuato da:

$$a_2, \cdots a_s \; ; \; c_1, \cdots c_s \; ; \; b_2, \cdots b_s \tag{13}$$

e viceversa, supposti determinati $a_2, \cdots a_s$; $c_1, \cdots c_{s-1}$; $b_2 \cdots b_s$ [5], detto intorno individua c_s. Notiamo esplicitamente che *i coefficienti* (13) *definiscono l'intorno d'ordine s lungo g*.

(4) Dall'intorno d'ordine s di A_4 su R.

(5) Dagli intorni d'ordine s su R di A_4 e di A_3.

3. In base alle osservazioni del n. 2 è quasi immediata la dimostrazione dei teoremi enunciati al n. 1; il teorema α), poi, riesce senz'altro evidente qualora si riferiscano R , R′ ad uno stesso tetraedro (costruito nel modo indicato per R al n. 2) per il quale i vertici A_3 , A_4 coincidano con due di quei tre punti di g in cui R , R′ hanno, per ipotesi, contatto d'ordine s.

Dimostriamo ora il teorema γ). Non è difficile intanto stabilirlo direttamente per $s = 3$. Fatto ciò, e supposto $s > 3$, assunto come punto fondamentale A_4 quel punto di g in cui R , R′ hanno contatto di ordine s, si riferisca pure R′ al tetraedro usato per R nel precedente n. 2. Poichè in A_3 (essendosi dimostrato il teorema per $s = 3$), come in ogni altro punto di g, R ed R′ si toccano, avremo per R′ la rappresentazione parametrica:

$$(14)\quad x = \lambda u + \mu \sum_{i \geq 2} \bar{b}_i u^i \quad , \quad y = \lambda \sum_{i \geq 2} \bar{a}_i u^i + \mu \sum_{i \geq 1} \bar{c}_i u^i \quad , \quad z = \mu , t = \lambda .$$

Tenendo presente che l'intorno d'ordine s di A_4 su R (e quindi anche su R′) è definito da $a_2 , \cdots a_s$; $c_1 , \cdots c_{s-1}$; $b_2 , \cdots b_{s-2}$, segue:

$$(15)\quad a_2 = \bar{a}_2 , \cdots a_s = \bar{a}_s \ ; \ c_1 = \bar{c}_1 , \cdots c_{s-1} = \bar{c}_{s-1} \ ; \ b_2 = \bar{b}_2 , \cdots b_{s-2} = \bar{b}_{s-2} .$$

Infine dal fatto che l'intorno d'ordine $s - 2$ di R lungo g è definito da $a_2 , \cdots a_{s-2}$; $c_1 , \cdots c_{s-2}$; $b_2 , \cdots b_{s-2}$, scende il teorema.

Veniamo al teorema β). Riferiremo tanto R quanto R′ ad uno stesso tetraedro, nel modo solito, assumendo come punti fondamentali A_4 ed A_3 quei punti di g in cui R , R′ hanno per ipotesi contatti rispettivamente d'ordine s ed $s - 1$. R′ sarà ancora rappresentata dalle (14), in cui varranno le (15), giacchè R , R′ hanno in A_4 contatto d'ordine s.

Tenendo presente inoltre che l'intorno d'ordine $s - 1$ di A_3 su R (e quindi su R′) è definito da $a_2 , \cdots a_{s-3}$; $c_1 , \cdots c_{s-2}$; $b_2 , \cdots b_{s-1}$, segue $b_{s-1} = \bar{b}_{s-1}$ e da ciò scende il teorema.

Per quanto riguarda il teorema δ) non è difficile constatare che, rappresentate R ed R′, riferite allo stesso tetraedro, rispettivamente mediante le equazioni (3) e (14) nelle quali sia:

$$a_2 = \bar{a}_2 , \cdots a_{s-1} = \bar{a}_{s-1} \ ; \ c_1 = \bar{c}_1 , \cdots c_{s-1} = \bar{c}_{s-1} \ ; \ b_2 = \bar{b}_2 , \cdots b_{s-1} = \bar{b}_{s-1}$$

la condizione affinchè nel punto A ($\lambda = 1$, $\mu = \mu_0$, $u = 0$) di g esse abbiano contatto d'ordine s, in base alle (11), (12) si scrive:

$$(16)\qquad c_1 \mu_0^2 (\bar{b}_s - b_s) + \mu_0 (c_s - \bar{c}_s) + a_s - \bar{a}_s = 0$$

Dalla (16), che non può essere un'identità poichè in ogni punto di g R , R′ hanno contatto d'ordine $s - 1$ e non d'ordine $> s - 1$, segue il teorema.

Meccanica. — *Problemi dinamici della trave in regime ereditario.* Nota I di E. VOLTERRA, presentata [1] dal Socio A. SIGNORINI.

1. PREMESSE GENERALI. – Lo studio delle vibrazioni di flessione di una trave, allorchè si tiene conto dei fenomeni di natura ereditaria viscosa, è ricondotto all'integrazione dell'equazione integro–differenziale seguente:

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} - \frac{1}{E}\int_0^t \Phi(t-\tau)\frac{\partial^5 u(x,\tau)}{\partial x^4\,\partial \tau}\,d\tau = f(x,t).$$

In tale equazione $a^2 = \frac{EI}{m}$, ove E denota il modulo di elasticità della trave, I il momento d'inerzia della sezione trasversale rispetto all'asse neutro, m la massa per unità di lunghezza della trave, $f(x,t) = \frac{p(x,t)}{m}$, ove $p(x,t)$ rappresenta la forza esterna distribuita per unità di lunghezza della trave e non necessariamente costante. Indichi inoltre l la lunghezza complessiva della trave.

All'equazione 1 si perviene allorchè si suppone come risultati sperimentali, già eseguiti sopra alcuni materiali, hanno provato [2] che la relazione dinamica tra sforzo specifico σ e deformazione specifica ε sia espressa dalla seguente relazione:

$$(2)\qquad \sigma = E\varepsilon + \int_0^t \Phi(\tau)\frac{d\varepsilon(t-\tau)}{d\tau}\,d\tau.$$

Nelle equazioni 1 e 2 il tempo t viene contato dall'istante in cui ha inizio la deformazione, τ rappresenta invece un qualsiasi istante di tempo nell'intervallo $(0,t)$. La funzione $\Phi(\tau)$, funzione ereditaria, rappresenta l'eredità lasciata dalla funzione $\frac{d\varepsilon(t-\tau)}{d\tau}$ durante l'intervallo di tempo $(0,t)$. $\frac{d\varepsilon(t-\tau)}{d\tau}$ essendo la variazione della deformazione specifica all'istante $(t-\tau)$.

È ben noto che nella Teoria Classica dell'Eredità [3], invece delle equazioni (1) e (2) si hanno rispettivamente le relazioni:

(1) Nella seduta dell'11 gennaio 1947.

(2) Vedi E. VOLTERRA, *On the Dynamic Stress–Strain Relationship for Plastic and Elastic Materials*. Rendiconti del 6° Congresso Internazionale di Meccanica Applicata. Parigi, settembre 1946. Vedi pure «Il Giornale del Genio Civile», fascicolo 3°, maggio–giugno 1946.

(3) Vedi VITO VOLTERRA, *Vibrazioni elastiche nel caso della eredità*. Rendiconti dell'Accademia dei Lincei», Ser. V, vol. XXI, 1° sem., 1912.

$$(1') \qquad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + a^2\left[\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} - \frac{1}{E}\int_{t_0}^{t}\frac{\partial^4 u(x,\tau)}{\partial x^4}\Phi(t-\tau)\,d\tau\right] = f(x,t)$$

$$(2') \qquad \sigma = E\varepsilon - \int_{t_0}^{t}\Phi(\tau)\,\varepsilon(t-\tau)\,d\tau$$

in cui t_0 denota un istante anteriormente al quale l'eredità si suppone trascurabile.

Nella presente Nota ed in un'altra Nota, che immediatamente segue questa, si risolve l'equazione (1) in alcuni casi che hanno particolare interesse per le applicazioni tecniche nell'ipotesi in cui la legge ereditaria sia espressa dalla relazione:

$$\Phi(t) = A e^{-\alpha t}$$

ove A e α sono due costanti (Eredità di primo grado).

2. OSCILLAZIONI LIBERE DI UNA TRAVE SEMPLICEMENTE APPOGGIATA. – L'equazione (1) sarà in questo caso:

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + a^2\left[\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + \frac{1}{E}\int_{0}^{t}\Phi(t-\tau)\frac{\partial^5 u(x,\tau)}{\partial x^4\,\partial\tau}\,d\tau\right] = 0.$$

Facendo uso del metodo della separazione delle variabili porremo:

$$(4) \qquad u(x,t) = [A_1\cos mx - A_2\sin mx - A_3\cosh mx + A_4\sinh mx]\,f(t)$$

ove A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ ed m sono delle costanti.

La soluzione dell'equazione (3) è allora:

$$(5) \qquad \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + a^2 m^4\left[f(t) - \frac{1}{E}\int_{0}^{t}\Phi(t-\tau)\frac{df(\tau)}{d\tau}\,d\tau\right] = 0.$$

Se la trave è semplicemente appoggiata agli estremi, dovranno essere verificate le seguenti condizioni:

$$(u)_{x=0} = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{x=0} = 0$$

$$(u)_{x=l} = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{x=l} = 0$$

dalle quali si deduce:

$$m_i = \frac{i\pi}{l}.$$

La soluzione dell'equazione (3) è pertanto:

$$u(x,t) = \sum_1^\infty{}_i A_i \sin \frac{i\pi}{l} x\, f_i(t).$$

Nel caso in cui: $\Phi(t) = A e^{-\alpha t}$ si ottiene:

$$\frac{d^2 f_i(t)}{dt^2} + m_i^4 a^2 \left[f_i(t) + \frac{A}{E} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \frac{d f_i(\tau)}{d\tau} d\tau \right] = 0 \tag{6}$$

da cui derivando rispetto a t:

$$\frac{d^3 f_i(t)}{dt^3} + \left(m_i^4 a^2 + \frac{A}{E} \right) \frac{d f_i(t)}{dt} - \frac{A\alpha}{E} m_i^4 a^2 \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \frac{d f_i(\tau)}{d\tau} d\tau = 0 \tag{7}$$

ma, per la (6):

$$m_i^4 a^2 \frac{A}{E} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \frac{d f_i(\tau)}{d\tau} d\tau = -\frac{d^2 f_i(t)}{dt^2} - m_i^4 a^2 f_i(t).$$

Per cui la (7) diventa:

$$\frac{d^3 f_i(t)}{dt^3} + \alpha \frac{d^2 f_i(t)}{dt^2} + \left(m_i^4 a^2 + \frac{A}{E} \right) \frac{d f_i(t)}{dt} + \alpha m_i^4 a^2 f_i(t) = 0. \tag{8}$$

Se si fa ora la sostituzione $f_i(t) = e^{x_i t}$ si ottiene per la soluzione di x_i l'equazione di terzo grado:

$$x_i^3 + \alpha x_i^2 + \left(m_i^4 a^2 + \frac{A}{E} \right) x_i + \alpha m_i^4 a^2 = 0.$$

Il discriminante di tale equazione è positivo, per cui delle tre radici una: $-r_i$ sarà reale, mentre le altre due: $-p_i + iq_i$, $-p_i - iq_i$ saranno complesse coniugate.

La soluzione dell'equazione (6) sarà perciò:

$$f_i(t) = C_{1i} e^{-r_i t} + C_{2i} e^{-p_i t} \cos q_i t + C_{3i} e^{-p_i t} \sin q_i t$$

e la soluzione dell'equazione (1):

$$u(x,t) = \sum_1^\infty{}_i \sin \frac{i\pi x}{l} \left[C_{1i} e^{-r_i t} + C_{2i} e^{-p_i t} \cos q_i t + C_{3i} e^{-p_i t} \sin q_i t \right].$$

Le condizioni iniziali atte a determinare le costanti $C_{k,i}$ $(k = 1, 2, 3)$ sono:

1° All'istante $t = 0$ è nota la configurazione iniziale dei punti della trave:

$$u(x,0) = \sum_1^\infty{}_i A_i \sin \frac{i\pi}{l} x. \tag{A}$$

2° È nota la velocità iniziale di tutti i punti della trave:

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sum_1^\infty{}_i A_i' \sin \frac{i\pi}{l} x. \tag{B}$$

3° Al medesimo istante ($t = 0$) dovrà inoltre essere verificata la condizione:

$$\text{(C)} \qquad \frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u(x,0)}{\partial x^4} = 0 .$$

Si ottengono di conseguenza i seguenti valori per le costanti $C_{k,i}$:

$$C_{1i} = \frac{A_i'}{A_i(p_i - r_i)} + a^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \frac{A_i}{(2p_i r_i - p_i^2 - n_i^2 - q_i^2)} + \frac{A_i'(n_i^2 - p_i^2)}{A_i(r_i - p_i)(2p_i r_i - p_i^2 - n_i^2 - q_i^2)}$$

$$C_{2i} = \frac{A_i'}{A_i(r_i - p_i)} + a^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \frac{A_i}{p_i^2 + n_i^2 + q_i^2 - 2p_i r_i} + \frac{A_i'(n_i^2 - p_i^2)}{A_i(p_i - r_i)(2p_i r_i - p_i^2 - n_i^2 - q_i^2)}$$

$$C_{3i} = \frac{A_i(r_i - p_i)}{q_i(2p_i r_i - p_i^2 - n_i^2 - q_i^2)} a^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 + \frac{A_i'(n_i^2 - p_i^2)}{A_i q_i(2p_i r_i - p_i^2 - n_i^2 - q_i^2)} .$$

3. FORZA SINUSSOIDALE OSCILLANTE SOPRA UNA TRAVE SEMPLICEMENTE APPOGGIATA. – Consideriamo dapprima una distribuzione di carico che varii lungo la trave in maniera sinussoidale e compia n complete oscillazioni nell'unità di tempo.

Tale distribuzione di carico sia espressa dalla funzione:

$$p(x,t) = p_0 \sin\frac{\pi x}{l} \sin 2\pi n t .$$

L'equazione (1) sarà in tale caso (avendo posto: $g = \frac{p_0}{m}$):

$$\text{(1')} \qquad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + a^2\left[\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + \frac{1}{E}\int_0^t \Phi(t-\tau)\frac{\partial^5 u(x,\tau)}{\partial x^4\,\partial\tau}\,d\tau\right] = g \sin\frac{\pi}{l} x \sin 2\pi n t$$

ossia, nell'ipotesi di eredità di primo grado:

$$\text{(9)} \qquad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + a^2\left[\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + \frac{A}{E}\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\frac{\partial^5 u(x,\tau)}{\partial x^4\,\partial\tau}\,d\tau\right] = g \sin\frac{\pi x}{l} \sin 2\pi n t .$$

Ponendo in questo caso:

$$\text{(10)} \qquad u(x,t) = g \sin\frac{\pi x}{l} f(t)$$

e sostituendo la (10) nella (9) si ottiene:

$$\text{(11)} \qquad \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + a^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 f(t) + a^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \frac{A}{E}\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\frac{df(\tau)}{d\tau}\,d\tau = \sin 2\pi n t .$$

Derivando la (11) si deduce l'equazione:

$$\text{(12)} \qquad \frac{d^3 f(t)}{dt^3} + a^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\left(1 + \frac{A}{E}\right)\frac{df(t)}{dt} - \alpha a^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \frac{A}{E}\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\frac{df(\tau)}{d\tau}\,d\tau = 2\pi n \cos 2\pi n t$$

e quindi in definitiva:

$$(13)\qquad \frac{d^3 f(t)}{dt^3} + \alpha \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + a^2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \left(1 + \frac{A}{E}\right) \frac{df(t)}{dt} + \alpha a^2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 f(t) = \\ = \alpha \sin 2\pi n t + 2\pi n \cos 2\pi n t .$$

Si prenda come soluzione particolare della (13) la soluzione:

$$(14)\qquad f(t) = M \sin 2\pi n t + N \cos 2\pi n t .$$

Sostituendo la (14) nella (13) si ottengono le due seguenti equazioni determinatrici delle costanti M ed N:

$$\left\{ a^2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \left(1 + \frac{A}{E}\right) 2\pi n - (2\pi n)^3 \right\} M - \left\{ \alpha a^2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 - \alpha (2\pi n)^2 \right\} N = 2\pi n$$

$$\left\{ \alpha a^2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 - \alpha (2\pi n)^2 \right\} M + \left\{ (2\pi n)^3 - a^2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \left(1 + \frac{A}{E}\right) 2\pi n \right\} N = \alpha$$

da cui si ricava:

$$(15)\qquad \begin{cases} M = \dfrac{(2\pi n)^2 \left\{ (2\pi n)^2 - a^2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \left(1 + \frac{A}{E}\right) \right\} + \alpha^2 \left\{ (2\pi n)^2 - a^2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \right\}}{(2\pi n)^2 \left\{ (2\pi n)^2 - a^2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \left(1 + \frac{A}{E}\right) \right\}^2 + \alpha^2 \left\{ (2\pi n)^2 - a^2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \right\}^2} \\ N = \dfrac{2\pi n \, \alpha a^2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \frac{A}{E}}{(2\pi n)^2 \left\{ (2\pi n)^2 - a^2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \left(1 + \frac{A}{E}\right) \right\}^2 + \alpha^2 \left\{ (2\pi n)^2 - a^2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \right\}^2} . \end{cases}$$

L'espressione (14) può venire semplificata facendo uso della seguente notazione:

$$(16)\qquad M = D \cos \varphi \quad ; \quad N = D \sin \varphi .$$

Dalle (15) e dalle (16) si ricava:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\pi n \, \alpha a^2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \frac{A}{E}}{(2\pi n)^2 \left\{ (2\pi n)^2 - a^2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \left(1 + \frac{A}{E}\right) \right\} + \alpha^2 \left\{ (2\pi n)^2 - a^2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \right\}}$$

$$D = \frac{\sqrt{\left\{ (2\pi n)^2 \left\{ (2\pi n)^2 - a^2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \left(1 + \frac{A}{E}\right) \right\} + \alpha^2 \left\{ (2\pi n)^2 - a^2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \right\} \right\}^2 + \left[2\pi n \, \alpha a^2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \frac{A}{E} \right]^2}}{(2\pi n)^2 \left\{ (2\pi n)^2 - a^2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \left(1 + \frac{A}{E}\right) \right\}^2 + \alpha^2 \left\{ (2\pi n)^2 - a^2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \right\}^2}$$

e quindi l'integrale particolare dell'equazione (9) sarà:

$$u(x, t) = g D \sin \frac{\pi x}{l} \sin (2\pi n t - \varphi)$$

mentre l'integrale generale:

$$(19)\quad u(x, t) = g D \sin \frac{\pi x}{l} \sin (2\pi n t - \varphi) + [C_1 e^{-rt} + C_2 e^{-rt} \sin qt + C_3 e^{-rt} \cos qt] \sin \frac{\pi x}{l}$$

Le costanti C_1, C_2, C_3 devono essere determinate in modo da soddisfare alle condizioni iniziali ($t = 0$). Queste sono le seguenti:

$$u(x,0) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u(x,0)}{\partial x^4} = 0.$$

Si ricava in tal modo:

$$(20) \quad \begin{cases} C_1 = g D \sin\varphi - C_3 \\ C_2 = \dfrac{r g D \sin\varphi}{q} - \dfrac{2\pi n g D \cos\varphi}{q} + \dfrac{p-r}{q} C_3 \\ C_3 = \dfrac{(2\pi n)^2 g D \sin\varphi + 4 p \pi n g D \cos\varphi + r^2 g D \sin\varphi - 2 p r g D \sin\varphi}{r^2 + 2p(p-r)}. \end{cases}$$

Nell'equazione (19) il primo termine rappresenta la vibrazione forzata, mentre i termini tra parentesi coi fattori e^{-rt}, e^{-pt} la vibrazione libera smorzata. La vibrazione forzata è mantenuta dalla forza esterna e non viene smorzata nel tempo. La frequenza di tale vibrazione è la stessa di quella della forza esterna e l'ampiezza ($g D$) è proporzionale all'intensità di tale forza.

Il valore medio dell'energia dissipata durante il tempo T (periodo di una vibrazione) sarà:

$$E_d = g \pi n D \sin\varphi.$$

Astronomia. — *Il Poliseliometro.* Nota di G. VINACCIA, presentata [1] dal Socio G. ARMELLINI.

Scopo di questo apparecchio, brevettato dall'Autore il 29 agosto 1943, è di riprodurre artificialmente il soleggiamento naturale degli edifici e delle strade per qualunque luogo della terra e qualunque momento, dando la misura delle ombre, la durata e l'intensità dell'insolazione.

Molti apparecchi sono stati costruiti a questo scopo ma essi presentano fondamentalmente due difetti (congiunti o distinti), quello di usare luce puntiforme e di dover inclinare o far ruotare i modelli.

Tale rotazione, specie se portati da un asse parallelo a quello terrestre limita la loro grandezza e rende impossibile l'esperimentazione di grandi plastici di località, tanto utile per scegliere con sicurezza le meglio soleggiate.

La luce puntiforme, specie se la sorgente è a breve distanza dal modello dà raggi in tutti i sensi e non può sostituire la luce solare a direzione unica.

Infine nei detti apparecchi il rilievo del soleggiamento, essenzialmente oculare, è lento e non sempre preciso, mentre è necessario il contrario.

L'apparecchio è costituito da un proiettore di luce artificiale che invia un fascio luminoso in direzione orizzontale, su uno specchio ruotabile intorno

(1) Nella seduta del 14 dicembre 1946.

ad un asse parallelo a quello terrestre ed inclinato rispetto al detto asse di un angolo α funzione della latitudine del luogo φ e della declinazione del sole δ (fig. 3)

$$\alpha = 45° - \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\delta}{2}\right) \qquad \delta \text{ col proprio segno.}$$

In tal modo il fascio luminoso prende la direzione che avrebbe quello solare per quel dato luogo e momento illuminando di conseguenza modellini posti su un piano orizzontale.

Descrizione. – L'apparato è costituito da:

una lastra piana orizzontale (*Or*) fig. 1 riproducente l'orizzonte, sulla quale vengono posti i modelli o i plastici di cui si vuol studiare il soleggiamento;

un proiettore (P_p) di luce artificiale capace di inviare un fascio parallelo di raggi *luminosi di determinata* intensità;

uno specchio (*S*) mobile, destinato a riflettere il fascio luminoso del proiettore e a dargli la stessa direzione rispetto al piano orizzontale che ha la radiazione solare per il luogo e il momento voluto.

La lastra piana (*Or*) porta modelli può avere forma circolare ed essere girevole sul suo centro allo scopo di ruotare i modelli per variarne l'orientamento. Essa è posta in posizione orizzontale mediante una livella *L* e viti di registro (*Re*) ad un dipresso come i cerchi azimutali degli istrumenti geodetici.

La misura dell'azimut dei modelli viene data dal cerchio graduato *Cg* leggendolo direttamente o mediante nonio, o attraverso contagiri (*Ggir*) collegato al comando della rotazione *Ro*.

La lastra porta modelli può pure traslarsi (fig. 2) mediante acconci ruotismi (*tr*) per spostare i modelli sia orizzontalmente che verticalmente a seconda della necessità delle esperienze. Allo scopo di poter rilevare nei plastici l'azimut di un determinato punto, si può ricorrere ad segnapunto mobile (*Segp* fig. 2) connesso al cerchio azimutale.

Il proiettore. – Il proiettore (P_p) figg. 1 e 2 è costituito da uno specchio parabolico sul cui asse si trova la sorgente luminosa (lampada elettrica ad arco o tubolare, a gas o filamento con lente collimatrice) è mobile per metterlo nella giusta posizione.

Lo specchio. – Lo specchio è destinato a rinviare il fascio luminoso nella stessa direzione dei raggi solari per il luogo e il momento considerato.

Perciò innanzi tutto è fissato ad un asse *As* che può essere disposto parallelamente a quello terrestre, nel piano del meridiano inclinandolo rispetto al piano orizzontale di un angolo pari alla latitudine del luogo. Lo specchio ruotando secondo questo asse di 360° ripete il moto orario apparente del sole nelle 24 ore, per il luogo considerato.

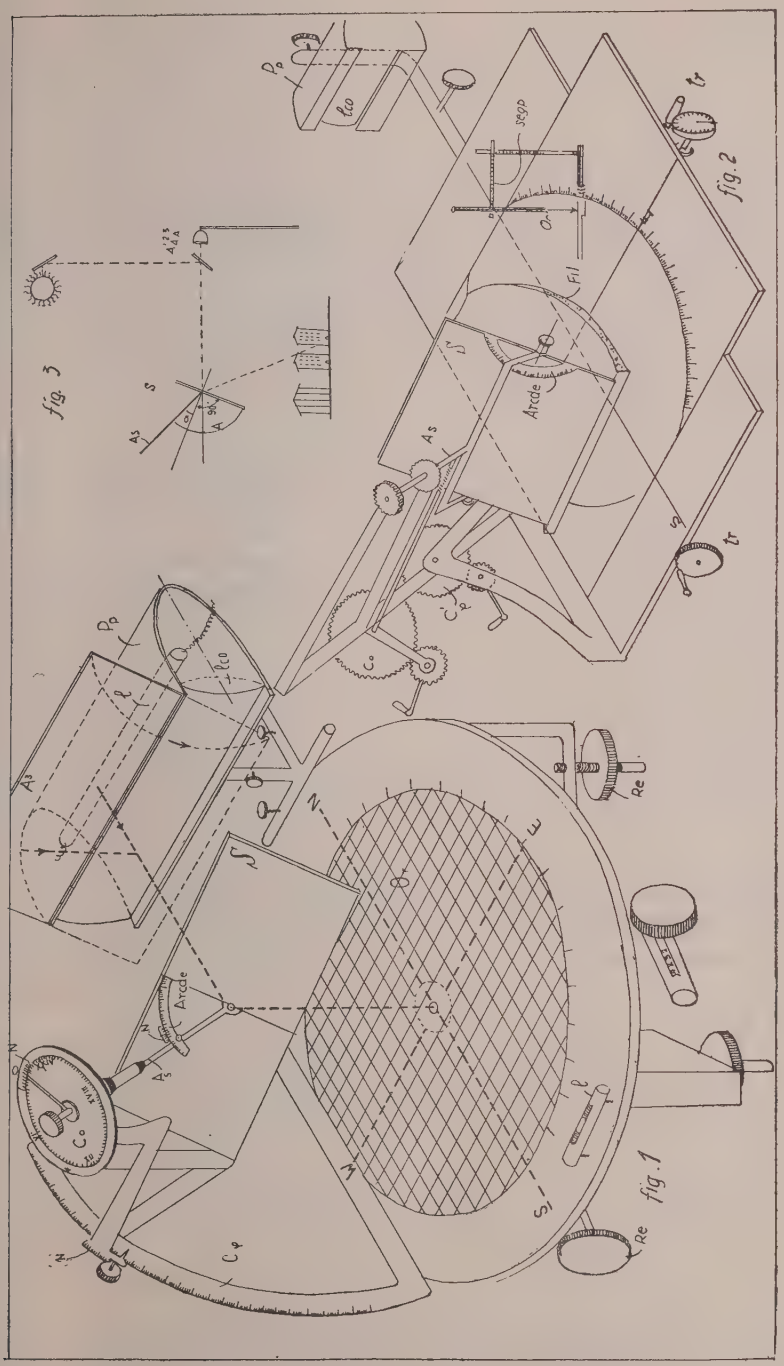


fig. 1
fig. 2
fig. 3
Arcade
Re
Co
Cp
Tr
Fil
Stop
Ps
Pco
As
Ds
Ar
Ac
Ai
Ae
Ap
Ad
Ag
Ah
Ak
Al
Am
An
Ao
Aq
Ar
As
At
Au
Av
Aw
Ax
Ay
Az
Ba
Bb
Bc
Bd
Be
Bf
Bg
Bh
Bi
Bj
Bk
Bl
Bm
Bn
Bo
Bp
Bq
Br
Bs
Bt
Bu
Bv
Bw
Bx
By
Bz

Per ripetere il soleggiamento a seconda del giorno dell'anno, lo specchio viene inclinato rispetto all'asse di rotazione del detto angolo A

$$A = 135° - \frac{\varphi + \delta}{2}$$ dove δ col proprio segno.

L'angolo di inclinazione dell'asse rispetto al piano orizzontale (latitudine) è misurabile su un arco graduato $C\varphi$. La rotazione dell'asse (orario dell'osservazione viene misurata su un quadrante graduato (Co) diviso in 24 ore e sue frazioni posto sulla testata, oppure di fianco per una più facile lettura, fig. 2. In tal caso un acconcio ruotismo angolare (ruota conica e vite senza fine) collega il movimento dell'asse con quello del quadrante. L'inclinazione dello specchio rispetto all'asse di rotazione è misurata da un arco graduato ($Arcde$) (figg. 1–2).

Variazione dell'illuminazione secondo la legge di Lambert–Bouguer. – Per ripetere il più possibile conformemente al vero il soleggiamento e poterne valutare gli effetti termici e luminosi è anteposto opportunamente allo specchio un filtro curvo di acconcio materiale trasparente (vetro neutro affumicato) assorbente il flusso luminoso nella stessa guisa dell'atmosfera (fig. 2).

Rilievo del soleggiamento. – Il rilievo del soleggiamento dei modellini può avvenire per lettura diretta sui modellini acconciamente graduati, oppure mediante rilievo fotocinematografico. La misura delle parti in ombra ed in sole avviene o per comparazione fotometrica oculare o fotografica oppure a mezzo di cellule foto elettriche con relativo complesso autoregistratore.

Sostituzione della luce artificiale con quella solare. – Alla luce artificiale può essere sostituita quella solare. In tal caso essa viene captata da un comune eliostato Ee (fig. 3) che con movimento meccanico (orologeria a molla o elettrico) segue il corso del sole e la rinvia orizzontalmente mediante un giuoco di specchi piani A^1 A^2 A^3.

Lo specchio A^3 posto dinanzi al proiettore è ribaltabile in alto, così da permettere anche l'uso della luce artificiale (figg. 1–3).

Fisica. — *Sulla spaziatura dei granuli lungo traccie di particelle ionizzanti nelle lastre fotografiche.* Nota di G. LOVERA, presentata [1] dal Corrisp. L. POCHETTINO.

Or è qualche anno, Wilkins e Helens [2] hanno dato una formula teorica ripresa poi da Brunetti e Ollano [3], sulla spaziatura dei granuli impressionati lungo una traccia lasciata in una lastra fotografica da una particella ionizzante. Essa è stata dedotta in base alle seguenti considerazioni. Una particella ionizzante veloce che attraversa l'emulsione fotografica, può impressionare un centro sensibile (granulo di bromuro d'argento) della medesima in quanto o esercita su di esso la sua azione ionizzante direttamente, attraversandolo, o lo investe con la radiazione e gli elettroni liberati, al suo passaggio, sul materiale dell'emulsione circostante il granulo. Come caso limite, occorrerà che almeno un elettrone, messo in moto dalla particella, attraversi il granulo e con le ionizzazioni ed eccitazioni secondarie compiute in esso, lo renda sviluppabile. Si può perciò definire, per la particella primaria, una sezione efficace per questo fenomeno, il cui raggio ρ, funzione della carica e della velocità della particella, rappresenta quella distanza massima di un elettrone del mezzo dalla traiettoria della particella, per la quale questa ultima è ancora in grado di conferire all'elettrone un impulso tale da renderlo capace di compiere l'azione suddetta. Il cammino libero medio tra due azioni fotografiche successive, ossia il valor medio della spaziatura dei granuli, è inversamente proporzionale alla sezione efficace della particella, e quindi a ρ^2.

Per due particelle di caratteristiche (carica, velocità) diverse, i valori limiti degli impulsi conferiti ad un elettrone perchè esso esplichi l'azione fotografica, debbono essere evidentemente uguali. In base a queste premesse la formula dedotta è la seguente:

$$(1) \qquad \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{Z(v)}{Z'(v')} \sqrt{\frac{E' m}{E m'}},$$

dove λ, λ' sono le spaziature lungo due traccie lasciate da due particelle di carica elettrica efficace $Z(v)\cdot e$, e rispettivamente $Z'(v')\cdot e$, massa m ed m', energia cinetica E ed E'.

Nei riguardi di questa formula, chè è soddisfatta dai dati sperimentali di Wilkins ed Helens solo con scarsa approssimazione, si debbono sollevare due obbiezioni.

(1) Nella seduta del 14 dicembre 1946.

(2) T. R. WILKINS e H. J. ST. HELENS, « Phys Rev. », *54*, 783, 1938.

(3) R. BRUNETTI e Z. OLLANO, « Rend. Ist. Lomb. Sci. Lett. (Cl. Sc. Mat. N.) », LXXV, 517; 1941-42.

Anzitutto gli AA. citati ammettono che l'impulso conferito da una particella di carica Ze e di velocità v ad un elettrone dal quale essa passa alla distanza minima ρ sia proporzionale a

$$\frac{Ze^2}{\rho^2 v}. \tag{2}$$

Invece con una semplice considerazione si trova che l'impulso è proporzionale a

$$\frac{Ze^2}{\rho v}. \tag{3}$$

Infatti basta ammettere (come è ovvio) che sia, a meno di un coefficiente numerico,

$$I = (Ze^2)^\alpha \rho^\beta v^\gamma$$

e tener conto che

$$[I] = LMT^{-1} \qquad [e]_{(u.\,e.\,s.)} = L^{3/2} M^{1/2} T^{-1} \qquad [\rho] = L \qquad [v] = LT^{-1}.$$

Se ne deduce subito

$$\alpha = \alpha \quad , \quad \beta = \gamma = -1 :$$

Precisamente, un facile calcolo porta al risultato che, se I_0 è il valore minimo che deve avere I per impressionare il granulo, e ρ è il raggio d'azione, si ha

$$I_0 = \frac{2 Ze^2}{\rho v},$$

quindi

$$\rho = \frac{2 Ze^2}{I_0 v}. \tag{4}$$

Detto allora δ il numero dei granuli presenti nell'emulsione per unità di volume, poichè $1/\lambda$ rappresenta il numero di granuli impressionati per unità di lunghezza lungo la traccia della particella ionizzante, si ha:

$$\frac{1}{\lambda} = \pi \rho^2 \delta = \frac{4 \pi Z^2 e^4 \delta}{I_0^2 v^2}. \tag{5}$$

Poichè in realtà nell'emulsione sono presenti elementi sensibili di specie diverse, i quali richiedono impulsi minimi pure differenti per essere resi sviluppabili, la formula precedente sarà perciò da sostituire con la

$$\frac{1}{\lambda} = \pi \Sigma \rho_i^2 \delta_i = \frac{4 \pi Z^2 e^4}{v^2} \Sigma \frac{\delta_i}{I_{0i}^2}. \tag{6}$$

Introducendo l'energia della particella ionizzante $E = \frac{1}{2} mv^2$, dalla (6) si ottiene

$$\lambda = \frac{K}{Z^2 (v) m} E \tag{7}$$

dove la costante K

$$K = \frac{1}{2\pi e^4 \sum \frac{\delta_i}{I_{oi}^2}}$$

è indipendente dal tipo di particella ionizzante.

In secondo luogo, nella precedente deduzione non si è tenuto conto delle dimensioni finite dei granuli impressionabili di Ag Br, e della struttura discontinua che ne consegue per l'emulsione fotografica, sicchè ci si deve attendere che la (6) e la (7) cadano in difetto nei casi in cui la spaziatura delle traccie è molto fitta, in quanto questa non può scendere al di sotto di un valore limite fissato dalla distanza media dei centri sensibili nell'emulsione (il che avevano già osservato Brunetti e Ollano nei riguardi della loro formula, senza per altro correggerla per questo effetto).

Orbene, della struttura granulare della lastra si può tener conto, come ho mostrato in una precedente Nota [4], mediante la formula

$$n = \frac{\nu}{1 + \nu\tau}, \tag{8}$$

dove n è il numero osservato di granuli per unità di lunghezza sulla traccia, τ è il diametro (medio) della sfera che si può pensare riservata a ciascun granulo e dalla quale gli altri granuli sono esclusi (sfera di esclusività), ν il numero dei granuli che si riscontrerebbe, in luogo di n, se τ (e quindi il volume del granulo) fosse infinitamente piccolo o almeno trascurabile rispetto alla spaziatura lungo la traccia, fisse restando le altre condizioni d'esperienza (in particolare l'efficienza della particella ionizzante, che ha generato la traccia, sui singoli granuli). Indicando con λ_s la spaziatura sperimentale, effettivamente osservata, e conservando la notazione λ per quella teorica, che obbedisce alla (7), si ha ovviamente

$$\lambda_s = \frac{1}{n} \qquad \lambda = \frac{1}{\nu}, \tag{9}$$

quindi per la (8)

$$\lambda_s = \lambda + \tau \tag{10}$$

e, sostituendo la (7)

$$\lambda_s = \frac{K}{Z^2 m} E + \tau \tag{11}$$

o anche

$$\lambda_s = aE + \tau\,. \tag{12}$$

La spaziatura sperimentale risulta perciò funzione lineare dell'energia della particella (sempre che la sua carica efficace Ze si possa ritenere indipendente

(4) G. Lovera, « La Ric. Scient. », *13*, 677, 1942.

dalla velocità della particella, il che è verificato, almeno per valori non troppo bassi dell'energia); il coefficiente

$$a = \frac{K}{Z^2 m} \tag{13}$$

è caratteristico del tipo di corpuscolo cui si riferisce; per due corpuscoli di differente natura è

$$\frac{a}{a'} = \frac{Z'^2 m'}{Z^2 m}. \tag{14}$$

La verifica della (12) e della (14) è stata eseguita sia usando le tabelle di Wilkins e Helens [5], che dànno le spaziature in funzione della lunghezza delle traccie per i protoni, i deutoni e le particelle α nelle lastre Ilford R_2, sia su miei dati riferentisi a traccie protoniche nelle lastre K dell'Agfa. Le due formule sono risultate pienamente in accordo con tutte le serie di dati sperimentali, come verrà esposto per esteso in un'altra Nota.

Ringrazio i ch.mi prof. Pochettino e prof. Persico del loro interessamento al presente lavoro.

Fisica. – *Sul comportamento dei Mesoni positivi e negativi alla fine del loro percorso.* Nota di M. Conversi, E. Pancini e O. Piccioni, presentata[1] dal Socio Corrisp. E. Amaldi.

La prima prova diretta della disintegrazione del mesone alla fine del suo percorso è stata ottenuta, come è noto, da una fotografia di Williams e Roberts [2] in camera di Wilson e da una esperienza di Rasetti [3]. L'esperienza di Rasetti consentiva altresì di valutare il rapporto tra il numero degli elettroni prodotti dalla disintegrazione dei mesoni assorbiti in un certo spessore di materiale (alluminio) e il numero dei mesoni stessi. Rasetti trovò in questo modo che solo circa la metà dei mesoni assorbiti nell'alluminio generavano elettroni ritardati. Questo risultato era in accordo con le previsioni teoriche di Tomonaga e Araki [4] secondo le quali, dei mesoni frenati in un materiale di densità sufficientemente elevata, solo i positivi subirebbero il processo di disintegrazione, mentre i negativi, che sono soggetti alla attrazione coulombiana da parte dei nuclei dell'assorbitore, avrebbero una elevata probabilità di essere catturati prima di disintegrare.

Esperienze dello stesso tipo di quella di Rasetti sono state eseguite, durante il periodo bellico, da diversi autori [5] ed i loro risultati sembravano

(5) T. R. Wilkins e H. J. St. Helens, loc. cit.

(1) Nella seduta dell'11 gennaio 1947.

(2) E. J. Williams and G. E. Roberts, « Nature », *145*, 102 (1940).

(3) F. Rasetti, « Phys. Rev. », *60*, 198 (1941).

(4) S. Tomonaga and G. Araki, « Phys. Rev. », *58*, 90 (1940).

(5) B. Rossi and N. Nereson, « Phys. Rev. », *64*, 199 (1943); M. Conversi e O. Piccioni, « N. Cim. », *2*, 71 (1944); « Phys. Rev. », vol. *70* (1946).

concordemente indicare che effettivamente soltanto la metà dei mesoni alla fine del loro percorso subisce la disintegrazione. Era pertanto desiderabile mettere direttamente in evidenza se ciò era dovuto – in accordo con le previsioni di Tomonaga e Araki – al diverso comportamento dei mesoni dei due segni. Per far questo occorreva attuare un'esperienza la quale consentisse di selezionare i mesoni di un segno di bassa energia e di studiarne il comportamento alla fine del loro percorso.

Il dispositivo sperimentale realizzato a questo scopo è mostrato schematicamente in figura: ciascuna delle due coppie di nuclei di ferro magne-

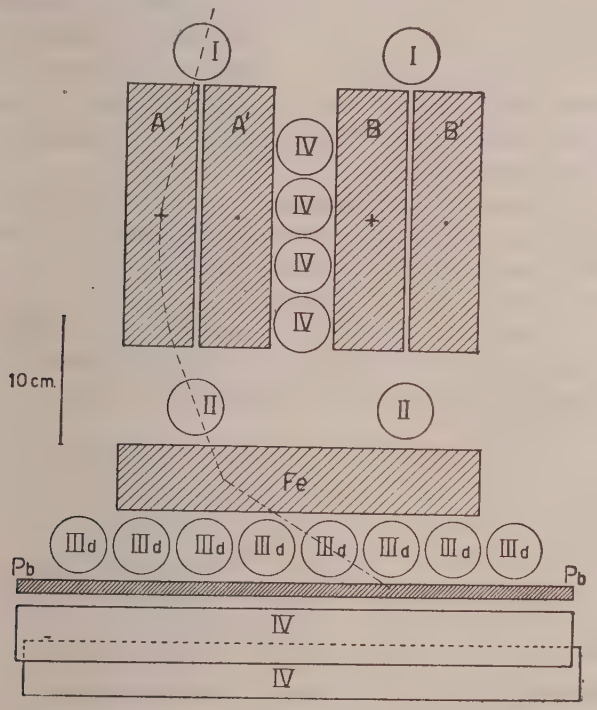


Fig. 1.

tizzato, A , A′ e B , B′, forma una specie di lente convergente per i mesoni di un segno, per esempio per i positivi, e divergente per i negativi [6]. Invertendo il campo, che è perpendicolare al piano della figura, la lente risulterà, viceversa, convergente per i mesoni negativi e divergente per i positivi. Con il valore del campo da noi usato (circa 16.000 gauss) si poteva ottenere che i mesoni che fuoriuscivano dal magnete – entro gli angoli solidi definiti dai contatori sovrapposti dei gruppi I e II – con energia inferiore a quella corrispondente ad un percorso di cm. 6 di ferro, fossero praticamente tutti di un segno.

(6) G. Bernardini e M. Conversi, « Ric. Scient. », *11*, 858 (1940); G. Bernardini, M. Conversi, E. Pacini, E. Scrocco and G. G. Wick, « Phys. Rev. », *68*, 109 (1945).

Gli impulsi dei contatori I e II coincidevano su un sistema di « coincidenze in serie »[7] con potere risolutivo dell'ordine di 10^{-6} sec. I contatori III_d erano poi collegati con un dispositivo che registrava le coincidenze (triple (I, II, III_d)) dei loro impulsi con le doppie (I, II), ma solo nel caso che i loro impulsi avessero luogo con un ritardo compreso fra 1 e 4 microsec. cà. rispetto all'impulso di coincidenza (I, II)[8].

Lo strato di materiale che doveva assorbire i mesoni era posto fra i contatori II e III_d. Nella figura è anche schematicamente tracciata la traiettoria di un mesone che termina il suo percorso nell'assorbitore dando luogo ad un elettrone di disintegrazione. Gli eventuali elettroni di disintegrazione sono tutti assorbiti nello strato di Pb (cm. 1) posto fra i contatori III_d e IV, per modo che sottraendo le coincidenze quadruple da quelle triple (I, II, III_d) è possibile eliminare il fondo, dovuto prevalentemente ai mesoni che non si arrestano nell'assorbitore e che coincidono con un impulso casualmente ritardato dei contatori III_d.

Naturalmente poichè il complesso dei contatori IV aveva un rendimento un po' inferiore all'unità (96 %) era necessario applicare alla differenza tra triple e quadruple una piccola correzione per ottenere il numero degli elettroni di disintegrazione.

I risultati di una prima serie di misure, eseguita con un assorbitore costituito da uno spessore di cm. 3 di ferro, sono stati già comunicati in una lettera[9]; quelli successivi, ottenuti con assorbitore di ferro e di grafite, sono riportati nella seguente tabella:

Segno	Assorbitore	Triple	Quadruple	Ore	M/ora
+	5 cm. di Fe	213	106	155	0,67 ± 0,065
—	5 cm. di Fe	172	158	260	0.03
—	assente	71	69	108	— 0,01
+	4 cm. grafite	170	101	179	0,36 ± 0,045
—	4 cm. grafite + 5 cm. Fe .	218	146	243	0,27 ± 0,035
—	6,3 cm. di Fe	128	120	240	0,008

Le misure con ferro e grafite sono state continuamente alternate fra loro, con misure senza assorbitore e con vari controlli giornalieri che garantivano la continua efficienza del dispositivo.

(7) O. Piccioni, « N. Cim. », 1 56 (1943).

(8) Per maggiori dettagli v. M. Conversi e O. Piccioni, « N. Cim. », *2*, 40 (1944): « Phys, Rev. », vol. *70*, 1946.

(9) M. Conversi, E. Pancini and O. Piccioni, « Phys Rev. », *68*, 232 (1945).

Si noti che le misure con grafite relative ai mesoni negativi sono state eseguite sovrapponendo alla grafite stessa uno strato di cm. 5 di ferro, allo scopo di operare su particelle appartenenti ad una banda di energie paragonabile a quella delle misure con solo ferro (non si disponeva della quantità di grafite necessaria per realizzare uno strato equivalente a cm. 5 di ferro). D'altra parte la presenza del ferro non poteva alterare i risultati, dato che tutte le nostre misure concordemente portano a concludere che i mesoni negativi non dànno luogo ad elettroni di disintegrazione nel ferro.

Introducendo la piccola correzione connessa al rendimento del sistema si ottengono, per le intensità M degli eventi ritardati, i valori riportati nell'ultima colonna della tabella.

I risultati delle misure eseguite usando come assorbitore uno spessore di cm. 5 di Fe possono essere interpretati ammettendo, in accordo con le previsioni di Tomonaga e Araki, che i mesoni negativi che terminano il loro percorso in un blocco di Fe, vengano catturati dai nuclei prima di disintegrare. I mesoni positivi invece, soggetti alla repulsione coulombiana dei nuclei, disintegrano e sono responsabili dell'effetto riscontrato nelle condizioni in cui essi vengono assorbiti. Questi risultati confermano sia quelli della precedente serie di misure [9] che quelli ottenuti per via indiretta [3] [5]; essi non discordano inoltre con alcuna delle fotografie finora eseguite in camera di Wilson [2] [10]. È attualmente in corso di realizzazione un'esperienza atta a mettere in luce se la cattura del mesone da parte del nucleo sia seguìta dall'emissione di un quanto γ.

I risultati delle misure effettuate con assorbitore di grafite sono invece in netto contrasto con i calcoli di Tomonaga e Araki e con altri più precisi recentemente eseguiti da Fermi e Teller (e a noi comunicati in via privata) nell'intento di mettere a confronto i risultati stessi con le attuali teorie delle forze nucleari.

Osserviamo infine che la differenza tra i valori ottenuti per M, in corrispondenza dei mesoni dei due segni, usando assorbitore di grafite [11], si può verosimilmente ritenere connessa con il fatto che al l. d. m. i mesoni positivi sono circa 1, 2 volte più numerosi di quelli negativi [12].

(10). S. H. NEDDERMEYER and C. D. ANDERSON, « Phys. Rev. », *54*, 88 (1938); Y. NISHINA, M. TAKEUCHI and T. ICHIMIJYA, « Phys. Rev. », *55*, 585 (1939); H. MAIER-LEIBNITZ, « Zeits. f. Physik », *112*, 569 (1939); E. J. WILLIAMS and G. R. EVANS, « Nature », *145*, 818 (1940); T. H. JOHNSON and R. P. SHUTT, « Phys. Rev. », *61*, 380 (1942); R. P. SHUTT, S. DE BENEDETTI and T. H. JOHNSON, « Phys. Rev. », *62*, 552 (1942)

(11) La presenza del ferro nelle misure sui mesoni negativi rende i due dati non rigorosamente confrontabili. Si riconosce tuttavia che il confronto si può praticamente fare senza introdurre correzioni.

(12) H. JONES, « Rev. Mod. Phys. », *21*, 235 (1939); D. H. HUGHES, « Phys. Rev. », *57*, 592 (1940); G. BERNARDINI, M. CONVERSI, E. PANCINI e G. C. WICK, « Ric. Scient. », *12*, 1227 (1941).

Elettrochimica. — *Nuove esperienze sul trasporto elettrico degli ioni nei metalli liquidi e solidi. – Sistema rame–mercurio e sistema ferro–mercurio.* Nota [1] di G. Bianchi, presentata [2] dal Corrisp. O. Scarpa.

I risultati ottenuti sperimentando con i sistemi rame solido–zinco liquido [3], rame solido–stagno liquido, rame solido–piombo liquido, rame solido–cadmio liquido [4] di cui ho dato relazione in due Note precedenti hanno avuto ulteriore conferma nel caso del sistema rame solido–mercurio liquido di cui tratta la 1ª parte della presente Nota.

1. Per questa ricerca ho leggermente modificato la disposizione sperimentale avendo messo in un bagno d'olio, munito di dispositivo autoregolatore della temperatura, due crogioli di porcellana pieni di mercurio puro in uno dei quali erano immersi due cilindretti di rame del diametro di mm. 3 percorsi da corrente continua e nell'altro due cilindretti di rame di ugual diametro percorsi da corrente alternata: inoltre un cilindretto di rame di confronto non percorso da corrente era immerso indifferentemente in uno dei due crogioli. Ogni crogiolo conteneva circa gr. 250 di mercurio e i cilindretti di rame erano rivestiti lateralmente di amianto come per le prove precedenti in modo che venissero in contatto col bagno metallico solo con l'estremità inferiore accuratamente spianata. La corrosione subita dai cilindretti di rame durante le prove è stata valutata misurando l'accorciamento che i cilindretti stessi avevano subìto dopo aver operato come nelle precedenti esperienze. Qualche prova è stata eseguita solo con corrente continua o con corrente alternata.

Col bagno metallico costituito da mercurio puro sono state eseguite due serie di prove, una a temperatura variabile mantenendo costante l'intensità della corrente e la durata della prova, l'altra a corrente variabile mantenendo costante la temperatura e la durata della prova. I risultati ottenuti sono riportati nelle tabelle I e II e sono illustrati graficamente nelle figure 1 e 2 nelle quali la curva a tratto corrisponde agli accorciamenti subiti dal cilindretto di rame percorso da corrente continua e fungente da polo positivo, la curva a tratto e punto corrisponde agli accorciamenti subiti dal cilindretto di rame percorso da corrente continua e fungente da polo negativo, la curva a linea piena corrisponde al valor medio degli accorciamenti subiti dai due cilindretti di rame percorsi da corrente alternata: infine la curva a tratto breve corrispondente agli accorciamenti subiti dal cilindretto di rame di confronto.

(1) Lavoro eseguito presso il Laboratorio di Elettrochimica del Politecnico di Milano.
(2) Nella seduta del 14 dicembre 1946.
(3) « Rend. Acc. Naz. Lincei, Serie VIII, I, 786 (1946).
(4) « Rend. Acc. Naz. Lincei » (*in corso di pubblicazione*).

Tabella I.

Temp. °C	Durata Ore	Corrente Amp.	Accorciamento degli elettrodi in mm.				
			Corrente continua		Corrente alternata		Senza corrente
			positivo	negativo			
45	8	100	0,2	0,5	0,3	0,3	0,1
100	8	100	0,3	0,6	0,4	0,4	0,1
130	8	100	0,6	0,7	—	—	0,1
160	8	100	1,0	0,6	—	—	0,1
165	8	100	—	—	1,1	0,9	0,1
210	8	100	—	—	1,5	1,9	0,1
230	8	100	3,1	1,9	2,2	2,1	0,2
265	8	100	—	—	3,8	4,0	0,3
285	8	100	5,8	2,7	5,1	4,7	0,5

Tabella II.

Temp. °C	Durata Ore	Corrente Amp.	Accorciamento degli elettrodi in mm.				
			Corrente continua		Corrente alternata		Senza corrente
			positivo	negativo			
230	8	50	1,6	1,3	1,4	1,4	0,3
230	8	56	1,8	1,7	—	—	—
230	8	70	(1,2)	1,2	1,8	1,6	—
230	8	80	2,3	2,0	—	—	—
230	8	85	—	—	1,9	1,8	—
230	8	102	2,4	1,8	—	—	—
230	8	109	2,6	1,8	—	—	—
230	8	112	2,5	1,8	—	—	—
230	8	115	—	—	2,1	2,5	—
230	8	130	3,0	2,1	3,6	2,1	—
230	8	130	3,2	2,2	—	—	—
230	8	150	5,3	3,4	—	—	—
230	8	170	8,9	5,2	—	—	0,3

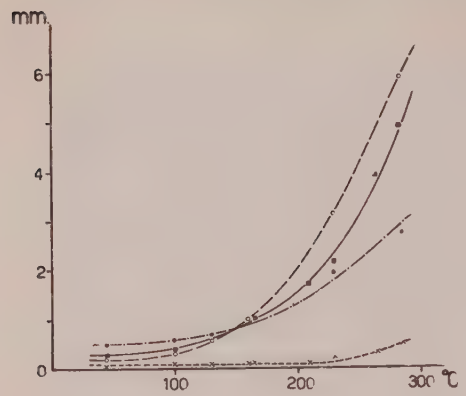


Fig. 1.

Ordinate: accorciamenti dei cilindretti di rame.
Ascisse: temperatura del bagno (intensità della corrente 100 Amp. costanti).

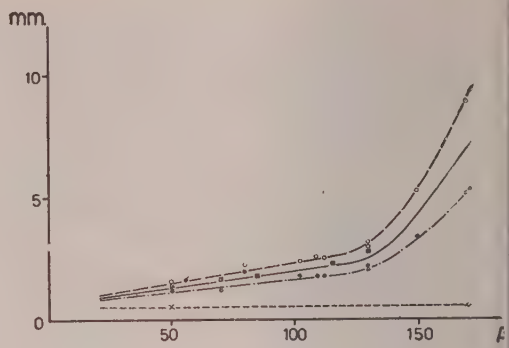


Fig. 2.

Ordinate: accorciamenti dei cilindretti di rame.
Ascisse: intensità della corrente (temperatura del bagno 230° costante).

Si vede che:

1° gli accorciamenti dei cilindretti di rame percorsi da corrente continua e alternata sono molto maggiori degli accorciamenti del cilindretto di confronto non percorso da corrente;

2° i cilindretti percorsi da corrente continua si accorciano in misura diversa a secondo che fungono da anodo o da catodo;

3° di questi due cilindretti si accorcia di più quello positivo a temperatura elevata ($> 150°C$) mentre che a bassa temperatura ($< 150°C$) si accorcia di più quello negativo (5);

4° gli accorciamenti dei cilindretti di rame percorsi da corrente alternata sono intermedi tra gli accorciamenti dei cilindretti percorsi da corrente continua rispettivamente funzionanti da anodo e da catodo.

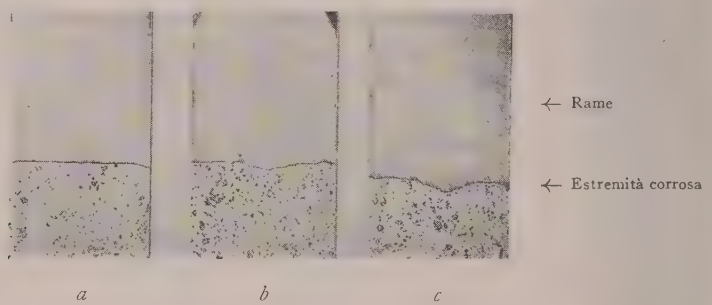


Fig. 3.
(Ingrandimento × 10).

I fenomeni riscontrati nel sistema rame–mercurio differiscono dai fenomeni riscontrati nei sistemi precedentemente indagati per i punti 3 e 4. Lo

(5) Ulteriori prove dimostrative della reale esistenza di questa inversione (che ha grande interesse se messa in relazione con la esistenza di ioni metallici dei due segni) sono tutt'ora in corso.

esame macroscopico delle sezioni delle estremità corrose dei cilindretti di rame ha mostrato una superficie quasi piana per il campione non percorso da corrente (fig. 3 *a*) e una superficie più irregolare per i campioni percorsi da corrente (fig. 3 *b* e *c*). L'esame microscopico dei campioni non ha permesso di stabilire delle differenze di struttura tra i vari campioni percorsi da corrente continua, da corrente alternata e senza corrente: la micrografia della fig. 4 mostra la struttura della sezione assiale dell'estremità in contatto col bagno di mercurio puro del cilindretto di rame che fungeva da polo positivo in una prova a 200 °C con corrente continua dell'intensità di 125 A.

2. Il sistema ferro–mercurio liquido, particolarmente interessante poichè è caratterizzato dalla pressochè completa insolubilità allo stato solido dei due metalli, è stato indagato con la stessa apparecchiatura delle precedenti

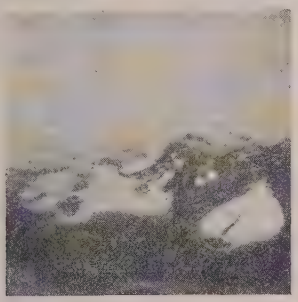


Fig. 4.
(Ingrandimento × 100).

prove limitando però a tre il numero dei cilindretti di ferro; due percorsi da corrente continua e uno di confronto non percorso da corrente. I cilindretti, la cui estremità inferiore era stata spianata, lucidata e osservata al microscopio per controllare la pulitura e l'omogeneità del materiale, sono stati rivestiti lateralmente con amianto e immersi in un bagno di mercurio puro. Sono state eseguite tre prove, usando dei cilindretti di ferro Armco del diametro di mm. 3,8 per la prima e facendoli percorrere da una corrente continua di 120 A per 8 ore con il bagno di mercurio alla temperatura di 200 °C., usando dei cilindretti di acciaio dolce (0,10 % C 0,020 % Si 0,40 % Mn 0,032 % S 0,010 % P) del diametro di mm. 3 allo stato bonificato per la seconda prova e allo stato ricotto per la terza e facendoli percorrere da una corrente continua di 80 A per 8 ore con il bagno di mercurio alla temperatura di 200 °C.

In tutte e tre le prove si è constatato che le estremità dei cilindretti preventivamente lucidate mostravano, osservate al microscopio sotto forte ingrandimento, una debole corrosione, molto minuta e regolare, per i campioni percorsi da corrente (senza che si potesse osservare una differenza tra il campione che fungeva da polo positivo e quello che fungeva da polo negativo) e una corrosione molto minore per i campioni di confronto non percorsi

da corrente [6]. La fig. 5 mostra la superficie corrosa del cilindretto che fungeva da polo positivo e la fig. 6 la superficie del cilindretto di confronto non percorso da corrente per la prova eseguita con cilindretti di acciaio dolce ricotto; per la prova con ferro Armco l'aspetto del cilindretto che fungeva da

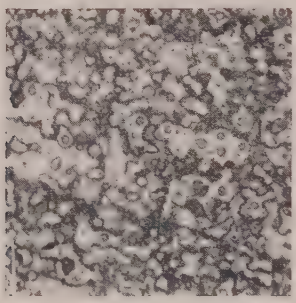


Fig. 5.
(Ingrandimento × 1000).

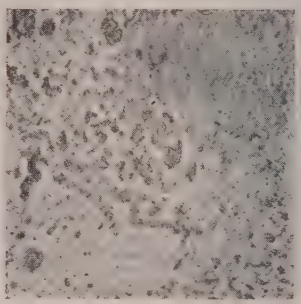


Fig. 6.
(Ingrandimento × 1000).

polo positivo è dato dalla fig. 7 e l'aspetto del cilindretto di confronto dalla figura 8.

È interessante far notare che la porzione dei cilindretti già percorsi da corrente che era stata in contatto col mercurio si è completamente arrugginita nel giro di pochi giorni, mentre che la corrispondente parte dei campioni non percorsi da corrente è rimasta speculare. Questo fenomeno, dovuto

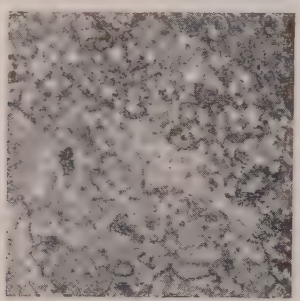


Fig. 7.
(Ingrandimento × 1000).

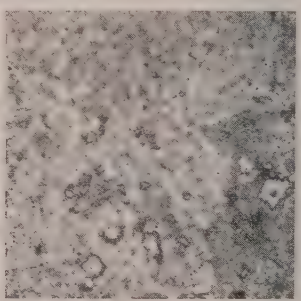


Fig. 8.
(Ingrandimento × 1000).

alla esistenza di coppie locali ferro–mercurio, conferma che la corrente ha provocato la formazione di una lega tra i due metalli.

In Note successive verranno comunicati i risultati delle ricerche in corso sui sistemi rame solido–amalgame liquide.

Ringrazio il Direttore del Laboratorio, prof. Oscar Scarpa, che mi ha guidato durante la ricerca.

(6) L'esiguità delle corrosioni non ha concesso di misurare con sufficiente precisione le grandezze degli accorciamenti dei cilindretti di ferro.

Botanica (Citogenetica). — *La « Semigamia », singolare comportamento del nucleo spermatico nelle uova diploidi delle specie apomittiche del genere Rudbeckia (Asteraceae) e conseguente embriogenesi di tipo chimerico* [1]. Nota di E. Battaglia, presentata [2] dal Corrisp. A. Chiarugi.

Rudbeckia speciosa Wender. e *Rudbeckia laciniata* L. sono due piante apomittiche, nelle quali mi sono imbattuto nel corso di uno studio cito–embriologico sul genere *Rudbeckia* compiuto fra il 1941 e il 1943, e nelle quali ho potuto osservare fenomeni di particolare interesse.

Nel seguente prospetto ho riassunto i dati differenziali più importanti delle due specie apomittiche rispetto alle altre specie a comportamento anfimittico da me investigate:

Sezione del genere	NOME DELLA SPECIE	Corredo cromosomico	GAMETOFITO FEMMINILE	
			tipo di sviluppo	comportamento
Eurudbeckia	*R. bicolor* Nutt.	$n = 19$	Euphorbia dulcis	anfimittico
	R. hirta L.	$n = 19$	»	»
	R. hirta L. v. *meine freude* Hort.	$n = 19$	»	»
	R. speciosa Wender.	$2n = 76$	Erigeron II	apomittico
	R. laciniata L.	$2n = 76$	»	»
	R. laciniata L. v. *flore pleno* Hort.	$n = 19$	Euphorbia dulcis	anfimittico
Dracopis . .	*R. amplexicaulis* Vahl.	$n = 16$	Euphorbia dulcis	anfimittico
Echinacea .	*R. purpurea* L.	$n = 11$	Normale	anfimittico

Innanzi tutto anche nel genere *Rudbeckia* – come nella maggior parte delle piante apomittiche – l'apomissia è connessa con la poliploidia: infatti le due specie apomittiche risultano tetraploidi ($2n = 76$) rispetto alle altre specie anfimittiche della stessa sezione ($n = 19$).

Nelle specie anfimittiche lo sviluppo del gametofito femminile segue il tipo « Normale », monomegasporiale 8–nucleato (sect. Echinacea), oppure il tipo tetramegasporiale 8–nucleato con polarizzazione $1 + 3$ e triploidia dei nuclei calazali, oggi ben noto dopo la sua prima scoperta dovuta al Carano (1925–26) e denominato « Euphorbia dulcis » (sect. Dracopis e Eurud-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Pisa.
(2) Nella seduta del 14 dicembre 1946.

beckia). A questo riguardo confermo i reperti di Fagerlind (1938)[3] e di Rosen (1943)[4] che osservarono questo tipo in *R. bicolor* Nutt. e *R. amplexicaulis* Vahl (erroneamente indicata dal primo autore come «amphicaulis»); non confermo invece il preteso nuovo tipo di sviluppo del gametofito femminile che col nome di «tipo Rudbeckia» il Palm (1934)[5] credette di aver trovato in *R. hirta* L., e che io ritengo sia da considerare inesistente, come del resto dubitò anche il Maheswari (1937)[6].

Nelle due specie apomittiche lo sviluppo del gametofito femminile segue invece il tipo che chiamo in un lavoro in corso di stampa[7] «Erigeron II» e che è stato descritto anche in *Ixeris dentata* da Okabe[8]. La cellula madre delle megaspore subisce un processo meiotico anormale: la prima divisione è di tipo semieterotipico dopo una profase a cromosomi univalenti; per aborto essa porta alla formazione di un nucleo di restituzione diploide; la seconda divisione corrisponde alla seconda divisione meiotica (omeotipica) e porta alla formazione di un apocizio binucleato a nuclei diploidi; seguono altre due divisioni, corrispondenti secondo l'interpretazione del Chiarugi[9] alle due divisioni gametogeniche, le quali portano alla costituzione dello stadio adulto 8-nucleato con cellula uovo diploide e nucleo secondario tetraploide.

Rispetto ai miei reperti, è da rilevare per *Rudbeckia laciniata* un evidente errore di interpretazione per eccessiva scarsità di stadi nel lavoro di Rosen già citato, nel quale lo sviluppo del gametofito femminile è indicato come corrispondente al vecchio «tipo Lilium» oggi noto col nome di «tipo Adoxa». Per la stessa specie anche il recentissimo lavoro di Fagerlind (1946)[10], di cui ho preso visione a ricerche ultimate, appare manchevole, non avendo egli sorpreso la formazione del nucleo di restituzione e quindi in definitiva lo svolgimento sia pure anormale della prima divisione meiotica.

È poi da rilevare che per *Rudbeckia speciosa* il Rosen riporta il tipo «Euphorbia dulcis», il che io non posso confermare: il reperto di Rosen dipende o da una erronea determinazione del materiale studiato o dall'avere egli rivolto le sue indagini su un biotipo anfimittico diverso dal mio.

(3) F. Fagerlind, *Drei Beispiele des Fritillaria-Typs*. «Sv. Bot. Tidskr», *33*, 118-204, 1939.

(4) W. Rosen, *The Embryo-sac of Rudbeckia*. «Acta Horti Gotoburgensis», *15*, 267-273, 1944.

(5) B. J. Palm, *Ein neue Enbryosachtypus bei Rudbeckia hirta L.* «Bot. Notiser», 1934, 423-427.

(6) P. Maheswari, *A critical Review ot the Types of Embryo-sac in Angiospermes*. «New Phytol.», *36*, 359-417, 1937.

(7) E., Battaglia, *Ricerche cariologiche ed embriologiche sul genere Rudbeckia* (*Asteraceae*). VI. *Apomissia in Rudbeckia speciosa Wender*. «Nuovo Giornale Botanico Italiano», n. s., vol. LIII, 27-69, tav. V-XII, 1946.

(8) S. Okabe, *Parthenogenesis bei Ixeris dentata*. «Bot. Mag. Tokyo», *46*, 518-523, 1932.

(9) A. Chiarugi, *Il gametofito femmineo delle Angiospermae nei suoi vari tipi di costruzione e di sviluppo*. «Nuovo Giornale Botanico Italiano», n. s., XXXIV, 1-133, 1927.

(10) F. Fagerlind, *Sporogenesis, Embryosackentwicklung und pseudogame Samenbildung bei Rudbeckia laciniata* L. «Acta Horti Bergiani», *14*, n. 3, 39-90, 1946).

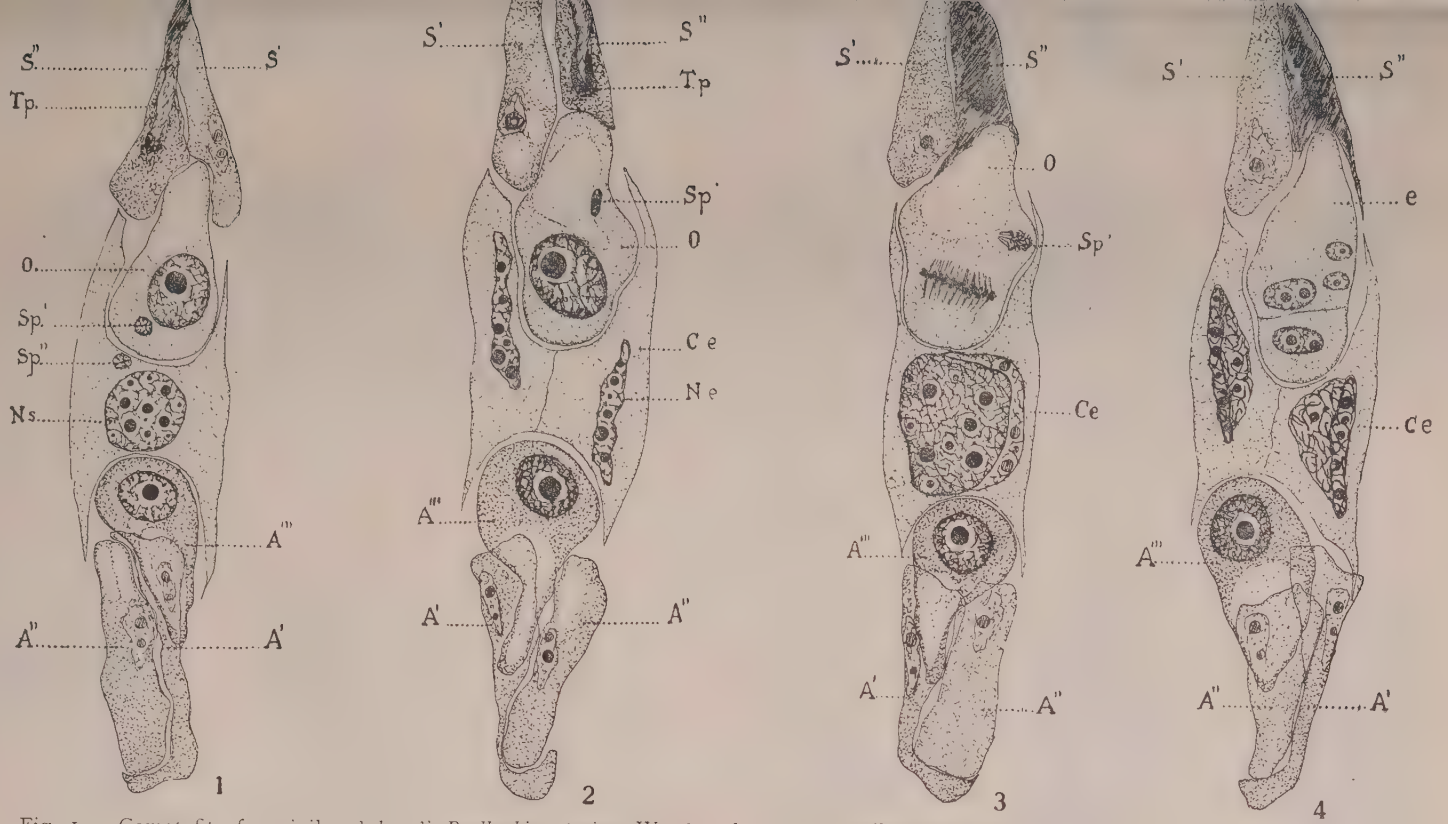


Fig. 1. – Gametofito femminile adulto di *Rudbeckia speciosa* Wender al momento della penetrazione degli spermi.
Fig. 2. – Idem, dopo la prima divisione del nucleo fecondato dell'endosperma.
Fig. 3. – Idem, durante la metafase del nucleo della cellula uovo e del nucleo spermatico.
Fig. 4. Idem, con embrione bicellulare e avente due nuclei di origine femminile e due nuclei di origine maschile questi ultimi situati nella cellula basale × 470 ca.

Indicazioni comuni:

S' sinergide; *S''* sinergide degenerata per la penetrazione del tubetto pollinico, *Tp*; *O* cellula uovo; *Sp'* nucleo spermatico penetrato nella cellula uovo; *Sp''* nucleo spermatico fecondante il nucleo secondario *Ns*; *Ce* cellula dell'endosperma col suo nucleo *Ne*; *A' A''* due antipodi sorelle; *A'''* terza antipode oosimile.

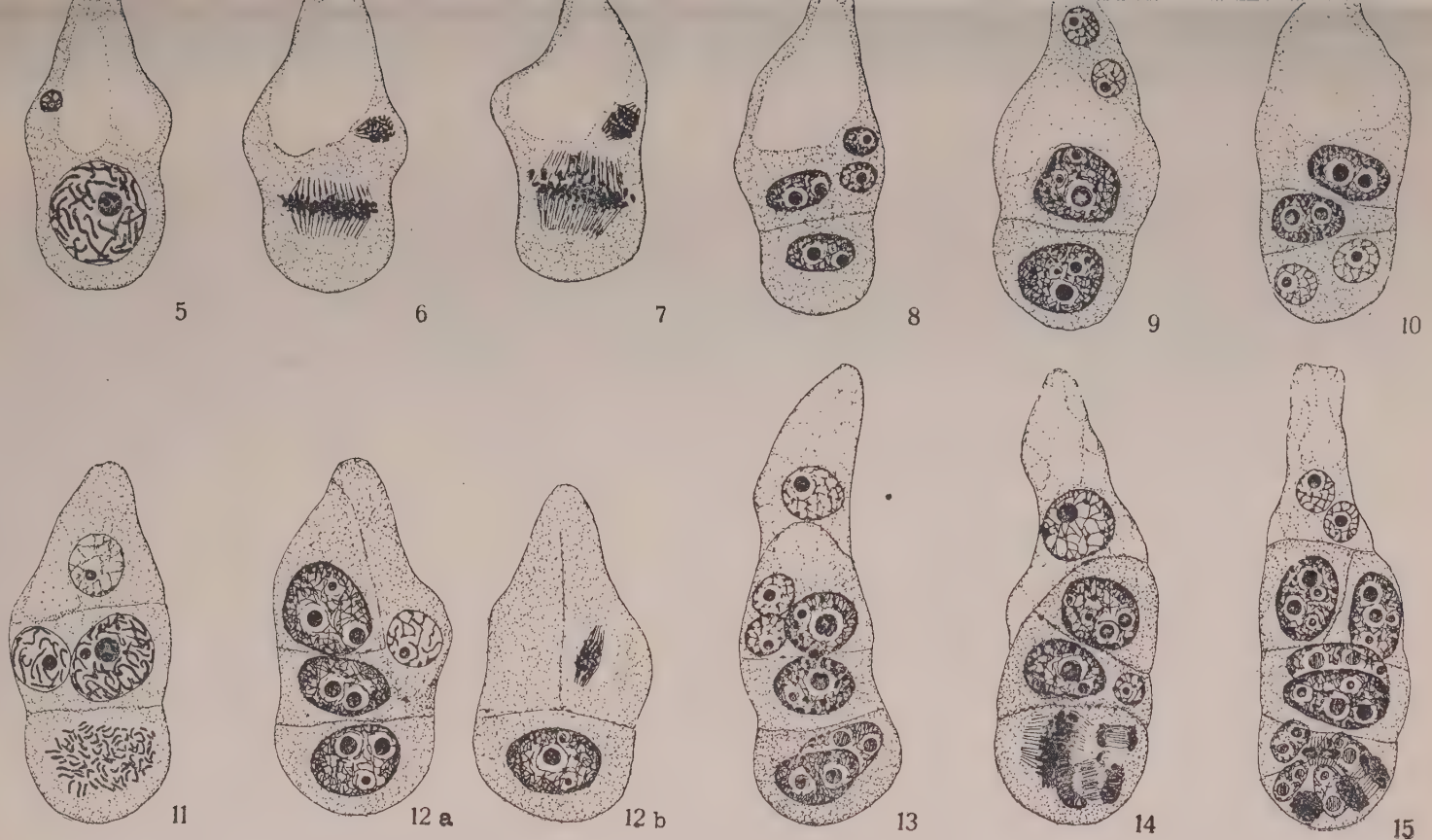


Fig. 5. – Nucleo spermatico penetrato in una cellula uovo, il cui nucleo è in profase.
Figg. 6-7. – Prima divisione dell'embriogenesi: mitosi del nucleo dell'uovo e mitosi del nucleo spermatico.
Figg. 8-9. – Embrioni bicellulari con due piccoli nuclei di origine maschile nella cellula basale.
Fig. 10. – Embrione tricellulare con due nuclei di origine maschile nella cellula apicale.
Figg. 11-15. – Embrioni chimerici con nuclei di origine maschile più piccoli in posizione varia; descrizione nel testo × 630 ca.

La cellula uovo nelle due specie apomittiche si sviluppa in embrione soltanto in seguito allo stimolo dello spermio che penetra nel suo citoplasma ma non si fonde tuttavia col nucleo, in quanto la progenie è anch'essa diploide. Esperimenti di castrazione hanno infatti messo in luce: 1° che le piante castrate non abboniscono mai i semi, e che la germinazione dei polline proprio, oppure di quello delle altre specie anfimittiche, sugli stimmi è indispensabile per la formazione di semi regolarmente abboniti; 2° che i semi germinanti producono piante con corredo cromosomico approssimativamente diploide, con $2n = 76$ ca., come la pianta madre.

Le due specie apomittiche dal punto di vista fisiologico presentano quindi il comportamento delle piante che furono denominate « ad apogamia indotta », nelle quali la germinazione dell'oosfera diploide non è autonoma, ma promossa da cause esterne. In particolare, il comportamento delle due specie apomittiche di *Rudbeckia* si avvicina (e qualche volta infatti si identifica) a quello delle specie che presentano il fenomeno della pseudogamia (Ernst), di cui un chiaro esempio è dato dalla *Zephyranthes texana* illustrato dalla Pace [11], nella quale l'oosfera diploide germina soltanto in seguito alla penetrazione nel suo citoplasma dello spermio che dopo un certo tempo degenera. Ma in *Rudbeckia* nella generalità dei casi il nucleo spermatico si comporta, durante la segmentazione dell'uovo in cui è penetrato, in maniera diversa e, per quanto io sappia, completamente nuova nelle piante: non si fonde col pronucleo femminile, non degenera, ma si divide quasi contemporaneamente ad esso mantenendosene del tutto indipendente.

Chiamo « semigamia » questo processo singolare di fecondazione parziale dell'oosfera e di costruzione di un embrione chimerico (in senso descrittivo) che ho riscontrato per la prima volta nelle due Rudbeckie apomittiche.

Nelle figure riportate in questa nota illustriamo brevemente le prime tappe più significative dell'embriogenesi in *Rudbeckia speciosa* Wender. avvertendo che fenomeni del tutto simili si osservano in *R. laciniata* L.

Nel gametofito adulto (fig. 1) penetra regolarmente il tubetto pollinico (*Tp*) e con esso i due nuclei spermatici aploidi (*Sp'*, *Sp''*).

Tale penetrazione implica la consueta degenerazione di una delle due sinergidi (*S''*), e l'altra (*S'*) permane integra per un certo tempo. I due nuclei spermatici si avvicinano rispettivamente al nucleo della cellula uovo (*O*) e al nucleo secondario (*Ns*). La cariogamia però si verifica soltanto fra un nucleo spermatico (*Sp''*) e il nucleo secondario (*Ns*): il nucleo pentaploide che ne deriva si divide subito dando due distinte cellule (cellule dell'endosperma: *Ce*); l'altro nucleo spermatico (*Sp'*) permane nel citoplasma dello uovo in posizione generalmente laterale e basale (raramente apicale), e non si fonde col nucleo ovarico (figg. 2 e 5).

Dopo un certo periodo di tempo, nucleo spermatico (aploide) e nucleo ovarico (diploide) si dividono separatamente nel citoplasma della cellula

(11) L. PACE, *Apogamy in Atamosco.* « Bot. Gaz. », *56*, 376-394, 1913. Vedi anche: *Apomissia*, in *Encicl. Ital.*, III, 699, fig. 5.

uovo. Tale divisione può essere sincrona (ambedue i nuclei in metafase: figg. 3 e 6), oppure anticipata per l'uno o per l'altro nucleo (leggermente anticipata per il nucleo maschile: caso poco frequente, fig. 7; anticipata per il nucleo ovarico: caso comune, fig. 5).

Il risultato è un embrione con due voluminosi nuclei diploidi di origine femminile e due nuclei di origine maschile, più piccoli e meno cromofili (fig. 4, 8, 9 e 10). La posizione reciproca più frequente è quella riportata nelle figg. 8 e 9: embrioni bicellulari nei quali i due nuclei maschili aploidi sono situati nella cellula basale dell'embrione. Assai rara è la posizione apicale in cellula distinta dei due nuclei maschili (fig. 10).

Le tappe successive dell'embriogenesi, nelle quali si individuano tanto i nuclei aploidi di origine maschile quanto quelli diploidi di origine femminile, per la posizione reciproca di tali nuclei, sono assai variabili; praticamente si verificano numerose possibilità. La fig. 11 documenta in un embrione bicellulare la profase di una divisione tanto in un nucleo di origine maschile (l'altro in posizione basale è quiescente) quanto in uno dei due nuclei di origine femminile (mentre l'altro è in metafase). È evidente nei due nuclei in profase il diverso corredo cromosomico, aploide per il nucleo più piccolo di origine maschile, diploide per il nucleo più grande di origine femminile. Il risultato delle tre mitosi in corso nell'embrione della fig. 11 si osserva in quello della fig. 13. La divisione dei due nuclei di origine maschile (l'uno in profase e l'altro in metafase) ritardata allo stadio di embrione tetracellulare è stata riportata nella fig. 12 *a–b*. Un ritardo ancora maggiore si osserva nell'embrione maggiormente sviluppato della fig. 14 (osservare la posizione apicale–laterale dei nuclei di origine maschile), mentre una loro dislocazione nella estremità basale dell'embrione connessa con un lungo periodo di quiescenza cariocinetica viene documentata dalla fig. 15.

Gli embrioni adulti, da quanto abbiamo osservato, non presentano, a causa della ripartizione passiva e casuale dei nuclei maschili, ben distinte aree embrionali geneticamente maschili; questi si trovano localizzati un po' dovunque nell'intero embrione che costituisce una chimera piuttosto complessa. Tale carattere tuttavia non è chiaramente visibile negli embrioni in sviluppo avanzato in quanto i conteggi cromosomici, per l'esiguità dei volumi nucleari dovuti all'intensa attività cariocinetica, sono sempre difficili ad eseguirsi. Sarà interessante l'isolamento di eventuali biotipi aberranti che potrebbero facilmente insorgere dopo tali perturbazioni cariologiche e l'eventuale reperto di cellule aploidi nei tessuti sporigeni di tali individui.

La semigamia, pure essendo il fenomeno più frequente, coesiste tuttavia con il fenomeno assai più raro della pseudogamia, rappresentata dalla degenerazione del nucleo maschile entro il citoplasma della cellula uovo, da cui deriva in tal caso un embrione esclusivamente matroclino e non chimerico. A questo riguardo è da rilevare che nella sola *R. laciniata* il Fagerlind nel suo recentissimo lavoro del 1946 già citato ha osservato soltanto la pseudogamia, non avendo trovato un numero sufficiente di stadi ben chiari che gli abbiano permesso di descrivere il fenomeno della semigamia; avendo

osservato giovani embrioni con due nuclei maschili alla base, egli suppone che ambedue i nuclei maschili siano entrati nella cellula uovo e che quindi l'albume si sia sviluppato senza fecondazione come l'embrione; soltanto in via ipotetica egli ammette la possibilità che il nucleo maschile si divida sincronomente alla prima divisione embrionale, e a tal riguardo così si esprime: « Es wurden mehrere Fälle angetroffen, wo weiter in der Entwicklung vorgeschrittene Embryonen an ihrer Basis unregelmässige, kleinkernige Zellen enthielten. Es ist möglich, dass dieses Gewebe aus dem Derivat der männlichen Kerne besteht. Die Erscheinung muss jedoch noch eingehender untersucht werden, ehe ein bestimmtes Urteil gefallt werden kann ».

Il fenomeno che ho potuto seguire e descrivere in ogni sua tappa tanto in *Rudbeckia laciniata* quanto in *R. speciosa*, così da non avere dubbio alcuno sul suo svolgimento, costituisce una delle modalità più singolari fra i processi di embriogenesi conosciuti, e rappresenta il caso intermedio, fino ad oggi ignoto, fra le due modalità estreme della ginogenesi e della androgenesi.

La ginogenesi, nel significato usato dagli zoologi, è lo sviluppo dell'oosfera indotto dal nucleo spermatico che prima o poi degenera; l'identico fenomeno è chiamato dai botanici pseudogamia. L'androgenesi, di cui si ha nozione soltanto per via genetica, e che non è ancora stata dimostrata citologicamente nelle sue tappe di realizzazione[12], rappresenta il fenomeno opposto per cui il nucleo dell'uovo degenera o comunque non è efficiente e viene sostituito nel suo destino dal nucleo spermatico. Il fenomeno da noi descritto in questa nota rappresenta il caso intermedio della simultanea efficienza e della uguale capacità di sviluppo autonomo del nucleo maschile e del nucleo femminile: potrebbe perciò definirsi anche con la parola « androginogenesi ». La normale anfigamia per analogia di linguaggio si potrebbe chiamare gamogenesi, e il termine partenogenesi verrebbe applicato soltanto ai casi di sviluppo di uova in assenza totale di nuclei maschili o di stimoli ad essa riferibili. Quest'ultima limitazione del termine di partenogenesi è l'unica che rispetti in modo assoluto il suo significato etimologico. Volendo rimanere aderenti ad una terminologia che si inquadri in quella usualmente adoperata dai botanici, ci sembra che il termine di « semigamia », con il quale indichiamo l'androginogenesi, sia accettabile per indicare un fenomeno che realizza in certo senso a metà il fenomeno della ordinaria gamia e che indubbiamente è intermedio fra di essa e la pseudogamia.

Per concludere è da rilevare la stranezza del fatto che Sergio Navashin per descrivere nel 1900 il fenomeno della doppia fecondazione delle Angiospermae abbia scelto proprio una pianta apomittica come *Rudbeckia speciosa*, in cui i due spermi penetrano effettivamente nel gametofito femminile ed il secondo di essi si unisce al nucleo secondario, ma la vera fecondazione dell'uovo è ben lungi dal realizzarsi ed è sostituita da fenomeni veramente singolari!

(12) A. Chiarugi, *La partenogenesi sperimentale nelle piante superiori e la sua importanza per le indagini sulla loro costituzione genetica.* « Bollett. della Soc. Ital. di Biologia Sperimentale », IX, 1182–1207, 1934.

Fisiologia vegetale. – *Fattori ostacolanti la germinazione nelle Pomoidee*[1] Nota di R. Puglisi, presentata[2] dal Socio G. Gola.

Recentemente un orticultore danese, Robert von Veh, ha dimostrato sperimentalmente come i semi delle Pomoidee (melo, pero e cotogno), che hanno una durata in germinazione che va da 120 a 240 giorni, possano germogliare in pochi giorni qualora vengano sbucciati[3]. Egli attribuisce la causa di questo acceleramento all'asportazione dell'albume, il quale agirebbe come fattore di impedimento della germinazione. Egli ha anche esteso quest'affermazione ad alcune prunoidee, susine, ciliege.

In biologia vegetale si suole accennare a sostanze d'impedimento della germinazione, ma se si analizza questo fenomeno e le piante in cui si dice che esso si verifichi, si deve constatare che vi è ancora molta oscurità e non si sa bene né se il fenomeno esista, né se l'impedimento sopra accennato sia determinato da sostanze attive particolari.

La presente Nota è dedicata allo studio di questa funzione d'impedimento sopra asserita.

Le ricerche sono state eseguite sopra semi di melo, pero e cotogno, che germinano di solito dopo 120–150 giorni e su semi di *Cydonia japonica* ed altre specie di *Cydonia* che richiedono anche 240 giorni dalla semina prima di germinare.

Una prima serie di esperienze fu fatta per verificare tale durata di inerzia. I semi posti in sabbia appena raccolti e tenuti con umidità e temperatura costante al di sopra di 15° germinarono con molte fallanze, dopo il periodo suindicato.

Un'altra serie di semi fu sbucciata accuratamente in modo da non ledere l'embrione e posta a germinare tra carta bibula in scatole Petri nelle stesse condizioni. Nello spazio di sei giorni la germinazione fu intensa e bene avviata. L'uniformità e l'energia germinativa furono più che soddisfacenti.

Tutti i semi del tipo che ho preso a studiare hanno un profilo ovoidale, un apice cotiledonare ottuso, anzi molto allargato, e l'altro opposto radicale assai ristretto, quasi appuntito.

Il tegumento è costituito da due strati: lo strato esterno di color bruno, dello spessore di 250–300 micron, di consistenza cuoiosa, costituisce la parte principale del tegumento. È formato di cellule sclerotizzate che con l'acqua si ramolliscono, ma non permettono che in minimo grado una certa distensione.

Il tegmen è assai sottile, bianco, aderente al tegumento esterno, ma non tale che nella spellatura non si possa separare bene da quello adiacente. Esso è costituito da pochi strati di cellule.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Padova.
(2) Nella seduta dell'11 gennaio 1947.
(3) «Züchter» 1936 e 1939.

Anche questo strato con l'inumidimento è pochissimo estensibile e rappresenta quello strato limitante che è stato ampiamente studiato dal prof. Gola per le sue proprietà di semipermeabilità.

Tra il tegumento esterno e l'embrione non si trova alcun altro strato di cellule, salvo che in corrispondenza del polo maggiore, dove è interposto, tra il tegmen e le foglie cotiledonari, un tessuto che si deve riferire all'albume.

Il Veh, sopracitato, riferisce appunto alla presenza di questo albume il fattore d'impedimento della germinazione.

L'embrione che è avvolto dai due tegumenti sopraricordati è costituito da due ampie foglie cotiledonari, le quali occupano tutta la parte più espansa del seme e avvolgono la piumetta situata assai profondamente fra le foglie cotiledonari; la piumetta a sua volta è assai prossima alla radichetta, lunga poco più di un millimetro, la quale costituisce l'estremità più ristretta dell'embrione.

Constatata l'esattezza dell'osservazione di Veh e riferendomi all'accenno da lui fatto dell'albume quale sede del fattore ostacolante, mi sono chiesta quale modificazione possa verificarsi nell'albume durante la lunga permanenza del seme sottoterra, alla quale si possa attribuire il passaggio dalla fase d'inerzia a quella di germinazione.

La singolare costituzione delle cellule dell'albume aventi nucleo triploide e destinate a non differenziarsi mai, aventi una durata che non supera quella del seme in riposo, poteva far supporre qualche inavvertito particolare modo di degenerazione di esso. Ma un attento esame citologico dal periodo immediatamente seguente alla fecondazione fino a quello che segue la maturazione del seme, nonchè durante il periodo germinativo, quando si dovrebbe verificare quel *quid* che abolisce l'impedimento germinativo, mi hanno persuaso che nulla vi avviene che già non si conoscesse per gli albumi in genere.

Pensai quindi che l'albume potesse essere sede durante il lungo periodo di riposo, non di variazioni morfologiche, quanto piuttosto di modificazioni chimiche. Ricercai se l'albume fosse sede di qualche principio tossico che scompaia con il tempo.

Seguii a questo fine la tecnica che si usa per saggiare il valore delle auxine presenti in un tessuto vegetale: agar lavato disteso in lamelle sulle quali si posa il tessuto in esame, dal quale le auxine fuoriescono e rimangono assorbite dall'agar.

Sopra dei piccoli rettangolini di agar posi per quattro giorni quelle piccolissime porzioni di albume che riuscivo a staccare da una quantità di semi sbucciati; il tutto in camera umida, onde evitare l'essiccamento, e in ambiente refrigerato per evitare l'attività dei microorganismi, e rendere così possibile un prolungato periodo di assorbimento delle sostanze solubili eventualmente contenute nell'albume.

Così, supponendo caricato l'agar delle sostanze tossiche dell'albume, vi impiantai, con l'apice radicale, alcuni embrioni sbucciati completamente dai tegumenti seminali e dell'albume. Posto questo sistema

in camera umida a 20° non si verificò mai alcun impedimento germinativo. Non raccolsi quindi alcun elemento tale da far accogliere l'ipotesi del Veh.

Poichè era chiaro che a tegumento presente la germinazione era assai ritardata, mentre a seme sbucciato essa si svolgeva rapidissima, fissai la mia attenzione sul tegumento stesso e sui suoi annessi:

a) una certa quantità dei semi venne privata del tegumento in corrispondenza del polo cotiledonare; *b*) i semi di un'altra porzione vennero liberati del tegumento in corrispondenza del polo radicale; *c*) un terzo lotto ebbe i semi liberati dal tegumento in corrispondenza di uno dei lati più lunghi.

I semi dei tre lotti furono posti in acqua a rigonfiare e a germinare su carta bibula in scatole Petri, in confronto con altri non trattati, e con altri completamente sbucciati.

Risultato: i semi stati trattati nei modi *a*, *b*, *c*, iniziarono ben presto il movimento germinativo con un certo ritardo di tre o quattro giorni rispetto ai semi completamente svestiti; ma si verificava non tanto un ritardo nel movimento germinativo, quanto un ritardo nel disimpegno delle diverse parti dell'embrione dal tegumento avvolgente.

È da rilevare come l'organo più pronto a muoversi sia sempre stata la radichetta, verso la quale non era possibile si svolgesse un'azione tossica dell'albume, che ha sede nella parte opposta del seme. La parte più lenta e la meno differenziata fu sempre la porzione cotiledonare, cioè quella che è di sede vicina all'albume.

Si può anzi dire che in queste condizioni il movimento germinativo è caratterizzato anzitutto dall'allungamento della radichetta, successivamente dall'allungamento della piumetta, mentre le due foglie cotiledonari si vanno successivamente flettendo all'infuori con un movimento a cerniera in corrispondenza della base dei cotiledoni.

Dei tre tagli del tegumento il più favorevole era quello praticato secondo il tipo *b*, meno quello del tipo *a*; quello del tipo *c* appariva come meno efficace del tipo *a* unicamente per il fatto che esso riusciva meno utile sia al movimento della radichetta, sia ad un uniforme rigonfiamento delle foglie cotiledonari.

Ho allora seguìto l'ipotesi che l'acceleramento della germinazione sia dovuta alla favorita rigonfiabilità dell'embrione in conseguenza dell'allontanamento totale o parziale degli ostacoli frapposti dagli strati tegumentali.

Ho misurato i processi d'imbibizione del seme intero e decorticato. Furono preparati diversi lotti di semi. Un gruppo di semi essicati all'aria *a*) fu pesato in modo da conoscerne il peso totale e singolo, quindi fu posto in acqua a rigonfiare, e ripesato.

Un secondo lotto *b*) fu composto con ugual numero di semi ai quali era stato tolto il primo tegumento esterno; un terzo lotto *c*) era dato da semi ai quali era stato tolto anche il secondo tegumento.

Risultato: i semi del gruppo *a* avevano assorbito il 13 % di acqua, quelli del gruppo *b* il 43 %, quelli del gruppo *c* il 49 %.

Appare quindi evidente quanta parte abbia il tegumento se non nell'impedire, certo nel moderare l'assorbimento dell'acqua da parte dell'embrione.

Se si osservano i tegumenti dei semi germinati in condizioni naturali, cioè dopo una permanenza nel terreno di tre o quattro mesi, si osserva che in questo periodo le caratteristiche del tegumento esterno si sono profondamente modificate. Il tegumento da coriaceo, ricco di tannino, ha anzitutto perduto il suo tannino che si è diffuso nel terriccio circostante ed è diventato più facilmente sede di una flora microbica che ha attaccato il tegumento stesso; così che esso ha conservato l'integrità morfologica, ma non presenta più nulla di quella resistenza meccanica che gli era caratteristica e che ha tanta parte nella difesa del seme.

Qual'è la parte del tegumento rispetto all'inizio del movimento germinativo ?

Si possono fare due ipotesi: *a*) quella che lo strato tegumentale impedisca la respirazione del seme ricco di grassi di riserva e quindi ne modifichi l'attività funzionale; *b*) che l'azione moderatrice del tegumento si esplichi in una limitazione dell'assorbimento dell'acqua fino a impedire l'inizio del movimento germinativo.

A favore della prima ipotesi sta il fatto che parecchi semi a guscio fortemente indurito sono caratterizzati da una grande lentezza germinativa. Basti considerare i semi delle Prunoidee (pesco–mandorlo–albicocco).

Ho eseguito delle esperienze riguardo l'una o l'altra ipotesi. Ho posto dei semi di mandorlo in sabbia umida in condizioni analoghe a quelle che sono state base delle presenti ricerche. Cioè furono messi nella sabbia due lotti, uno di mandorle sgusciate e uno a guscio intero. I primi germinarono dopo 20 giorni, quelli non sgusciati germinarono, e non tutti, solo dopo tre mesi.

Due lotti di semi di egual numero, convenientemente bagnati nell'acqua per parecchi giorni fino ad essere ben rigonfiati, furono posti in recipiente chiuso e l'aria così limitata fu analizzata nel suo contenuto in CO_2. Potei così constatare che tanto i semi sgusciati che non, svilupparono quantità sensibilmente eguali di CO_2 in ugual periodo di tempo.

Ciò permette di affermare che lo spessore del tegumento non è fattore d'impedimento all'intensa attività respiratoria quale è caratteristica di un seme nelle prime fasi di movimento germinativo.

Rimane quindi esclusa la prima ipotesi che il tegumento possa ostacolare gli scambi respiratorî durante la germinazione dei semi, quando siano sufficientemente inumiditi.

A questo proposito debbo accennare ad alcune osservazioni già note da tempo, dalle quali risulta che la respirazione si può svolgere sufficientemente anche senza una provvista di acqua che sia sufficiente al movimento germinativo.

La vitalità del seme nel periodo tra l'inizio del riposo e la germinazione può essere distinta in due fasi:

a) in una prima fase i semi hanno completamente inerti i loro tessuti di riserva, non solo in quanto non sarebbe possibile immaginare dove possano migrare le eventuali riserve mobilitate, ma anche poichè mancano nei semi gli enzimi che debbono mobilitare tali riserve. Questi enzimi si formano solo dopo che si sia iniziata l'attività dei meristemi embrionali.

I tessuti meristematici invece sono sempre sensibili alle condizioni dell'ambiente esterno, e mentre possono ridurre al minimo la loro respirazione in relazione al massimo essicamento, essi appena abbiano a disposizione un po' di umidità, rapidamente accentuano la respirazione, così che il loro plasma ne risulta notevolmente logorato.

È noto come l'inosservanza delle norme di conservazione dei semi all'asciutto il più possibile determini un rapido decadimento delle loro capacità di energia germinativa.

b) per arrivare alla germinazione dei semi occorre una ben maggiore quantità di acqua che vale non solo a far respirare di più le cellule meristematiche, ma a permettere loro anche la produzione degli enzimi idrolitici e la loro attività. Questa è commisurata non solo alla quantità di molecole di acqua che debbono essere combinate con i corpi da idrolizzare, ma anche alla quantità di acqua che deve sciogliere i prodotti di idrolisi in misura tale che non si stabilizzi mai un equilibrio tra il corpo da idrolizzare e i suoi prodotti.

Si può anche ricordare il caso dei semi delle Prunoidee, le quali, come già accennai, hanno anch'essi una lentissima germinazione. In questi, a differenza delle Pomoidee, la rigidità dell'endocarpo fa sì che, in conseguenza dell'essicamento, il seme s'impicciolisca distaccandosi dalla parete dell'endocarpo, mentre nelle Pomoidee la contrazione si esercita tanto nel seme quanto nel tegumento. Con l'imbibizione tutto lo spazio tra seme e parete dell'endocarpo viene occupato dal seme imbibito, cioè da acqua. Le possibilità d'assorbimento di acqua sono quindi un po' maggiori nelle Prunoidee che nelle Pomoidee, così da poter permettere, favorita dalla temperatura, una certa produzione ed attività di enzimi. Ne risulta un aumento della concentrazione dei liquidi endocellulari, e secondo le leggi osmotiche, un aumento del turgore cellulare capace di rompere il tessuto dell'endocarpo, e portare così all'esterno il processo germinativo precedentemente iniziatosi.

Ritengo di poter concludere che in natura la lenta germinazione dei semi delle Pomoidee è determinata da un insufficiente assorbimento di acqua da parte dell'embrione; tale fatto dipende dalla resistenza meccanica dei due tegumenti.

Col progredire del periodo di permanenza dei semi nel terreno i processi di marcescenza del tegumento, distruggendone la resistenza meccanica, danno libero gioco all'assorbimento totale di acqua e allo svolgersi dei processi di germinazione. Col trattamento indicato dal Veh il libero gioco al movimento germinativo viene senz'altro determinato dall'allontanamento del tegumento. È da escludersi un'azione tossica o ormonica verso l'embrione del seme.

Ecologia vegetale. — *Analisi pollinica dell'atmosfera di Venezia*[1]. Nota di S. FOGOLARI, presentata[2] dal Socio G. GOLA.

Venezia è una città nella quale trovano spesso rifugio nella stagione primaverile numerose persone sofferenti di pollinosi; sembra che esse trovino in questo singolare ambiente, lontano da una quantità di coltivazioni, dove la vegetazione è assai limitata, una diminuzione degli attacchi ai quali sogliono andar soggetti.

La presente Nota è intesa a studiare il *plancton pollinico* dell'atmosfera della città di Venezia. Le modalità di studio sono le stesse che nell'Istituto Botanico di Padova sono state adottate per lo studio del *plancton pollinico* dell'atmosfera dell'Orto Botanico stesso e delle vicinanze di Trento, e cioè: esposizione all'aria, per il periodo diurno, di una lastra di vetro spalmata di una miscela di glicerina, formolo, acido picrico in modo da fissare, sia meccanicamente che citologicamente, tutti i granuli di polline che l'atmosfera vi avesse portato a contatto. La lastra veniva poi lavata con una uguale soluzione, ma assai più diluita, ed il liquido di lavatura era filtrato in un esile tubo su cotone: il cotone filtrante era poi addizionato di un cc. della stessa miscela, ed una goccia sempre eguale del liquido bene agitato veniva poi posta su un vetrino per allestire i preparati di osservazione. In tal modo tutto il *plancton pollinico* raccolto era concentrato in piccola e sempre eguale massa di liquido di inclusione. La lastra di vetro era esposta sopra il campanile della chiesa dei Gesuati presso il canale della Giudecca. I venti, talvolta assai forti, che soffiavano in quella zona mi costrinsero a sostituire al cristallo un foglio di acetilcellulosa, e perciò infrangibile, essendosi rotta più di una volta la lastra di vetro.

Lo studio dei granuli e la loro determinazione botanica, il numero totale di essi e delle specie rappresentate in ogni giorno di raccolta erano gli scopi principali di queste ricerche.

Di ogni raccolta venivano esaminati tre o quattro preparati ed i risultati derivavano dalla media delle osservazioni di numerosissimi campi su almeno tre preparati.

Le raccolte sono state eseguite nelle seguenti condizioni:

3	marzo	1943	vento	NE	velocità di	Km.	5	ora
19	»	»	»	NE	»	»	20	»
5	aprile	»	»	SE	»	»	9	»
20	»	»	»	NE	»	»	12	»
26	»	»	»	SE	»	»	8	»
16	maggio	»	»	NE	»	»	9	»

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Padova.
(2) Nella seduta dell'11 gennaio 1947.

21	maggio	1943	vento	NE	velocità	di	Km. 4	ora
23	»	»	»	SE	»	»	5	»
4	giugno	»	»	NE	»	»	4	»
13	»	»	»	SE	»	»	8	»
20	»	»	»	SE	»	»	7	»
9	luglio	»	»	SE	»	»	14	»
16	»	»	»	SE	»	»	14	»
26	dicembre	»						
29	gennaio	1944						

Le tabelle indicano i risultati delle osservazioni fatte.

Una vera comparsa di polline non s'inizia che ai primi di marzo; assai maggiore è la quantità che si libera alla metà di marzo; salvo che per il *Laurus*, si tratta ancora di piante grandi anemofile non solo per la spiccata natura dell'apparato fiorale, ma sopratutto per la grandissima quantità di polline che esse sono in grado di produrre. Il vento forte, il più forte che si sia riscontrato in occasione di queste raccolte, non ha portato altro che queste forme tolte ai giardini vicini. Ai primi di aprile sono ancora di gran lunga preminenti le grandi anemofile, ma appaiono in assai minor misura, granuli appartenenti a fiori dialipetali. Nella raccolta del 20 aprile, a vento piustosto forte, il numero dei granuli è ancora notevole, ma la presenza delle specie tipicamente anemofile che hanno fornito pollini è press'a poco eguale a quella di dialipetale e anche gamopetale; non però il numero dei granuli, che è sempre in maggioranza appartenente a gimnosperme o ad apetale.

Il 26 aprile, pure in periodo di grande fioritura, il numero di specie e di granuli osservati è piuttosto scarso; va esaurendosi la fioritura delle grandi anemofile e le altre specie dànno poco polline: cominciano ad apparire le graminacee. Il 26 maggio il numero delle specie pollinifere non anemofile raggiunge un valore notevole; importanti sono l'aumento dei pollini di graminacee e la prevalenza numerica del polline di *Spiraea*.

Il 21 maggio il polline delle graminacee assume la prevalenza assoluta; e, se pure a distanza, lo segue il numero dei granuli di urticacee (*Parietaria*).

Il 23 maggio con vento di SE, le graminacee tengono ancora il primo posto e subito dopo è da rilevare il gruppo delle *Spireae;* le urticacee sono poco rappresentate; ma il 4 giugno con vento di NE, sempre restando il primo posto alle graminacee, appare ancora notevole il numero delle urticacee e ancora un buon posto tiene il gen. *Spiraea*. Con il vento di SE ancora notevolissimo è il numero di graminacee, ma non meno notevole quello della *Parietaria;* graminacee e *Spiraea* tengono ancora i primi posti. Intanto s'inizia il graduale declino del numero totale di granuli nell'aria, per cadere fino a poche decine.

Anche nell'inverno il polline non manca nell'aria e ritengo che il motivo di questa presenza vada riferito alla presenza di granuli residui dispersi che vengono rimossi dalle correnti aeree, molti mesi dopo che essi sono stati emessi dalle antere.

TABELLA.

Reperti di analisi polliniche nell'atmosfera di Venezia nel 1944.

	M.			A.			M.			G.			L.			D.		
	3	18		5	20	26	16	21	23	4	13	20	9	16		29		
Gingko					1	1	6											
Taxus	6	165		6	27	4	1	6	1	1								
Cephalotaxus		1			5													
Thuya				1		2												
Juniperus						3					1		1					
Pinus					7	1	31	87	19	38	24	5	3					
Abies							3	1	2		1							
Picea							2											
Cupressus	3	70		7														
Alisma							2				1	1	2					
Potamogeton													1	1				
Iris				1														
Gladiolus									1									
Carex					5		1	7		4	2							
Pontederia													1					
Juncus										1	1							
Graminaceae						6	16	128	85	48	105	35	7	10				
Alnus	4	24			1													
Corylus	10	30		6	20		5											
Carpinus		1			3		2	5	5	1	6	3	2					
Betula				1		5	1	4		1		1		11				
Ostrya								5	3	5	9		1					
Quercus					9	2		46	5	9								
Populus	2	58		12	6													
Salix		5		6	3	3	3	1	4			1						
Ulmus	3	1426	11															
Humulus									2	3	6							
Urtica									3		18	2	3	5				
Parietaria								32	3	17	28	6	1	2				
Polygonum											1							
Rumex		1			4	2		3	2	1	1		3					

Segue: TABELLA.

	M.			A.			M.			G.			L.			D.		
	3	18		5	20	26	16	21	23	4	13	20	9	16		29		
Chenopodium									7	24	1							
Beta							1		1	9	10	2	2	1				
Amaranthus										4								
Stellaria					1			1	1		1	1						
Sagina									1									
Saponaria											1							
Buxus				2	2		8	1										
Platanus						3	3	3		1	3		1					
Magnolia				1														
Laurus		12			2													
Ranunculus					5	2	2				2			1				
Thalictrum								2		3	1	3						
Anemone								3										
Clematis				3							2	1	3					
Nasturtium										9	1		1					
Arabis											1	1						
Draba													1					
Hydrangea										2								
Ribes							4											
Spiraea					8	1	31	6	10	7	7	12	8	3				
Pirus					7		1											
Prunus					1													
Rosaceae indet.						11	2											
Mimosa										1								
Vicia							1	4	2	3								
Glycine							1	1										
Genista									1									
Hippophae							5	2			1							
Hibiscus							1	1				1						
Tilia							7	21		13	2							
Acer Negundo								1		3	1							
Foeniculum													1	1				
Heracleum									2		2		2					
Hedera															1			

Segue: TABELLA.

	M.			A.			M.			G.			L.			D.		
	3	18		5	20	26	16	21	23	4	13	20	9	16		29		
Primula							1											
Erica								2										
Azalea					8		1			1								
Solanaceae									1	2								
Scrophulariaceae												14	13	8				
Thymus									1	1								
Plantago								2	3	10	4			2				
Fraxinus				2	2	1												
Galium								4	5	11		2						
Sambucus					1			2		3	2							
Matricharia							1											
Bellis											2	1	1					
Aster												1						

La direzione delle correnti atmosferiche sembra possa determinare una differente composizione del contenuto pollinico dell'atmosfera. Tra due raccolte fatte in periodi vicini, ma con differente direzione di vento, si può rilevare una differenza nella composizione, ma una differenza si osserva anche nella quantità di granuli.

Più ricche di polline sono risultate le correnti di NE, più scarse quelle di SE. Io ritengo che la differenza vada spiegata nel fatto che il vento di NE arriva alla lastra di raccolta dopo aver sorvolato buona parte dei giardini di Venezia; mentre quelli di SE arrivano dopo aver sorvolato il quartiere della Giudecca e attraversato il largo canale della Giudecca.

In quest'ultimo quartiere è più abbondante lo scoperto e la vegetazione ha carattere arvense e ruderale, mentre nella parte centrale di Venezia sono più frequenti i giardini.

L'intensità del vento può determinare notevoli variazioni nella quantità dei pollini, specialmente se le correnti atmosferiche incontrano una pianta ad alta produzione di polline. Segnalo la raccolta del 19 marzo, la quale fornì un numero enorme di granuli dei quali l'83 % era costituito da una sola specie, anzi da un solo albero di olmo crescente in un giardino poco discosto.

Un nuovo saggio raccolto un anno dopo, il 18 marzo 1944, fornì il seguente risultato: *Taxus* gr. 10, *Corylus* 4, *Alnus* 5, *Populus* 15, *Ulmus* 4, indet. 17. L'olmo era ancora in fiore.

Le specie osservate appartengono in parti pressochè eguali a specie coltivate nei numerosi giardini di Venezia e alla flora spontanea o subspontanea.

Dei 71 generi determinati, oltre le graminacee considerate in blocco perchè la stretta uniformità dei pollini non permette alcuna determinazione specifica, la massima parte provengono da specie arboree o almeno legnose, alcune poche sono arbusti ornamentali; rimane poco più di una dozzina di specie ruderali e un paio di specie che forse sono coltivate come ortensi.

Quanto alla graminacee, se non è possibile una determinazione a base di pollini, una superficiale conoscenza della flora urbica di Venezia fa constatare come le forme a tipo pratense, nel quale sono prevalenti i gen. *Poa*, *Arrhenatherum*, *Cynosurus*, ecc. siano relativamente scarse, essendo scarsi i tappeti erbosi, e, appena un po' ben tenuti, frequentemente falciati. Le graminacce tendono ad occupare la sommità degli infiniti muri divisori, alquanto sbrecciati, sui quali è una fitta vegetazione di *Hordeum*, *Vulpia*, *Bromus*, *Eragrostis*, ecc.

L'apporto che può essere arrecato al *plancton pollinico* di Venezia è certamente maggiore da parte della flora muraria, che da quella dei giardini interni, per lo più circondati da case, e costituenti delle pozze nelle quali il gioco dei venti è assai limitato, mentre specie arboree elevate e specie erbacee sulle creste dei muri offrono all'azione del vento una larga messe di granuli.

Comunque, nulla autorizza a pensare che il polline che si raccoglie sulle lastre di vetro umettate e poste in alto sulla città possa avere un'origine meno che propinqua.

Biologia (Biofisica). — *Ricerche spettrofotometriche sulla luce emessa da batteri fotogeni*. Nota II di B. De Lerma, presentata[1] dal Corrisp. U. Pierantoni.

Distribuzione spettrale dell'energia nella luce batterica. – Le culture, luminosissime, di *Bacillus sepiae* hanno permesso di studiarne lo spettro dell'emissione luminosa con sufficiente precisione quantitativa anche nelle parti estreme di esso, ove l'intensità è di molto attenuata. Meno luminose le culture di *Vibrio pierantonii*, onde si è ritenuto opportuno effettuarne lo studio spettrofotometrico utilizzando per il confronto, oltre la lampada tarata, anche l'altra specie a più intenso potere emissivo: all'uopo si fotografavano successivamente sulla medesima lastra gli spettri delle due emissioni batteriche e quelli, in vari gradi di affievolimento, delle emissioni della lampada tarata.

(1) Nella seduta del 16 ottobre 1946.

Si è potuto in tal modo accertare che la luce emessa dai due microorganismi presenta identica distribuzione spettrale dell'energia, già indiziata ad un esame immediato dei fotogrammi, dalla posizione dei massimi di annerimento.

La relazione tra intensità e lunghezza d'onda, ricavata dallo studio della lastra, è stata trasformata nell'altra tra intensità e numeri d'onde ν per cm $\left(\nu = \frac{1}{\lambda}\right)$ che meglio si presta per considerazioni d'ordine teorico, secondo la nota relazione:

$$d\Phi = \mathcal{J}(\lambda) \cdot d\lambda = \mathcal{J}(\nu) \cdot d\nu$$

da cui si ricava:

$$\mathcal{J}(\nu) = \lambda^2 \cdot \mathcal{J}(\lambda)\ ^{(2)}.$$

Tali dati sono espressi dalla curva (fig. 4) che rappresenta l'emissione spettrale della luce batterica in numeri d'onde per cm.

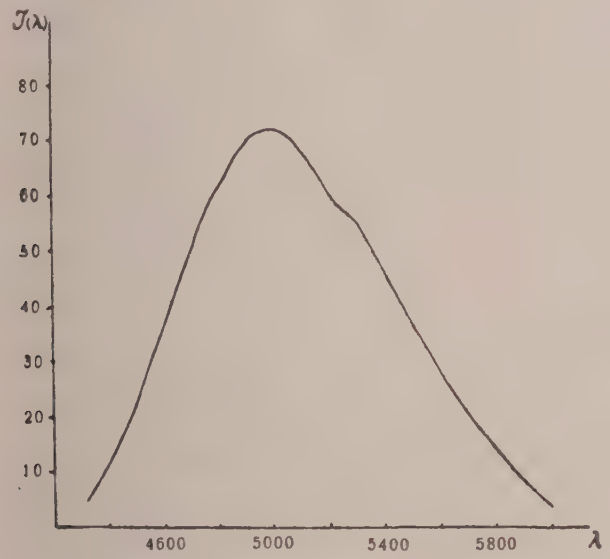


Fig. 3.

Discussione dei risultati. — Nei due microrganismi studiati lo spettro dell'emissione consiste di un'ampia banda, estesa tra 4400 Å e 5800 Å, con massimo a $\lambda = 5000$ Å ($\nu = 20.000\ \text{cm}^{-1}$), in cui l'energia è distribuita

(2) Posto, infatti, $\nu = \frac{1}{\lambda}$ si ha, differenziando:

$$d\nu = -\frac{1}{\lambda^2} d\lambda$$

ove il segno negativo sta ad indicare che ν cresce al decrescere di λ, e viceversa; onde:

$$\mathcal{J}(\nu) = \mathcal{J}(\lambda) \frac{d\lambda}{|d\nu|} = \lambda^2 \cdot \mathcal{J}(\lambda).$$

non simmetricamente rispetto al massimo: la curva $\mathfrak{J}(\lambda)$, infatti, si inflette verso $\lambda = 5300$ Å (fig. 3).

La reazione di fotogenesi è, per la sua natura chimica, un'ossiluminescenza e rientra pertanto nel tipo di quelle emissioni di chemiluminescenza che si svolgono in mezzo liquido. Van Schouwenburg e Eymers (1936) partendo dalla considerazione che nelle luminescenze dei gas vengono emessi spettri di linee, assumono che anche « in the case of such reactions (nell'ossiluminescenza batterica) in the liquid phase specific frequencies will be emitted, which, however, owing to the influence of the medium will undergo a certain broadewing and perhaps shifting ». Scomposta la curva dell'emissione di

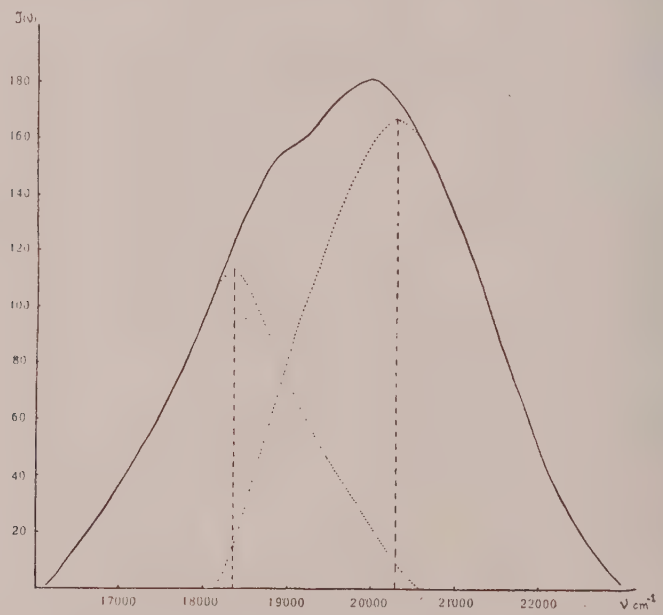


Fig. 4.

Photobacterium in componenti simmetriche, essi hanno individuato due frequenze, che considerano come fondamentali dell'emissione, di 18300 cm^{-1} e 20400 cm^{-1}.

Dallo studio dei nostri batteri abbiamo ricavato i seguenti valori: 18330 cm^{-1} e 20300 cm^{-1} (fig. 4), in buon accordo sperimentale con i dati degli autori olandesi.

È senza dubbio di notevole interesse che lo spettro della luce di *Photinus pyralis* consista di un'unica banda simmetrica rispetto alla frequenza di 17630 cm^{-1} e che ugualmente simmetrica rispetto alla frequenza di 18200 cm^{-1} (poco discosta dalla più bassa delle emissioni batteriche) sia la banda di fluorescenza emessa dalla lattoflavina (Eymers e van Schouwemburg, 1937).

Stretta somiglianza presenta con quello della luce batterica lo spettro dell'emissione di *Cypridina hilgendorfii* le cui frequenze fondamentali sarebbero, secondo i citati autori, 18200 cm^{-1} e 21250 cm^{-1}: ciò rappresenta, rispetto alla luce batterica, un leggero spostamento della frequenza più alta verso il violetto.

La luce di taluni coleotteri fotogeni (*Lampyris* e *Photinus*) si risolve ugualmente in un'ampia banda, sensibilmente spostata verso il rosso, che può essere simmetrizzata a seconda delle specie, in due o tre curve di assi 16700, 17600 e 18200 cm^{-1} (3): la più alta di tali frequenze si approssima alla più bassa degli spettri batterici. La luce dei coleotteri è infatti di una tinta più calda, tendente al giallo arancione, di quella degli ostracodi e dei batteri che invece, a seconda dell'intensità con cui rilucono, emettono bagliori luminosi oscillanti in toni di verde smeraldo e verde azzurrognolo.

Giova infine rilevare che la frequenza di 17600 cm^{-1} – comune alle emissioni delle varie specie di coleotteri studiati – rappresenta, a meno dello scarto di pochi Å, l'asse della banda spettrale della luminescenza di *Phot. pyralis*, il cui spettro sarebbe caratterizzato, s'è già detto, da una distribuzione energetica simmetrica alla detta frequenza.

Le conoscenze che possediamo a tutt'oggi sui caratteri fisici delle luci biologiche sono lungi dal consentire una visione generale del fenomeno: sembra peraltro, dai pochi dati raccolti, che esista una certa affinità tra le luminescenze degli organismi fotogeni marini, differenti per contro da quelle degli organismi terrestri, affinità che trova conferma nella coincidenza delle frequenze fondamentali delle emissioni.

I batteri fotogeni su cui si è lavorato dal lato spettrofotometrico sono stati ricavati, si è già detto, dai muscoli e da organi di animali marini. La loro luminescenza oltre alle strette corrispondenze spettrali con quella di *Cypridina*, rassomiglia moltissimo per tinta e toni alla luce emessa da una medusa (*Pelagia noctiluca*) e da un polichete (*Chaetopterus variopedatus*), come ci è risultato da lunghi e ripetuti confronti in camera oscura. L'osservazione ha soltanto valore probativo, non essendoci ancora riuscito di ottenere spettrogrammi sufficientemente densi delle emissioni di tali animali per stabilire un confronto spettrofotometrico preciso.

È probabile che la reazione di ossiluminescenza dei fotobatteri sia sempre la stessa nelle varie specie e sia da attribuire ad una medesima struttura molecolare. Ciò è, tra l'altro, indiziato dal carattere assolutamente invariantivo – già posto in evidenza dai citati autori olandesi (1936) – della distribuzione spettrale dell'energia della luce batterica di fronte a varie modificazioni di fattori esterni, quali il grado di concentrazione salina, la temperatura e la reazione del mezzo (questi due ultimi fattori entro limiti ovviamente ristretti per le esigenze biologiche; da notare che un aumento di alca-

(3) I dati relativi alle emissioni luminose dei coleotteri richiedono più precise ricerche quantitative, essendo stati essi calcolati dagli autori olandesi su dati alquanto imprecisi forniti dall'antico lavoro già citato di Coblentz.

linità del mezzo rende leggermente più intensa l'emissione), come abbiamo potuto controllare nel nostro studio.

Resta tuttora oscuro il meccanismo della reazione di fotogenesi dal punto di vista energetico, oltre che strettamente chimico. Secondo Chase (1943) lo spettro di assorbimento nell'ultravioletto di soluzioni acquose di luciferina di *Cypridina* ricorderebbe quello di alcuni derivati nafto e antrachinonici. Ci sembra che le conoscenze al riguardo potranno progredire se si affronta il problema da due lati: con una valutazione fisiologica della reazione, inquadrata nel più ampio processo di ossidazione intraorganica, secondo il più recente indirizzo di studi della scuola olandese; e con lo studio di confronto con le reazioni di chemiluminescenza che più si avvicinano, per caratteri obiettivi dell'emissione, alla luminescenza batterica (cfr. l'interessante messa a punto di Drew, 1939).

Sembra infatti accertato che, consistendo il fenomeno della luminescenza batterica in un processo enzimatico di natura intraorganica legato all'integrità della struttura vivente del microrganismo, non sia possibile condurre uno studio chimico diretto su sostanze estraibili dal corpo batterico responsabili dell'emissione.

La parte del presente lavoro relativa all'analisi quantitativa degli spettri è stata espletata nel 1939 dall'autore, presso il Biophys. Res. Group. di Utrecht. Di essa fu data comunicazione preliminare nel lavoro citato in bibliografia. È grato all'autore rinnovare i ringraziamenti più vivi al prof. Ornstein e ai Dott. K. L. van Schouwenburg e A. van der Burg che gli furono larghi di consigli e di aiuto nel corso delle sue ricerche.

NOTIZIE BIBLIOGRAFICHE

Chase Aurin, M., *The absorption spectrum of luciferin and oxidized luciferin.* « Journ. Biol. Chem. », *150* (2), 433, (1943).

De Lerma, B., *Ricerche sui batteri luminosi simbionti dei sepiolidi – Relazione di un viaggio di studi a Utrecht.* « La ricerca scientifica », a. 12, p. 1293 (1941).

Drew, D. K., *Chemiluminescence in the oxidation of certain organic substances.* « Trans. Far. Soc. », XXXV, p. 207 (1939).

Eymers, G. J. and van Schouwenburg K. L., *On the luminescence of Bacteria.* « Enzymologia », v. I, p. 107 (1936); v. III, p. 235 (1937).

Meissner, G., *Bakteriologische Untersuchungen über die symbiontischen Leuchtbakterien von Sepien aus dem Golfe von Neapel,* « Zbtl. Bakt. Parasitenk », 2 Abt., 67 (1926).

Van Schouwenburg and van Der Burg, *On the influence of carbon monoxide on respiration and ligh emission of luminous bacterien.* « Enzymologia », v. 9, p. 34 (1940).

Biologia. – *Sulla trasformazione del sesso nei Crostacei Decapodi* [1]. Nota di G. Baffoni, presentata [2] dal Corrispondente G. Cotronei.

È noto che i crostacei Decapodi, per la massima parte, sono a sessi distinti: tuttavia quasi nulla è conosciuto circa i fattori che ne determinano il sesso; gli unici dati che possediamo in proposito sono quelli fornitici dai casi di « castrazione parassitaria ».

In letteratura sono stati descritti frequentemente esemplari con caratteri sessuali secondari maschili e femminili contemporaneamente; tali anomalie si rinvengono più frequentemente negli individui parassitati da Rizocefali o da Bopiridi.

Casi di ermafroditismo vero e proprio però, sono stati raramente riferiti: sono da ricordare le ricerche su *Lysmata seticauda*, su *Calocaris machandreae* e su *Pandalus borealis*: in queste tre specie la gonade è costituita da due abbozzi, il maschile e il femminile, che maturano successivamente, prima il maschile e poi il femminile (proterandria).

In altri Decapodi sono stati descritti rari casi di ermafroditismo accessorio e di ermafroditismo occasionale; il primo, che si verifica quando la gonade presenta costantemente elementi germinali del sesso opposto: è il caso della *Gebia major*, ove gli elementi femminili, che maturano nella porzione posteriore della gonade, non arrivano mai a maturazione e si suppone che vadano incontro a degenerazione e vengano infine riassorbiti; il secondo, invece, che si verifica quando nella gonade compaiono, solo eccezionalmente e sporadicamente, elementi cellulari dell'altro sesso; esempi di tali anomalie furono descritte in *Astacus fluviatilis*, forse in *Parastacus helleri*, in *Eupagurus prideauxi*, più frequentemente se parassitato da *Peltogaster*, e in *Upogebia litoralis*. In tutti questi casi si tratta di ovociti nella gonade maschile.

Questo complesso di fatti tenderebbe a far rilevare che, almeno in alcune specie di Crostacei, la condizione sessuale sia labile. Casi di trasformazione naturale vera e propria del sesso non sono mai stati riferiti.

In questa Nota si vuole riferire sulla trasformazione spontanea, dal sesso maschile a quello femminile, di una parte della popolazione di un crostaceo decapodo: la *Callianassa laticauda* (Otto).

L'attenzione fu rivolta a questo decapodo in conseguenza di precedenti annotazioni. Studiando la percentuale dei sessi in una popolazione normale di Callianasse (circa 3.000), Reverberi [3] (1943) aveva notato che la percentuale dei maschi, pur essendo in blocco vicina a quella delle femmine (46,1 %

(1) Lavoro eseguito presso il Centro di studio per la Biologia del C. N. R.

(2) Nella seduta del 14 dicembre 1946.

(3) G. Reverberi, *Sul significato della « Castrazione parassitaria ». La trasformazione del sesso nei Crostacei parassitati da Bopiridi e Rizocefali.* « Pubbl. della Staz. Zool. di Napoli », 1943, vol. XIX, pp. 225–316.

contro il 53,9 %), risultava sempre gradualmente minore man mano che ci si avvicinava alla classi di più alto valore dimensionale. Questo reperto era stato interpretato dal Reverberi con l'ipotesi di una trasformazione del sesso di una parte della popolazione maschile delle classi più elevate. La supposizione era avvalorata da due altri fatti:

1°) che la percentuale dei maschi parassitati dalla *Ione thoracica* risultava del 32, 3 %, rispetto al 67,7 % delle femmine parassitate; ora, essendo noto che in altri crostacei il parassitismo da Bopiridi causa la femminilizzazione dei maschi, era logico supporre che l'eccesso delle femmine parassitate risultasse da individui originariamente maschi che, per azione del parassita, si erano appunto trasformati in femmine;

2°) che negli Isopodi si può provocare sperimentalmente la trasformazione dal sesso maschile a quello femminile (*Ione thoracica*: Reverberi e Pitotti, 1942) (4).

Allo scopo di addivenire alla soluzione del problema propostomi, ho studiato sistematicamente le gonadi maschili di esemplari di tutte le grandezze, specialmente di quelle maggiori, in tutte le epoche dell'anno, intensificando l'esame durante la stagione in cui le gonadi, dopo il periodo di attività sessuale, entrano in stasi (agosto–settembre). Tale studio, allo stato attuale, si basa su 179 esemplari, le cui gonadi vennero sezionate in serie complete, trasversali o longitudinali, ed esaminate accuratamente.

I dati principali raggiunti in questo esame, sono i seguenti:

1° In mezzo al testicolo di alcuni esemplari si rinvengono ovociti; la percentuale dei maschi con testicoli femminilizzati è del 6,2 %. I caratteri sessuali secondari, nei maschi in questione, non sono modificati.

Gli ovociti sono di diversi stadi di sviluppo e in diversa quantità; in alcuni esemplari ve ne è uno solo, talora tre o quattro, in due esemplari se ne contano una ventina, in un caso la femminilizzazione si estende a tutto un tratto della gonade come se tutta la gonade stesse per trasformarsi. Gli ovociti possono occupare una posizione diversa nella gonade e nello stesso acino. Il più spesso è la parte anteriore del testicolo quella femminilizzata. Nell'acino, a volte vi è un solo ovocita; a volte ne è tutto riempito, sicchè l'acino mal si distinguerebbe da una gonade femminile. In certi casi gli ovociti occupano una posizione centrale nell'acino e sono completamente circondati da elementi germinali maschili in completa e normale attività (spermatociti di primo o secondo ordine, spermatidi o spermi): è evidente, in questi casi, che uno spermatogonio ha improvvisamente cambiato il suo destino e si è diretto in senso femminile. Quali siano i fattori che possono aver determinato, nel pieno dell'attività spermatogonica, il cambiamento di un solo spermatogonio, è difficile stabilirlo.

La grandezza degli ovociti è diversa: se ne possono osservare tutte le graduazioni, in alcuni acini; nessuno degli ovociti esaminati raggiunge però

(4) G. Reverberi e M. Pitotti, *Il ciclo biologico e la determinazione fenotipica del sesso di «Ione thoracica» Montagu, Bopiride parassita di «Callianassa laticauda» Otto.* « Pubbl. della Staz. Zool. di Napoli », 1942; vol. XIX, pp. 112–182.

lo stadio di formazione del tuorlo; non è possibile giudicare se ciò dipenda dal fatto che si ha a che fare con giovani ovociti o se sia la presenza della gonade maschile che impedisca la sintesi del tuorlo: ciò sarà definito con l'esame di esemplari di epoche ulteriori.

L'aspetto di questi ovociti si presenta eguale a quello degli ovociti di un ovario normale: il loro citoplasma è granuloso, più denso in prossimità del nucleo e fibroso verso l'esterno; inizialmente molto basofilo (siderofilo), diventa mano a mano più acidofilo; tutt'intorno, disposte più o meno regolarmente, compaiono le stesse vacuolosità che si riscontrano in ovociti normali; il nucleo, generalmente eccentrico, come per gli ovociti ovarici, presenta spesso la propria cromatina a forma di un tenue reticolo in mezzo alla quale spicca il nucleolo, formazione costante, colorabile intensamense in eosina, che occupa in genere una posizione eccentrica nel nucleo. Intorno all'ovocita in sviluppo si notano cellule che lo avvolgono e lo isolano dagli elementi cellulari circostanti.

La gonade maschile, per il resto, in tutti i casi esaminati, non pare affatto modificata: la sua normalità è ampiamente attestata dall'attività degli elementi germinali presenti in tutti gli stadi. Il fatto che gli ovociti possono comparire a vari livelli, nella stessa gonade, dimostra che i processi, che danno origine alla trasformazione, si svolgono, per quanto contemporaneamente, in maniera del tutto indipendente.

2° La trasformazione della gonade maschile in femminile può essere completa: lo si può dedurre dall'osservazione di un esemplare pescato il 28 settembre; in questo esemplare, i cui caratteri sessuali secondari erano completamente maschili e nei cui testicoli macroscopicamente nulla di particolare fu ravvisato, intieri e numerosi acini sono trasformati: essi non posseggono altro che ovociti in diverso stadio di sviluppo: dalla zona germinativa centrale, come negli ovari, gli ovociti, accrescendosi, si spingono verso le pareti dell'acino in modo così evidente che, a parte lo spessore della tunica, che nell'ovario normale è notevole e che qui rimane esile come quella del testicolo, non si nota differenza con un ovario normale. La gonade è pertanto per la sua massima parte ancora maschile ed è dato di ravvisare in essa gli elementi germinali nei loro vari stadi di sviluppo. Non si sono notati nella gonade zone di degenerazione: ciò dimostra che gli elementi germinali maschili possono continuare la loro normale evoluzione accanto a elementi germinali femminili che si stanno differenziando.

3° La femminilizzazione della gonade maschile sembra più intensa negli esemplari che hanno trascorso la stagione di attività sessuale e che si preparano al nuovo ciclo riproduttivo.

Una classificazione del materiale finora a disposizione non permette al riguardo un'affermazione assoluta: di fatto, gli esemplari con gonadi maggiormente femminilizzate, si rinvengono in settembre–ottobre, nel periodo cioè di ripresa dopo il riposo sessuale.

4° La femminilizzazione è più frequente negli esemplari maschili delle classi di lunghezza maggiore: difatti la maggior parte di individui a testi-

coli femminilizzati appartiene alla lunghezza di mm. 60–65; ne furono rinvenuti però anche in individui di 35 mm.

In conclusione si può affermare che nella *Callianassa laticauda* la costituzione sessuale è labile; la trasformazione spontanea del sesso è un fenomeno ordinario in una parte della popolazione e si attua a partire dalla condizione maschile verso quella femminile. È impossibile pronunciarsi sulle cause che la determinano; però il problema può ormai aggredirsi sperimentalmente.

Biologia. – *Sul centro di differenziazione del cervello, situato nei blastomeri vegetativi anteriori dell'uovo di Ascidie dello stadio 8* [1] Nota di G. Reverberi e A. Minganti, presentata [2] dal Corrispondente G. Cotronei.

In lavori precedenti (Reverberi e Minganti, 1946 [3] *a*, 1946 *b* [4]) abbiamo mostrato che la differenziazione completa del cervello nelle larve di Ascidie è *dipendente* da un centro posto nei blastomeri vegetativi anteriori dell'uovo allo stadio 8. Richiamiamo in breve le prove che suffragano tale asserto: 1° I quartetti animali separati dai quartetti vegetativi si sviluppano in vescicole ectodermiche completamente sprovviste di tessuto neurale, o solo in piccola percentuale (25 %), muniti di limitate formazioni tubulari d'aspetto nervoso, ma che nè per forma nè per differenziazione istologica possono essere considerate come cervelli. 2° L'asportazione dei due blastomeri vegetativi anteriori in un germe dello stadio 8 è sempre seguìta, nelle larve che si sviluppano, dalla più completa assenza di ogni differenziazione neurale. 3° I due blastomeri vegetativi anteriori + i due blastomeri animali anteriori (semiembrioni anteriori) si sviluppano sempre in larve munite di cervello e relativi organi di senso.

A dare spiegazione di tutti i risultati che si ottengono in seguito all'asportazione dei diversi dianti del germe allo stadio 8, abbiamo, poi, ammesso che all'azione di detto centro faccia riscontro quella di un centro *inibitore* posto nei due blastomeri vegetativi posteriori: infatti i germi costituiti esclusivamente dal quartetto vegetativo + i due blastomeri animali anteriori (corrispondenti al tipo F delle nostre operazioni) non posseggono mai, a sviluppo ultimato, un cervello (vedi anche Rose, 1939 [5]).

(1) Lavoro eseguito presso il Centro di Studio per la Biologia del C.N.R. presso la Stazione Zoologica di Napoli.

(2) Nella seduta del 14 dicembre 1946.

(3) G. Reverberi e A. Minganti, *Le potenze dei quartetti animale e vegetativo isolati di «Ascidiella aspersa»*. « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », *20*, p. 135, 1946 *a*.

(4) G. Reverberi e A. Minganti, *Fenomeni di evocazione nello sviluppo dell'uovo di Ascidie* « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », *20*, 1946 *b*.

(5) S. M. Rose, *Embryonic induction in the Ascidia*. « Biol. Bull. », 77, p. 216, 1939.

Si trattava ora di stabilire se al centro di differenziazione cerebrale dovessero attribuirsi poteri *induttori* su territori sprovvisti delle capacità organoformative del cervello.

È necessario, a tale riguardo, ricordare che Rose (1939)[5] attribuisce ai blastomeri vegetativi anteriori addirittura il potere di un «organizzatore». Gli argomenti sui quali si fonda la supposizione di Rose sono i seguenti: *a*) il differenziamento dei semiembrioni posteriori risulta sempre incompleto rispetto a quello dei semiembrioni anteriori; in particolare, le cellule muscolari non riescono ad allungarsi nè a formare miofibrille: *b*) nelle combinazioni dei due blastomeri vegetativi anteriori (A 4,1) con i due blastomeri animali posteriori (*b* 4,2) – che contengono esclusivamente materiale presuntivo epiteliale – si ottiene, a sviluppo completato, formazione di cervello con organi di senso (27 % dei casi).

Gli argomenti di Rose sono stati criticati da von Ubisch (1940 *b*)[6] sempre sulla base di risultati sperimentali: in particolare, von Ubisch nega che i semiembrioni posteriori si differenzino meno degli anteriori; e per ciò che concerne le combinazioni A 4,1 con i due blastomeri *b* 4,2, ricorda che negli A 4,1 è contenuto materiale presuntivo del tubo neurale, e che è possibile, da una porzione di organo, ottenere, per processi regolativi, la formazione di un organo intero, più o meno armonico.

Abbiamo ripetuto su *Ascidiella aspersa* e su *Ascidia malaca* le operazioni di Rose: ciò abbiamo realizzato mediante la distruzione o l'asportazione, nel germe allo stadio 8, dei due blastomeri animali anteriori e dei due vegetativi posteriori. In totale furono eseguite 47 operazioni, di cui 16 in *Ascidiella aspersa* e 31 in *Ascidia malaca*.

I germi gastrulano contemporaneamente ai controlli, e dopo 20 ore di sviluppo (a circa 18°) originano delle larve allungate, munite di un tronco e di una coda, completamente, o quasi, avvolte dalla membrana testale. Già dallo studio in vivo si può stabilire che la coda è costituita dalle cellule cordali, disposte più o meno regolarmente in fila, e che le larve mancano completamente di organi di senso e di palpi. In un numero non troppo scarso di casi (8, tutti di *Ascidia malaca*) la coda delle larve era mobile; è opportuno ricordare, al proposito, che secondo gli schemi classici di Conklin, non vi dovrebbe essere, nelle combinazioni dette, alcuna traccia di materiale organo–formativo della muscolatura. Una formazione regolativa di muscolatura da altri territori era però stata trovata già da von Ubisch (1939[7], 1940 *a*[8]).

Lo studio in sezione delle larve conferma l'assenza dei palpi e degli organi di senso. Le differenziazioni organiche *costantemente* presenti nelle

(6) v. L. Ubisch, *Ueber die Rolle von Selbstdifferenzierung, Induktion und Selbstregulation bei Amphibien, Seeigeln und Ascidien.* « Z. wiss. Zool. », *153*, p. 279, 1940 *b*.

(7) v. L. Ubisch, *Ueber die Entwicklung von Ascidienlarven nach frühzeitigen Entfernung der einzelnen Keimbezirke.* « Roux' Arch. », *139*, p. 438, 1939.

(8) v. L. Ubisch, *Weitere Untersuchungen über Regulation und Determination im Ascidienkeim.* « Roux' Arch. », *140*, p. 1, 1940 *a*.

larve sono le seguenti: epitelio ectodermico, molto regolare, che si estende in maniera quasi sempre continua fino all'estremità della coda: il suo differenziamento si è compiuto secondo il significato prospettico posseduto dai due blastomeri animali posteriori; endoderma, spesso organizzato in intestino molto regolare, che occupa la cavità interna della porzione del tronco della larva; corda, con cellule vacuolate, disposte in file più o meno ordinate, che costituiscono, con l'ectoderma, la coda, e che si estendono, talvolta, nelle parti più cefaliche della larva. *Non costantemente* le larve posseggono: alcune cellule muscolari (2–4), generalmente associate alla corda, bene differenziate; un piccolo accumulo di cellule neurali. La proporzione delle larve che presentano quest'ultima formazione è, all'incirca, del 27 % del totale. Tali accumuli neurali non posseggono mai la forma e la struttura di un cervello: inoltre non presentano mai organi sensoriali. Si tratta di piccole masse di cellule, che non si estendono al di là di due o tre sezioni, situate nella parte più basale del tronco, tra l'epidermide e l'endoderma intestinale.

Qual'è il significato di queste formazioni ? Poichè ad esse non può essere riconosciuto il significato di cervello, esse non possono interpretarsi che come la differenziazione dei materiali neurali corrispondenti al midollo spinale, presenti nelle due cellule vegetative anteriori.

Il centro di differenziamento posto nei blastomeri vegetativi anteriori, responsabile dello sviluppo normale del cervello, non possiede, dunque, il potere di *indurre* la formazione di organi cerebrali in territori epiteliali, che non ne posseggono il relativo materiale organoformativo.

Quali sono dunque i poteri morfogenetici del centro di differenziazione vegetativo anteriore dell'uovo di Ascidie?

Volendo fare delle comparazioni, essi potrebbero essere assimilati a quelli che sono esercitati normalmente, per esempio, dalla vescicola ottica sopra l'ectoderma cefalico ad essa sovrapposto, e che possiede il significato prospettico di un cristallino. Ma è noto che, in alcuni casi, la vescicola ottica può indurre un cristallino anche da territori ectodermici (per esempio del ventre) che non sono provvisti di un tale significato.

In ambedue i casi gli A.A. parlano di « induzione » della lente da parte della vescicola ottica: talora anche si parla di « organizzazione »: così, solitamente si dice che la vescicola ottica primaria è l'organizzatore di 2° grado del cristallino.

Ora ci sembra che questi termini, quando non siano accompagnati da specificazioni necessarie, non esprimano le differenze che sono contenute nei fenomeni descritti. A noi sembra che sia profondamente diversa l'azione di un centro di differenziazione a seconda che esso determini: *a*) la realizzazione delle potenze prospettiche contenute in un territorio, e che non potrebbero mai attuarsi senza l'impulso o « chiamata » da parte del centro di differenziazione; *b*) la formazione di un organo da un territorio che non ne contiene i relativi plasmi formativi: *c*) la formazione di un embrione « secondario ».

Nel primo caso si potrebbe usare la denominazione « differenziazione dipendente », nel secondo caso si potrebbe parlare di « induzione », nel terzo caso di « organizzazione »: nel primo caso però, forse, a meglio esprimere l'impulso o « chiamata » che parte dal centro di differenziazione, si potrebbe usare, qualora non nascessero equivocazioni d'altro ordine, il termine di « evocazione ».

Con tale precisazione di terminologia noi diremo che *nella porzione vegetativa anteriore del germe di Ascidie allo stadio 8 esiste un centro di evocazione del cervello: tale centro non ha il significato di un centro di induzione e molto meno di un centro di organizzazione.*

Morfologia. — *Fenomeni di correlazione statistica nel numero delle cellule gangliari spinali nei due antimeri* [1]. Nota di E. DELORENZI, presentata [2] dal Socio G. LEVI.

Ricerche statistiche condotte da me e collaboratori nell'Istituto Anatomico di Torino sulle cellule dei gangli spinali di varie specie (Uomo, *Mus musculus*, Rana) hanno posto in luce un fatto abbastanza interessante: l'esistenza di asimmetrie, talora cospicue, nel numero delle cellule dei gangli spinali destro e sinistro in ogni singolo metamero, asimmetrie che però apparivano compensarsi vicendevolmente nei prossimi metameri, così che il numero complessivo di cellule di tutta la serie dei gangli era praticamente eguale nei due antimeri [3]. Nel corso di ricerche eseguite con altro indirizzo il Coghill dimostrò lo stesso fenomeno in *Amblystoma punctatum* [4].

Nell'esaminare dei radiogrammi della colonna vertebrale lombare fu constatato con una certa frequenza da Mazzola un fatto che, secondo il mio avviso, rientra nello stesso quadro: una asimmetria nella grandezza dei processi trasversi delle vertebre lombari, ben apprezzabile col misurarne la superficie nei radiogrammi; ed anche in questo caso l'asimmetria era compensata nei segmenti successivi [5].

Potrebbe però sorgere un dubbio, che la distribuzione delle cellule gangliari nei soggetti esaminati sia avvenuta secondo le leggi del caso in ogni metamero indipendentemente dai metameri contigui. Infatti potrebbe darsi che il numero limitato di soggetti preso in esame avesse fatto cadere l'osservazione proprio su casi in cui la fluttuazione fosse di tale entità da dare l'illusione di un compenso delle asimmetrie.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto anatomico di Torino.

(2) Nella seduta del 14 dicembre 1946.

(3) E. DELORENZI, « Monit. Zool. Ital. », 1933, XLIII, suppl.; « W. Roux' Arch. f. Entw. mech. d. Organ. », 1933, CXXX, 2; « J. Comp. Neur. », 1937, LXVI, 2; E. DELORENZI e C. FAZIO, « Riv. Patol. Nerv. Ment. », 1935, XLVI, 2; R. DULBECCO e L. MAGRI, « Monit. Zool. Ital. », 1933, XLIV, 4-5; G. RONDOLINI, « Monit. Zool. Ital. », 1934, XLV, 7; R. LEVI e E. SACERDOTE, « Monit. Zool. Ital. », 1934, XLV, 5-6.

(4) G. E. COGHILL, « J. Comp. Neur. », 1936, LXIV.

(5) P. MAZZOLA, « Boll. Accad. Medic. Torino, » 1944.

Questa critica potrebbe essere dimostrata priva di fondamento soltanto se si dimostrasse che le asimmetrie ed il compenso nei metameri successivi si verificano con costanza in un gran numero di soggetti; il che, dato il lungo tempo richiesto dal conteggio di migliaia di cellule in ciascun soggetto, è in pratica irrealizzabile.

Ho preferito invece di rintracciare in base a calcoli di correlazione statistica, se esista una dipendenza nella distribuzione delle cellule tra i vari metameri. Per questo calcolo ho utilizzato quella parte del nostro materiale di osservazione che per il numero di soggetti esaminati meglio si prestava ad un calcolo di correlazione statistica.

Per eseguire questo calcolo mi è parso che servisse bene il metodo ideato da Lovera [6] per la determinazione di un indice medio globale di correlazione e di un coefficiente di correlazione totale.

Il primo (indice medio globale di correlazione) nel caso delle mie ricerche permette, anzichè calcolare i singoli coefficienti di correlazione a due a due, di calcolare un coefficiente unico (medio globale) « r » che serve a stabilire con sufficiente probabilità se esiste una correlazione negli spostamenti metamerici positivi e negativi rispetto alla media. Tale indice viene a rappresentare il valore medio dei singoli coefficienti di correlazione, presi a due a due, tra le varie serie in esame.

Il secondo, coefficiente di correlazione totale « R », sintetizza l'entità delle correlazioni esistenti tra le diverse variabili messe in relazione tra di loro e di cui è indice « r ».

Nel caso di una serie variabile

$$\zeta = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_N$$

cioè ottenuta con la somma di N serie variabili, il Lovera ha calcolato « r » con la formula

$$(1) \qquad r = \frac{1}{N-1} \cdot \frac{\sigma_\zeta^2 - N\sigma^2}{N\sigma^2}$$

ottenuta dalla formula (15) della prima pubblicazione (6).

In questa formula N indica, come si è detto, il numero delle serie variabili (nel nostro caso il numero dei metameri), σ_ζ^2 il quadrato dello scarto quadratico medio della variabile z (cioè della somma dei valori di tutti i metameri), $\sigma^2 = \frac{\Sigma\, \sigma_{x_i}^2}{N}$ ossia la media dei quadrati dei singoli σ (cioè la somma dei quadrati di σ di ogni singolo metamero divisa per il numero dei metameri).

E tenendo conto che, per l'appunto, $\sigma^2 = \frac{\Sigma\, \sigma_{x_i}^2}{N}$ la (1) diventa

$$(2) \qquad r = \frac{1}{N-1} \cdot \frac{\sigma_\zeta^2 - \Sigma\sigma_{x_i}^2}{\Sigma\sigma_{x_i}^2}.$$

(6) G. Lovera, « Atti R. Accad. Sc. Torino », 1941-42, LXXVII e 1944-45, LXXX.

Per il calcolo di « R » il Lovera ha ricavato la formula

$$R = r\sqrt{\frac{N-1}{1+(N-2)r}} \qquad (3)$$

Per « r » il valore teorico estremo negativo di correlazione è rappresentato da $r = -\frac{1}{N-1}$. Il fatto che sia $r < 0$ significa che ciascuno degli N dati tende a compensare gli scarti degli altri N — 1 dati in modo sistematico, e cioè non con compenso statistico, puramente casuale.

« R » grado di correlazione totale, può variare tra 0 e 1, essendo tanto più stretta la correlazione quanto più esso si avvicina all'unità.

Ho pertanto applicato tali formule nel caso in questione della ricerca di una eventuale correlazione nel numero delle cellule gangliari spinali tra i vari metameri. Tra le diverse osservazioni quelle che meglio si prestano per tali calcoli, in quanto eseguite su un numero maggiore di soggetti, sono quelle sui gangli cervicali di uomo di Delorenzi (4 esemplari), sui gangli di larve di Rana aesculenta di Delorenzi e Fazio (5 esemplari). In questi casi N (numero dei metameri) è rispettivamente 3, 9; σ_t^2 lo ho calcolato pari a 157.685, a 38.202, mentre $\Sigma\sigma_{x_i}^2$ è pari a 62.106.984, a 429.861.

Perciò la formula (2) diventa per i gangli cervicali di uomo

$$r = \frac{1}{2}\cdot\frac{157.685 - 62.106.984}{62.106.984} = -0.4987$$

per i gangli di Rana aesculenta

$$r = \frac{1}{8}\cdot\frac{38.202 - 429.861}{429.861} = -0,1139.$$

I valori teorici rispettivi sarebbero

$$-\frac{1}{2} = -0,50 \quad , \quad -\frac{1}{8} = -0,125.$$

La concordanza tra i valori teorici e i valori calcolati è perciò molto grande.

Per il calcolo di « R » la formula (3) nei due casi diventa per i gangli cervicali di Uomo

$$R = -0,4987\sqrt{\frac{2}{1-(1\cdot 0,4987)}} = -0,9944$$

per i gangli di Rana aesculenta

$$R = -0,1139\sqrt{\frac{8}{1-(7\cdot 0,1139)}} = -0.7153.$$

Il valore di «R» è perciò molto elevato e prossimo all'unità (7).

L'applicazione del calcolo di correlazione ci permette di concludere che le asimmetrie nel numero delle cellule gangliari nei due antimeri non rappresentano un fenomeno contingente, ma che il compenso a dette asimmetrie segue leggi di correlazione statistica.

In che modo si stabilisce, durante lo sviluppo, tale correlazione ?

Fino a pochi anni or sono si riteneva che la cresta neurale rappresentasse la matrice esclusivamente dei gangli spinali. Oggi sappiamo che le cose stanno ben diversamente: da quest'organo derivano nell'embrione di pollo tutti i cromatofori ed elementi mesenchimali. È probabile che anche i neuroni sensitivi derivino dalla cresta neurale, per quanto qualche Autore recente lo ponga in dubbio. Comunque questa questione non riguarda il problema che ci siamo posti.

Mi sono chiesto invece se le asimmetrie ed i compensi nei segmenti successivi si stabiliscono in periodi molto precoci dello sviluppo o più tardi; o con altre parole se dipendano esclusivamente dalla migrazione dalla cresta neurale (o rispettivamente dal canale neurale come altri ritengono) di un numero vario di cellule nei due antimeri, oppure se dipendano prevalentemente da differente attività mitotica delle cellule indifferenziate nei gangli dei due antimeri.

Mi è sembrato che per rispondere a questo quesito un risultato di qualche valore si potesse ottenere già con un metodo di matematica statistica valendosi di dati già noti; e precisamente di quelli già citati del Coghill su larve di *Amblystoma punctatum*. A differenza delle altre ricerche eseguite su individui adulti o su larve prossime alla metamorfosi, con numero di cellule gangliari ormai stabilmente fissato, il Coghill ha studiato larve in stadio molto precoce di sviluppo. Egli pure riscontrò asimmetrie compensate.

Ho eseguito sui suoi dati il calcolo di correlazione. Senonchè gli scarti quadratici medi delle serie originarie del Coghill sono notevolmente diversi gli uni dagli altri a seconda che si tratta di embrioni precoci oppure in stadio di sviluppo già più avanzato. Per uniformare i vari dati ho calcolato per ciascuna serie i cosidetti *scarti normali*, usando la formula

$$(4) \qquad y_i = \frac{x_i - \alpha}{\sigma}$$

(7) Ho applicato le formule (2) e (3) anche ai dati ottenuti da MAZZOLA sui processi trasversi delle vertebre lombari di uomo (in 70 individui). In questo caso $N = 5$, $\sigma_z^2 = 0{,}2323$, $\sum \sigma_{x_i}^2 = 1{,}2166$. Allora la formula (2) diventa

$$r = \frac{1}{4} \cdot \frac{0{,}2323 - 1{,}2166}{1{,}2166} = -0{,}20225 \qquad \text{(valore teorico} = -0{,}25\text{)}.$$

Per il calcolo di «R» la formula (3) diventa $R = -0{,}2022 \sqrt{\frac{4}{1 - (3 \cdot 0{,}2022)}} = -0{,}6432$.

Si ottiene cioè un valore di «R» abbastanza elevato. Perciò anche nel caso dei dati di MAZZOLA è dimostrata l'esistenza di una correlazione tra i vari metameri.

ove x_i è un dato singolo della serie, a e σ rispettivamente la media e lo scarto quadratico medio della serie cui x_i appartiene. Si sostituiscono così alla serie degli x_i una serie degli scarti normali y_i, il cui scarto *q. m.* vale 1. In questo modo dalle serie di partenza si ottengono altrettante serie, tutte a scarto *q. m.* 1, quindi omogenee sotto questo riguardo.

Su questi dati, ben confrontabili tra di loro, ho eseguito il calcolo di correlazione come già feci per le altre serie in esame.

Applicando la formula (2), ho ottenuto:

$$r = \frac{1}{10} \times \frac{22{,}98 - 11{,}64}{11{,}64} = + 0{,}097 \qquad \text{(valore teorico} = -0{,}1)$$

mentre con la formula (3)

$$R = 0{,}097 \sqrt{\frac{10}{1 + (9 \times 0{,}097)}} = 0{,}22407$$

e cioè un valore basso, lontano da 1.

Il risultato dei calcoli fa adunque escludere l'esistenza di una correlazione nei dati ottenuti dal Coghill con il conteggio delle cellule gangliari spinali mature nelle larve di *Amblystoma* in stadio precoce di sviluppo.

Se si riflette che nell'adulto esiste invece una correlazione, è pertanto probabile che, durante lo sviluppo, in un primo tempo avvenga una suddivisione puramente contingente degli elementi nei singoli metameri, suddivisione che può anche essere tale da determinare asimmetrie compensantesi vicendevolmente, sempre però soltanto secondo le leggi del caso. In un secondo tempo invece i fenomeni di moltiplicazione cellulare non sarebbero contingenti, ma regolati da fattori ben determinati, probabilmente inerenti al territorio di innervazione dei singoli neuroni.

Riferendomi alle ricerche di Olivo e Delorenzi [8] sul coefficiente mitotico in colonie di cellule indifferenziate coltivate in vitro dalle quali emerge invece che la frequenza delle mitosi è regolata dalle leggi del caso, emerge una differenza notevole nei risultati; differenza che non deve sorprendere giacchè le leggi che regolano l'accrescimento di un organo sono sostanzialmente diverse da quelle delle colonie delle cellule.

(8) O. M. Olivo e E. Delorenzi, « Arch. f. exper. Zellforsch. », 1932, XIII.

Microbiologia. — *Intorno all'azione dell'ormone follicolare sulle fermentazioni batteriche.* Nota di G. Giolitti, presentata [1] dal Socio F. Silvestri.

Gli ormoni sessuali femminili hanno suscitato un grande interesse come fattori di accrescimento degli organismi vegetali, specie dopo che fu rilevata in essi la presenza di composti chimici assai vicini all'estriolo. Però, mentre la loro influenza sui vegetali superiori è stata esaurientemente studiata (Zollikofer [2]), tanto da far considerare l'estriolo un vero e proprio ormone vegetale, le nostre cognizioni intorno all'azione degli ormoni sessuali femminili sui vegetali inferiori sono ancora poco approfondite per quanto in genere concordino nell'ammettere che essi esplichino un'azione favorevole sulla moltiplicazione cellulare.

Prima di riportare i risultati delle mie esperienze riferirò brevemente i dati della letteratura sull'argomento:

Weber [3] sperimentando su due *Rodotorulae* osserva che la follicolina determina in esse un aumento di sostanza secca; ad identici risultati giunge Lund [4] con Progynon tecnico e cristallizzato (diidrofollicolina Schering) su *Aspergillus niger* e *Saccharomyces cerevisiae*. Mossini [5] saggiando l'azione della diidrofollicolina sulla velocità di fermentazione di *Saccharomyces cerevisiae* trova una produzione di gas che aumenta proporzionalmente alla concentrazione di ormone usato (operando con quantità massive di lievito: g. 0,714 su cc. 20 di terreno di Willstaetter e Seibelt addizionati con cc. 5 di acqua distillata contenente quantità progressive di diidrofollicolina) che è accresciuta dalla presenza di sostanze tensioattive. L'A. giunge alla conclusione che la diidrofollicolina, per i suoi gruppi funzionali caratteristici e per l'anello fenantrenico della sua molecola, eccita la fermentazione alcoolica.

Orsenigo [6] sperimenta su *Saccharomyces ellipsoideus* coltivato su mosto sterile, e determinando la quantità di anidride carbonica prodotta durante la fermentazione, trova che il materiale trattato con diidrofollicolina produce quantità assai maggiori di gas del controllo; e osserva – con materiale trattato con « Progynon oleosum » – maggior rapidità di gemmazione.

Portes, Lantz e Krajevtc [7] notano che la diidrofollicolina in veicolo idroalcoolico esercita un'azione eccitatrice sulla sviluppo numerico di *Escherichia coli* ad una concentrazione da 10.000 a 40.000 Unità Internazionali per litro di terreno colturale, questo stimolo è massimo usando 20.000 U. I.;

(1) Nella seduta del 14 dicembre 1946.
(2) C. Zollikofer, « Scientia », 1938, vol. LXIV, p. 66.
(3) Weber, « C. R. Acad. Sc. Paris. », 1936, vol. 202, p. 515.
(4) A. Lundt, « C. R. Lab. Carlsb. Sér. Physiol. », 1936, vol. 21, p. 231.
(5) A. Mossini, « La chimica e l'industria », 1935, vol. VII, p. 524.
(6) G. Orsenigo, « Riv. di Biol. », 1939, vol. XXVI, p. 260.
(7) Portes, Lantz, Krajevtc., « C. R. Soc. Biol. », 1939, vol. 131, p. 704.

al contrario per concentrazioni di 50.000–60.000 U. I. per litro non si ha eccitamento dell'attività moltiplicativa, ma comparsa di germi mal colorabili e con aspetti di involuzione.

Allo scopo di vedere se fosse possibile chiarire il meccanismo di azione dell'ormone follicolare ho intrapreso delle esperienze usando come materiale due germi, l'*Escherichia coli* e l'*Aerobacter aerogenes* [8] che pur presentando un metabolismo assai simile, differiscono per alcuni aspetti di esso (diversi rapporti nella quantità di idrogeno e di anidride carbonica prodotta, condensazione acetoinica operata dall'*Aerobacter* e non dal *Coli*, indolo prodotto soltanto da quest'ultimo germe). Nell'impossibilità di procurarmi l'ormone puro cristallizzato, ho dovuto ricorrere ad un prodotto per uso terapeutico che fosse solubile in acqua e che il controllo pratico avesse dimostrato efficiente: l'« Unden » Bayer presentava questi due requisiti.

Come terreno di coltura ho usato un terreno sintetico – nella convinzione che solo con un substrato esattamente noto sia possibile giungere a dei risultati obbiettivi – della seguente composizione: Acqua distillata cc. 1.000, asparagina g. 6,00, cloruro di sodio g. 3,00, fosfato bipotassico g. 3,00, solfato di magnesio g. 0,01, lattosio g. 15. Il pH è stato regolato a 7,2. Il terreno preparato una sola volta per ogni serie di esperienze è stato distribuito in matracci nella quantità di cc. 20 ciascuno e sterilizzato a 102° C. per 60'.

L'ormone follicolare veniva aggiunto in quantità corrispondente a 20.000 U. I. per litro sempre operando sterilmente e per ogni prova è stato fatto un controllo senza follicolina. Nei due matracci di prova e di controllo così preparati veniva seminata la specie batterica da esaminare in ragione di cc. 0,1 di una coltura di 24 ore su agar accuratamente sospesa in cc. 2 di soluzione fisiologica.

Per ogni esperienza si è determinato: il volume di gas prodotto (raccogliendolo su mercurio e calcolando il suo volume in base a quello del mercurio spostato mediante un apparecchio di mia costruzione); la acidità finale del terreno; la quantità di lattosio utilizzata, calcolata con il metodo di Bertrand; la formazione di acetoina, con i metodi di Voges–Proskauer e di Baritt; l'eventuale presenza di acetaldeide con la reazione di Schiff e di Rimini–Lewin. La quantità di germi è stata rilevata per nefelometria e più volte con la numerazione delle colonie. I germi sono stati coltivati in un bagno–maria termoregolato a 37° C.

(8) Le caratteristiche fondamentali delle due specie batteriche da me usate erano le seguenti: *Aerobacter aerogenes* (ceppo 3 della collezione del nostro Laboratorio), bastoncino asporigeno, immobile, Gram–negativo; brodo: intorbidamento diffuso con pellicola superficiale; gelatina: non fluidificata; metil rosso: negativo; reazione di Voges–Proskauer: positiva; indolo: non prodotto; cresce su terreno di Koeser.

Escherichia coli: (isolato dalle acque di Perugia), bastoncino mobile, asporigeno, Gram–negativo; brodo: intorbidamento diffuso con sedimento: gelatina: non fluidificata; metil rosso: positivo; reazione di Voges–Proskauer: negativa; non cresce su terreno di Koeser; indolo: prodotto.

Per l'*Escherichia coli*, le 10 esperienze effettuate hanno dato tanto per la prova che per il controllo risultati perfettamente identici: ugual numero di germi, uguali quantità di gas prodotto, di lattosio utilizzato, assenza in ogni caso di aldeide acetica; onde per brevità ritengo superfluo riportare in tabella i protocolli di esperimento.

Mi pare invece opportuno indicare per esteso i dati che si riferiscono allo *Aerobacter aerogenes* riportandoli sotto forma di tabella e riferendomi ai dati di una sola esperienza essendo state le 24 prove effettuate sensibilmente concordanti (vedi tabella I).

Dai dati riferiti appare evidente che la follicolina da me usata (« Unden » Bayer) dà dei risultati nettamente contrastanti con quelli di tutti gli altri autori, ma che collimano soltanto con quelli inediti ottenuti da Friggeri, il quale sperimentando con *Saccharomyces cerevisiae* allevato su melasso diluito e trattato con « Gynoestril » Maestretti (diidrofollicolina cristallizzata in veicolo idroalcoolico) ha ottenuto i seguenti risultati: metà volume di gas prodotto rispetto al controllo e formazione di notevoli quantità di acetaldeide.

TABELLA I.

Aerobacter aerogenes: coltivato a 37° in cc. 20 del terreno sintetico indicato, lattosio al Bertrand: g. 1,3775 o/°.; (corrispondente a g. 0,2755 su cc. 20).

Tempo di Esperienza	Centimetri cubi di gas prodotto		Numero dei germi per centimetro cubo	
	Controllo	Prova	Controllo	Prova
0 ore	0,00	0,00	7.700.000	7.300.000
10 »	3,00	2,00	553.000.000	414.000.000
21 »	18,50	8,00	604.500.000	357.500.000
31 »	21,50	9,00	833.500.000	359.500.000
44 »	22,50	9,50	319.000.000	304.000.000

	Controllo	Prova
pH finale	6,4	6,7
Lattosio utilizzato (su g. 0,2755)	0,1241	0,0660
Acetoina (1)	+++	—
Aldeide acetica (1)	—	+++

(1) La presenza o meno di acetoina e di acetaldine è indicata con il segno + o —, essendo state queste sostanze dosate solo qualitativamente.

Ora, per quanto l'interpretazione dei miei risultati sia resa più difficile dal fatto che l'ormone da me usato è veicolato con un solvente di natura

ignota, credo tuttavia possibile poter trarre delle conclusioni che almeno come ipotesi di lavoro possano servire a dare una interpretazione del fenomeno osservato; infatti alcune prove effettuate con « Unden » Bayer scaduto da oltre un anno, hanno dimostrata nulla l'azione del preparato. Ciò porterebbe ad escludere che i risultati ottenuti fossero dovuti al solvente, pur potendosi ammettere in via ipotetica che i miei dati siano dovuti al complesso follicolina–solvente. Secondo questo modo di vedere la follicolina agendo da sola determina un aumento della moltiplicazione batterica, agendo invece insieme al solvente usato dalla Casa Bayer, l'effetto viene ad essere completamente invertito (9).

Comunque, esaminando i miei risultati, è possibile trarne alcune deduzioni: L'azione della follicolina Bayer sperimentata su due germi assai vicini come metabolismo si è rivelata completamente diversa rispetto ad essi; l'*Escherichia coli* infatti non sembra risentire affatto dell'aggiunta dell'ormone – nè il metabolismo nè l'attività moltiplicativa vengono in alcun modo influenzati – (alcune prove effettuate con forti dosi di « Unden » – 50.000 U. I. – non hanno dato risultati diversi), mentre l'*Aerobacter aerogenes* è assai sensibile al preparato ormonico da me usato, che determina una netta diminuzione della moltiplicazione batterica della quantità di gas prodotto e di lattosio utilizzato.

L'ormone determina inoltre una profonda alterazione del processo di condensazione acetoinica; nè la reazione di Voges–Proskauer, nè quella di Baritt, pure assai sensibili, rivelano la comparsa di acetil–metil–carbinolo (che è normalmente prodotto dal germe) mentre al contrario si rileva la presenza di una quantità assolutamente anormale di aldeide acetica che dà reazioni assai nette e potrebbe essere dosata quantitativamente.

Il meccanismo di azione dell'« Unden » Bayer, sulla base dei miei risultati, si potrebbe allora spiegare ammettendo che questo interferisca nel normale processo di condensazione acetoinica con formazione di acetaldeide anzichè di aciloina (che deriverebbe dall'unione di due molecole di aldeide o da quella di una molecola di acido piruvico e una di aldeide con successiva decarbossilazione) in quantità tale da rappresentare un ostacolo al normale processo di accrescimento batterico.

Il preparato ormonico non agirebbe direttamente sulla moltiplicazione batterica, ma soltanto indirettamente attraverso la messa in libertà di una quantità di acetaldeide sufficiente per esercitare un'azione inibitrice.

(9) Vorrei a questo proposito riferire alcuni risultati ottenuti con il Gynoestril Maestretti (in soluzione idroalcoolica per uso orale) che hanno però valore soltanto indicativo in quanto sono stati ottenuti con il prodotto di preparazione anteriore al 1940 e non con preparati più recenti. Con questa follicolina essiccata in vuoto e ripresa con una quantità nota di alcool (per stabilire un controllo assai esatto) si è ottenuto notevole aumento del numero dei germi rispetto al controllo e un corrispondente aumento della quantità di gas prodotto, mentre veicolando l'ormone con glicol etilenico si è ottenuta riduzione a metà circa del volume di gas prodotto e del numero di germi, sempre rispetto ad un controllo addizionato di un'ugual quantità di glicol etilenico.

Conforta questa ipotesi il fatto che se si coltiva l'*Aerobacter aerogenes* sullo stesso terreno sintetico privo di lattosio, la conta delle colonie o l'esame nefelometrico non rivelano nessuna differenza fra i germi trattati con «Unden» Bayer e il controllo: perchè si verifichi l'azione del preparato è quindi condizione indispensabile la presenza di un glicide nel terreno di coltura.

Basandosi su questa ipotesi è chiaro anche il risultato negativo ottenuto con *Escherichia coli:* non operando questo germe la condensazione aciloinica, il suo accrescimento non può essere influenzato dall'ormone follicolare, il quale non avrebbe altra azione che quella di alterare un particolare aspetto del metabolismo microbico [10].

Biologia (Biochimica). — *L'ossidazione biologica della sfingosilfosforilcolina* [1] Nota di M. Aloisi, presentata [2] dal Socio G. Vernoni.

L'esistenza nei tessuti di notevoli quantità dell'estere sfingosinfosforico della colina, libero dal legame con l'acido grasso col quale forma la molecola della sfingomielina, è stata provata già nel 1939 da King e Small per il pancreas [1] dopo le ricerche indicative in questo senso di Booth [2], di Booth e Milroy [3] e di Smith [4], che trovarono un composto riportabile a quello in esame nel rene, nel cervello e nella placenta. Le critiche mosse recentemente dal Thannhauser e coll. [5] sulla reale esistenza di un tale estere secondario, per quanto giustificate, cadono all'esame dei dati della letteratura e degli ulteriori dati analitici che riporto in questa Nota, l'oggetto della quale, in quanto si attiene all'ossidazione enzimatica di questo composto, conferma del resto un comportamento diverso rispetto alla glicerilfosforilcolina.

L'estrazione della sfingosilfosforilcolina è stata fatta secondo la via seguìta da King e Small con lievi modifiche, che è la via in base alla quale King e Aloisi [6] hanno ottenuto dallo stesso materiale di partenza (pancreas di bue o di maiale) la glicerilfosforilcolina. In breve, l'estrazione consisteva nel trattare una soluzione acquosa deproteinizzata della polvere di pancreas di maiale con acetato di piombo basico per allontanare gli esteri fosforici primari, estrarre il residuo secco con alcool assoluto, precipitare ripetutamente con etere, purificare più volte mediante salificazione con Hg. I rapporti di P, N totale N aminico, colina (met. di Roman) erano quelli indicati da King e Small e riportabili alla molecola della sfingosilfosforilcolina. La ricerca della molecola della glicerina e dell'acido glicerofosforico, dopo idrolisi acida per l'allontanamento della colina, è stata

(10) Queste ricerche sono state iniziate con un sussidio del Consiglio Nazionale delle ricerche, e condotte a termine con la generosa elargizione dello scrittore americano Vincent Sheean.

(1) Ricerche eseguite nel Centro di Fisiopatologia del C.N.R. presso l'Istituto di Patologia generale di Roma.

(2) Nella seduta dell'11 gennaio 1947.

negativa (met. Hovey e Hodgins e di Meyerhof e Schulz), ciò che fa escludere trattarsi di glicerilfosforilcolina inquinata con qualche composto azotato del fosforo. Anche il rapporto P : N in varie fasi di precipitazione incompleta con etere si è sempre mantenuto costante.

L'estere così ottenuto, che si presenta come una massa sciropposa giallo chiara, era in quantità di circa 2 gr e proveniva da un Kg di polvere di pancreas secco.

Si discioglieva l'estere in acqua in concentrazione di 5,4 mMole % e si cimentava in vaschette di Warburg con sospensioni omogeneizzate di vari organi di cavia per determinarne l'ossidazione. Le condizioni di esperimento sono riportate a capo della seguente tabella che riassume i risultati.

Tabella I.

Condizioni di esperimento: sfingosilfosforilcolina o altro substrato 1 cc. contenente 0,054 mMole di substrato; tampone PO_4 M/15 pH 7,4 cc. 1,3; sospensione al 20% (peso fresco) di organo (omogeneizzata) in tampone analogo 0,5 cc.; NaOH (a parte) 0,2 cc. Volume totale dei liquidi 3 cc. Temperatura 38°, Gas aria.

Le cifre riportate si intendono relative al consumo di O_2 per ossidazione del substrato, cioè ottenute dalla differenza tra respirazione totale e respirazione residua del tessuto. Esse sono la media di due o tre prove.

	Fegato	Rene	Cervello	Surrene	Polmone	Cuore	Testicolo	Pancreas	Muscolo scheletrico
	mm³ O_2								
Sfingosilfosforilcolina	52.5	43.5	32.5	16	13.5	12	10	7.5	5.5
Colina	5	14.5	3	6.5	0	5	0	0	0

Dai risultati ora esposti si vede chiaramente che la sfingosilfosforilcolina viene rapidamente ossidata da alcuni organi tra cui il più attivo è il fegato, mentre altri non sono in grado di compiere che scarsamente la ossidazione.

Confrontando questi risultati con quelli desunti in altre ricerche in corso relative all'ossidazione dell'α-glicerofosfato e dell'α-glicerofosfato di colina si osserva che mentre gli esteri e base glicerica sono ossidati in larga misura dal cervello e dal rene, lo sono invece molto meno da parte del fegato, mentre, come si è visto, quest'organo è il più attivo nell'ossidazione della sfingosilfosforilcolina. In altre prove si è potuto constatare che la velocità di ossidazione è proporzionale alla quantità di substrato e non è modificata dall'aggiunta di altri substrati come glucosio, piruvato.

Durante l'ossidazione dell'estere, ma senza che si possa dare alcuna evidenza che il fenomeno è legato al processo stesso della ossidazione, si liberano piccole quantità di colina: dopo 60′ si sono titolate le seguenti quantità di colina (met. Roman):

Fegato mg 0,2800; Rene mg 0,3630; Pancreas mg 0,1388; Cervello mg 0,1268; Testicolo mg 0,0650 (queste cifre si riferiscono naturalmente

alla colina liberatasi dal substrato indipendentemente da quella che può provenire, nelle condizioni esposte, dai tessuti stessi e che era in quantità trascurabili, salvo che per il pancreas che nello stesso tempo ha messo in libertà mg 0,0940 di colina). Nello stesso tempo non si aveva, in prove allestite con altra miscela tampone, ma sempre allo stesso pH, apprezzabile liberazione di P inorganico.

Riferendosi alla struttura della sfingosina che ha una lunga catena con 18 atomi di carbonio ed un doppio legame tra C_{14} e C_{15} [3] è arguibile che l'ossidazione dell'estere avvenga a livello della sfingosina. È in ogni modo stabilito che l'attività ossidante verso la colina libera, saggiata a titolo di controllo, non si distribuisce fra i vari organi in modo analogo a quanto è stato trovato per la sfingosilfosforilcolina. Dai presenti esperimenti risulta infatti che il rene attacca assai più di tutti gli altri organi la colina [4], e che in ogni caso anche l'attività ossidativa del rene verso questa base è di gran lunga inferiore a quella dimostrata verso l'estere sfingosinico.

La sfingosilfosforilcolina, non mostra fatti di autoossidazione durante il breve tempo di esperienza, anche in presenza di catalizzatori metallici (Cu , Fe); ma a distanza di molto tempo (dopo oltre un anno) durante il quale era conservata in soluzione alcoolica, ma non fuori del contatto dell'aria, dimostra assai minore capacità di essere ossidata dai tessuti (con il fegato, in più prove, il consumo di O_2 si riduce al 34,6 %) il che fa pensare che sia intervenuta una autoossidazione spontanea a livello del doppio legame [5] e che per conseguenza questo sia anche il luogo della ossidazione biologica.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI.

[1] E. J. King e C. W. Small, « Biochem. J. », *33*, 1135, 1939.
[2] F. J. Booth, « Biochem. J. », *29*, 2071, 1935.
[3] F. J. Booth e T. H. Milroy, « J. Physiol. », *84*, 32, 1935.
[4] D. H. Smith, « Biochem. J. », *29*, 2067, 1935.
[5] G. Schmidt, B. Herschman e S. J. Thannhauser, « J. Biol. Chem. », *161*, 523, 1945.
[6] E. J. King e M. Aloisi, « Biochem. J. », *39*, 470, 1945.
[7] H. E. Carter, F. G. Glick, W. P. Norris e G. E. Philips, « J. Biol. Chem. », *142*, 449, 1942.
[8] P. J. G. Mann e J. H., Quastel, « Biochem. J. », *31*, 869, 1937.
[9] P. G. Mann, H. E Woodward e J. H. Quastel, « Biochem. J. », *32*, 1024, 1938.

(3) Secondo le recenti prove fornite da H. E. Carter e Coll. [7] basate sulla ossidazione della sfingosina con HIO_4 la formula della base sarebbe la seguente:

$$CH_3-(CH_2)_{12}-CH=CH-CHOH-CHNH_2-CH_2OH.$$

(4) Sull'ossidazione della colina da parte del fegato v. Mann, Woodward e Quastel [8] e Mann e Quastel [9].

(5) Con ossidanti inorganici energici questo è il punto di ossidazione e di rottura della catena.

Embriologia Sperimentale. — *Ricerche preliminari di meccanica dello sviluppo sull'embrione di «Petromyzon planeri»*[1]. Nota di L. RAUNICH, presentata[2] dal Corrisp. G. BRUNELLI.

Ho avuto occasione di eseguire negli anni 1943, 1945 e 1946 una numerosa serie di esperimenti su embrioni di *Petromyzon planeri*, con lo scopo di indagare dal punto di vista causale lo sviluppo dei vari abbozzi di organi (sui quali sappiamo ancora molto poco), ed istituire un paragone fra questi embrioni e quelli, molto più studiati, degli Anfibî. Non ho raggiunto lo scopo prefissomi, avendo dovuto lamentare un'altissima mortalità fra gli operati, la quale secondo ogni probabilità era attribuibile a un difettoso allevamento degli embrioni operati, dato che per necessità di cose si dovette adottare una tecnica inadeguata in conseguenza delle contingenze belliche e delle particolari condizioni post–belliche.

Essendo però il materiale in questione ancora assai poco noto[3], non credo privo di interesse un succinto resoconto dei risultati conseguiti.

a) TRAPIANTI DI ABBOZZO BRANCHIALE. – Questo gruppo di esperimenti, col quale ho esteso ai Ciclostomi le ricerche eseguite sull'abbozzo branchiale degli Anfibî[4], conta 54 embrioni operati allo stadio in cui comincia ad abbozzarsi la parte cefalica, allevati per un periodo variabile fra 7 e 20 giorni, fissati e studiati in sezioni, raggruppati come segue:

1° trapianti di solo ectoderma branchiale: 18 casi;
2° trapianti di ectoderma e mesoderma branchiale: 17 casi;
3° trapianti dell'intera parete branchiale: 19 casi.

Nel gruppo 1° di esperimenti, l'ectoderma branchiale si è perfettamente adattato alla nuova sede: nell'ospite infatti, nella regione del trapianto, non si riscontra alcuna anomalia.

Nel gruppo 2°, i risultati sono stati molto simili; si noti però, che in qualche caso gli ospiti presentavano nella regione del trapianto qualche lieve rugosità della pelle.

Nel gruppo 3°, invece, si è avuto costantemente lo sviluppo di una vescicola, tappezzata internamente da tipico epitelio branchiale, la cui cavità veniva talvolta divisa da uno o due setti completi o incompleti in

(1) Ricerche eseguite presso l'Istituto di Anatomia comparata dell'Università di Bologna.

(2) Nella seduta dell'11 gennaio 1947.

(3) Per tutta la bibliografia rimando al lavoro del H. BYTINSKI SALZ, *Trapianti di organizzatore nelle uova di Lampreda*. «Arch. Ital. Anatomia ed Embriologia», *39*, 1937.

(4) L. RAUNICH, *Ricerche sullo sviluppo dell'apparato branchiale degli Anfibi*. – I. *Trapianti eterotopi omoplastici e xenoplastici*. «Arch. Ital. Anatomia ed Embriologia», *47*, 1942.

2 o 3 cavità; questi setti divisori rappresentano, con ogni probabilità, quelle pieghe della parete latero-ventrale dell'intestino branchiale che sollevandosi separano da esso le tasche branchiali; ciò è stato confermato anche con lo studio dei donatori, in cui si è notato l'assenza, nei casi corrispondenti, di una o due tasche branchiali.

Vediamo dunque che, analogamente a quanto si è rilevato, in linea di massima, negli Anfibî, l'endoderma branchiale sembra esplicare il ruolo principale nell'autodifferenziamento dell'apparato branchiale anche nella Lampreda; mentre i due strati più esterni presentano da soli capacità di autodifferenziamento scarse o nulle, in presenza di endoderma branchiale si differenziano secondo il loro destino in parete branchiale. Risulta inoltre che il futuro assetto dell'intestino branchiale in intestino branchiale propriamente detto e tasche branchiali è già determinato sin dal primo abbozzarsi della testa.

b) Trapianti di regione stomodeale. – Questo gruppo di esperimenti, consistenti nel trapiantare l'ectoderma della futura regione stomodeale sul fianco di ospiti dello stesso stadio di sviluppo o di stadio più avanzato, comprende operazioni eseguite a 3 diversi stadî dello sviluppo:

1° operazioni su gastrule a circa metà gastrulazione;
2° id. su gastrule verso il termine della gastrulazione;
3° id. allo stadio di « limone » (neurula chiusa).

Allo stadio di « limone » non offre difficoltà la delimitazione, entro certi limiti, della regione stomodeale. Più arduo riesce ciò in stadî precedenti, non essendo ancora il piano topografico della Lampreda noto in tutti i suoi particolari; ho perciò prelevato una serie di territori lungo il piano sagittale della gastrula media e avanzata, a partire da un territorio situato a 1/10 di settore circolare ventralmente rispetto al margine anteriore del territorio neurale presuntivo [secondo lo schema del Weissenberg (5)], e procedendo in direzione ventrale. Ho potuto disporre di 16 operazioni allo stadio di gastrula media e 21 allo stadio di gastrula avanzata; il territorio prelevato venne trapiantato sul fianco di embrioni più avanzati (stadio di «limone») colorati vitalmente con Bleu Nilo; in nessun caso tuttavia ho ottenuto un autodifferenziamento del trapianto: questo si è sempre adattato alla nuova sede, sviluppandosi in epidermide del fianco. Negli embrioni operati allo stadio di « limone » ho ottenuto, su 12 operazioni, in 9 casi lo sviluppo di una vescicola di tipico epitelio buccale. Ciò dimostrerebbe che la determinazione dello stomodeo avviene dopo la fine della gastrulazione, molto probabilmente alla fine della invaginazione dell'intestino cefalico.

(5) R. Weissenberg, *Untersuchungen über den Anlageplan beim Neunaugenkeim: Mesoderm, Rumpfdarmbildung und Uebersicht der Centralen Anlagezonen*, « Anat. Anz. », 79, 1934-35.

c) ESPIANTI – Ho potuto disporre di soli 46 espianti, per cui mi limiterò a dare soltanto un cenno. Per quanto riguarda la tecnica impiegata, dirò che quella descritta da Holtfreter [6] (1931) per gli Anfibî si adatta bene anche alla Lampreda. Negli stadî dalla neurula in poi si incontra qualche difficoltà nel separare i singoli foglietti, essendo essi uniti insieme molto tenacemente; il differenziamento istologico dell'embrione dura molto più a lungo che negli Anfibi, per cui è necessario allevare gli espianti per qualche settimana, mantenendoli a una temperatura costante di 8–9° circa e rinnovando molto spesso il liquido di coltura; non seguendo queste norme si hanno solo insuccessi. Gli espianti che muoiono non si disgregano subito come quelli degli Anfibî, ma restano coerenti; si ha così la sorpresa, qualche volta, di scoprire nello studio delle sezioni qualche espianto costituito esclusivamente di materiale necrotizzato e amorfo. Per tutte queste ragioni l'embrione di Lampreda rappresenta un materiale sperimentale molto più ingrato di quello degli Anfibî.

1. ESPIANTI DA GASTRULE. – Gli espianti di volta animale diafana dapprima si appallottolano e in seguito acquistano un aspetto spugnoso: si differenziano in cellule epidermiche tipiche disposte irregolarmente, a cordoni o vescicole. La regione blastoporale (da gastrule di media età, con volta animale ridotta di volume) si differenziano in corda (disposta per lo più in forma di lungo salsicciotto tortuoso), epidermide (molto scarsa) e una massa vitellina, che anche in espianti di 22 giorni non si è ulteriormente differenziata; non ho notato tessuto nervoso.

2. ESPIANTI DA NEURULE. – Gli espianti di piastra midollare con substrato, si sono differenziati in tessuto nervoso e corda. Espianti della regione opposta al blastoporo hanno dato vescicole costituite da epidermide all'esterno e da intestino cefalico all'interno (quest'ultimo molto ricco di vitello rispetto ai controlli).

(6) J. HOLTFRETER, *Ueber die Aufzucht isolierter Teile des Amphibienkeimes. II. Züchtung von Keimen und Keimteilen in Salzlösung.* « Roux' Arch. », *124*, 1931.

Relazione del prof. G. De Ruggiero *sul viaggio compiuto negli Stati Uniti per rappresentare l'Accademia dei Lincei nei due Congressi di Filadelfia e di Washington, promossi dalla Philosophical Society e dall'Academy of Sciences.*

Sig. Presidente,

Per incarico ricevuto dalla S. V. mi sono recato il 16 ottobre u. s. a Filadelfia, come rappresentante della nostra Accademia nel congresso di filosofia che s'inaugurava quel giorno sotto gli auspici della Philosophical Society, e poi, il 20 ottobre a Washington, per partecipare a un secondo congresso scientifico, indetto dall'Academy of Sciences. I due congressi sono stati in realtà un congresso solo, tenuto in due sedi diverse, e gli argomenti trattati hanno avuto un carattere scientifico, piuttosto che filosofico nel senso stretto del termine. Infatti i due enti promotori hanno denominazioni differenti, ma una sfera identica di attività, perchè la Philosophical Society, fondata da Beniamino Franklin nella seconda metà del Settecento, ha conservato il significato tradizionale che in quel tempo si attribuiva alla filosofia, come un equivalente della scienza della natura.

Scopo principale del congresso era di discutere i compiti e le funzioni della scienza in rapporto ai problemi della nuova organizzazione mondiale delle nazioni che si viene delineando attraverso l'*Uno* e l'*Unesco*. Perciò i promotori americani avevano invitato i rappresentanti delle principali accademie scientifiche e culturali di tutto il mondo, in modo da creare un ambiente internazionale appropriato all'universalità dei temi da trattare.

Ad eccezione della Germania, le principali nazioni dell'Europa, delle due Americhe, dell'Asia, dell'Africa e dell'Oceania erano rappresentate. E, poichè le varie accademie nazionali erano elencate in ordine di anzianità, la rappresentanza dell'Italia ebbe un posto di onore nel congresso, essendo l'Accademia dei Lincei più antica di tutte le altre consorelle.

L'organizzazione del congresso è stata per ogni riguardo inappuntabile. Tutte le spese di viaggio e di soggiorno dei congressisti sono state sostenute dalle società invitanti; ed al termine dei lavori essi sono stati invitati a compiere un giro pei principali centri americani di cultura, dall'Atlantico al Pacifico, avendo come loro guide i professori di tutte le università visitate, i quali si sono prodigati per rendere quel giro interessante e istruttivo al più alto grado. Debbo anche aggiungere che la massima cordialità ha regnato tra i congressisti e i loro ospiti, e che l'Accademia dei Lincei è stata particolarmente festeggiata nella persona del suo rappresentante.

Era la prima volta che degli studiosi provenienti da paesi che erano stati in guerra tra loro si riunivano insieme; e nessuna traccia dei precedenti attriti ha mai turbato la cordialità del loro incontro. Il mondo della cultura ha totalmente superato le antitesi della guerra; il che costituisce già un ottimo auspicio che gli attriti ancora persistenti in altri settori possano esser presto eliminati e che l'umanità possa, con un nuovo spirito di concordia, affrontare i problemi della riorganizzazione mondiale, dopo i passati sconvolgimenti.

È stata una felice idea quella dei promotori del congresso di saggiare in via preliminare quei problemi in rapporto alle loro premesse scientifiche. Alle scienze naturali infatti incombe il compito di porre le basi di quelle applicazioni tecniche e industriali a cui è in gran parte affidata la possibilità di una ricostruzione di ciò che la guerra ha distrutto. Per un altro verso ad esse viene attribuita dalla coscienza comune la responsabilità della creazione di quegli strumenti micidiali che sono stati impiegati nella guerra e di quelli che, nella nuova era atomica, minacciano di distruggere totalmente tutti i frutti della civilizzazione umana.

Ora se è vero che, nella mobilitazione totale delle forze contendenti, le scienze hanno avuto una parte preponderante nell'apprestamento dei mezzi bellici; è anche vero – e le dichiarazioni concordi di tutte le rappresentanze scientifiche nel congresso ne hanno dato la formale conferma – che nulla più ripugna allo spirito degli scienziati di questa distorsione della scienza, che la guerra ha provocato, dai suoi fini umanitari e civili, e che la loro aspirazione più ambita è di ricondurre la ricerca scientifica sulla via maestra della cooperazione umana per conseguire un dominio sulla natura a vantaggio della civiltà. Le scienze moderne della natura, nacquero con questo compito, e non è loro colpa, ma è colpa di un'aberrazione estranea alla loro specifica funzione, se gli strumenti da esse creati furono deviati verso fini di distruzione e di morte. Comunque, è importante notare che le più efficaci iniziative per volgere alle opere della pace i mezzi che sono stati asserviti alle distruzioni della guerra muovano appunto dai cultori delle scienze. Essi non solo hanno le capacità tecniche necessarie per compiere questo riadattamento, ma hanno anche, assai più dei comuni mortali, coscienza dei pericoli che le deviazioni della scienza dalle sue finalità possono arrecare al genere umano. L'era atomica è appena ai suoi inizî; con essa, sono state scatenate delle immense potenze naturali, che esigono forze di controllo e di dominio di cui i profani non si rendono ancora conto. Essi, che dirigono la politica delle nazioni, credono di poter maneggiare i nuovi strumenti con la stessa disinvoltura e leggerezza con cui maneggiavano gli antichi, senza accorgersi che la posta del gioco è assai diversa, perchè le sorti stesse dell'umanità, e non solo di questo o di quell'oggetto particolare delle sue interne competizioni, sono messe in questione dalla potenza dei nuovi mezzi tecnici. E sono appunto gli scienziati quelli che possono e debbono spiegare agli ignari le implicazioni delle recenti scoperte, e la necessità che la rivoluzione della tecnica sia accompagnata

da una trasformazione non meno profonda dei modi di servirsene e dei fini a cui si dovrà subordinarla.

Per questo riguardo, le relazioni presentate al congresso sono state molto istruttive, e le conversazioni private che le hanno seguite, specialmente con gli eminenti fisici che hanno collaborato alla creazione della bomba atomica, hanno suscitato nella mente dei congressisti una serie di problemi, dei quali sarebbe estremamente importante che l'opinione pubblica dei vari paesi fosse più largamente edotta.

Altre relazioni del congresso hanno avuto uno scopo più particolare, d'informare i rappresentanti scientifici di tutto il mondo dei grandi progressi compiuti dalla scienza nord–americana durante gli anni della guerra. E anche più delle relazioni, ha giovato a questo scopo informativo la visita ai laboratori scientifici delle università americane compiute dai congressisti. Sono state visitate le università di Pensilvania, di Princeton, di Columbia, di Yale, di Harvard, di Chicago, di Berkeley, di Stanford, di Pasadena. All'arrivo in ognuno di questi centri erano ad attendere i congressisti i professori delle rispettive università, e i visitatori erano divisi in gruppi, secondo le affinità delle discipline da essi coltivate, per recarsi negli istituti, i cui lavori più direttamente li interessavano. La visita invece era collegiale, quando aveva per oggetto le realizzazioni scientifiche d'interesse comune a tutti. Tale per esempio è stata la visita al colossale *ciclotrone* testè costruito a Berkeley per i nuovi esperimenti atomici; quella all'osservatorio astronomico di Monte Wilson, e al nuovo osservatorio di Palamar, dove entrerà tra breve in funzione il telescopio con lo specchio di duecento pollici, quella dal Grand Canyon, che è stata seguita da importanti discussioni dei geologi sull'origine dell'imponente fenomeno.

I congressisti hanno avuto inoltre il piacere di partecipare alle feste commemorative del bicentenario dell'università di Princeton, durante le quali alcuni congressisti sono stati insigniti della laurea *honoris causa* e al centenario della *Smithsonian Institution* di Washington, che ha dato ad essi l'occasione, non solo di ammirare i musei e le gallerie della grande istituzione, ma anche di seguire, attraverso una riuscita ripresa cinematografica, commentata dalla viva voce del direttore di una delle spedizioni archeologiche, un'importante opera di scavi compiuta nelle regioni meridionali del Messico.

Le gallerie d'arte, i musei, i giardini botanici e zoologici, le biblioteche, i collegi universitari, nazionali e internazionali, delle principali città dove hanno soggiornato, sono stati anche essi oggetto di visite dei congressisti, i quali hanno potuto così formarsi una viva idea dell'imponenza di quel che l'America ha realizzato in tutti i campi della cultura, e dello spirito democratico che circola in tutta l'opera che essa ha compiuto e va compiendo.

Un particolare interesse ha suscitato nei congressisti la visita agli stabilimenti dell'R.C.A. presso Princeton, dove un complesso di circa seicento persone, tra professori assistenti e tecnici, lavora assiduamente

per utilizzare le nuove scoperte scientifiche, specialmente nel campo elettronico, in servizio della radio e del cinema. Alcuni impressionanti esperimenti di televisione e l'impiego di un cannocchiale, che trasformando i raggi infrarossi in raggi luminosi, permette di vedere all'oscuro, hanno dato ai congressisti la misura, non solo di quel che si è realizzato in questo campo delle applicazioni scientifiche, ma anche più, di quel che l'America potrà in un prossimo avvenire realizzare, facendo convergere, come essa fa, in una felice sintesi, l'imponenza dei suoi mezzi materiali col reclutamento delle capacità scientifiche e tecniche più appropriate all'utilizzazione di essi.

In conclusione, questo viaggio nord–americano ha rivelato a me, che per la prima volta uscivo dall'Europa, un'America allo zenith del suo cammino; un'America che non appare affatto spossata dall'immenso sforzo bellico compiuto, ma che anzi dà l'impressione di avere impegnato in esso una parte soltanto delle sue energie; e insieme un'America che non s'è lasciata prendere del demone dell'orgoglio per le grandi gesta compiute, ed è semplice, umana, cordiale, come s'addice a coloro che, essendo veramente forti, non hanno bisogno di ostentare la loro forza; e, ciò che più conta, mostra uno zelo missionario per volgere a scopi pacifici le attività di cui ha dato prova nella guerra. Questa conversione dalla mentalità di guerra alla mentalità di pace, per la rapidità stessa e lo slancio con cui s'è venuta effettuando, ha potuto determinare temporanei squilibri nella sua vita interna; ma se si considera l'animo che la guida, non può non apparire benefica e di buon auspicio per tutti i popoli. Troppo facilmente si dimentica quel che sarebbe stata una Germania vincitrice e quale abisso essa avrebbe scavato tra sè e le nazioni vinte; mentre un'America vincitrice è una garenzia di pace e di collaborazione feconda per l'umanità; è la confortante promessa che le forze intatte, anzi in via di espansione continua, di una grande nazione saranno impiegate per ricostruire quel che in tutto il mondo è stato distrutto.

Vivendo per un mese in stretto contatto con gli esponenti più alti della cultura americana, io ne ho ricavato questo senso di profonda fiducia, e sono lieto di farne partecipi i miei connazionali.

GUIDO DE RUGGERO.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente, aperta la seduta, pronuncia la commemorazione del compianto Collega prof. FEDERIGO ENRIQUES, rievocandone la figura di scienziato e di uomo.

Il discorso del Presidente, che è stato pronunciato alla presenza dei famigliari del prof. Enriques e di numerosi discepoli e studiosi, viene pubblicato integralmente nel presente fascicolo degli Atti Accademici.

Terminata la commemorazione il Presidente dà lettura di un telegramma dei proff. Caldonazzo, Campedelli, Maroni e Sansone dell'Università di Firenze, che si sono associati spiritualmente alla rievocazione dello scienziato scomparso.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente porge il saluto dell'Accademia al prof. Alessandro Ostrowski, dell'Università di Basilea, che assiste alla seduta.

Il Presidente invita il Socio E. Amaldi a illustrare brevemente la visita che egli ha recentemente compiuta a laboratori fisici degli Stati Uniti.

Il Socio E. Amaldi illustra alla Classe il suo viaggio, effettuato dal settembre al dicembre del 1946, durante il quale egli ha visitato le principali università e i principali laboratori fisici americani, soffermandosi a Nuova York, ove ha partecipato a un congresso di 1200 fisici nucleari, a Princeton, a Ithaca, a Cambridge, a Chicago e a Washington.

Mette in rilievo l'importanza dei mezzi a disposizione delle Università e degli istituti scientifici americani e i giganteschi risultati ottenuti in particolar modo nel campo tecnico. Ritiene che quantunque oggi sia più sviluppato negli Stati Uniti, per quanto attiene alla fisica, il campo tecnico, rispetto a quello puramente scientifico, fra qualche anno sarà possibile ottenere importantissimi risultati anche dal lato scientifico.

Parla infine della così detta « declassificazione », cioè dello svincolo dal segreto imposto per ragioni militari e della libera divulgazione nel mondo scientifico delle ricerche connesse con l'energia atomica, declassificazione che avrà luogo gradualmente; in un primo tempo, fino al 60–70 per cento delle ricerche stesse.

Il Socio Carrelli chiede notizie al Collega Amaldi sullo stato culturale dei giovani delle università americane e il prof. Amaldi risponde che gli studi superiori negli Stati Uniti, per quanto attiene alla materia di cui egli è competente, si suddividono in un primo biennio a carattere tecnico, più elementare del nostro e in un secondo biennio che si può invece considerare superiore agli studi che si compiono nei corsi degli ultimi anni presso le nostre Università. Caratteristica di entrambi i bienni è il grande numero

di insegnanti a disposizione degli studenti, l'imponenza dei mezzi e la frequenza alle esercitazioni pratiche.

Il Presidente Castelnuovo ringrazia il Collega Amaldi per l'interessante esposizione che ha dato modo alla Classe di approfondire aspetti poco conosciuti della vita scientifica e culturale americana.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Corrispondente Boaga presenta una sua monografia dal titolo: « La deviazione della verticale in Italia », e mette in rilievo il fatto che studi completi sulla deviazione della verticale sono stati eseguiti all'estero, mentre in Italia, pur essendo stato effettuato un grande numero di osservazioni, non si è mai provveduto finora a raccogliere in un quadro d'insieme i risultati ottenuti.

Il Presidente ringrazia il Collega Boaga per l'importante contributo che egli ha dato alle ricerche sulla verticale.

Il Segretario Accademico presenta le pubblicazioni pervenute in omaggio mettendo in particolare rilievo la commemorazione del prof. Federico Giordano, tenuta dal prof. Ugo Lombardi nel Politecnico di Milano, un lavoro del dott. Gridelli sui « Coleotteri dell'Africa Orientale » e quattro opuscoli dell'ing. Zabelli riguardanti « Ricerche geofisiche minerali ».

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Giorgi, anche a nome del Collega Berzolari, legge la relazione con la quale si propone la stampa della Memoria di Gino Aringhi, dal titolo: « Il giroscopio magnetico ».

Messa ai voti, la proposta è approvata, con le solite riserve di carattere finanziario.

Il Socio Sergi, anche a nome del Collega Checchia Rispoli, legge la relazione con la quale si propone la stampa della Memoria della dottoressa Maccagno, dal titolo « Echinidi giurassici della Somalia ».

Messa ai voti, la proposta è approvata con le solite riserve.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per l'inserzione negli Atti accademici i proff. E. Amaldi, U. Amaldi, Bompiani, Brunelli, Caccioppoli, Cantelli, Cotronei, Crocco, Giordani, Picone, Rondoni, Signorini, e Vernoni.

Successivamente il Segretario Accademico legge l'elenco delle Note pervenute all'Accademia prima dell'Adunanza.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

CROCCO G. A., « Il superamento della barriera del suono in Aviazione. Nota IV. "Considerazioni completive"».

BELLINZAGHI F.,« Sulla interazione tra semi vegetali in germinazione. Nota II. "Interazione ed energia di posizione"» (pres. dal Socio P. RONDONI).

BELLINZAGHI F., « Sulla interazione tra semi vegetali in germinazione. Nota III. "Interazione e velocità di germinazione"». (pres. dal Socio P. RONDONI).

BERETTA U. e JANNELLI L., « Cinetica delle reazioni lente. Nota I. "Acetilazione dell'alcole metilico"» (pres. dal Socio F. GIORDANI).

BERETTA U. e JANNELLI J., « Cinetica delle reazioni lente. Nota II. "Acetilazione dell'alcole etilico" » (pres. dal Socio F. GIORDANI).

CARAFA M., « Risoluzione effettiva, mediante integrali definiti dell'equazione differenziale binomia: (pres. dal Socio U. AMALDI).

CATTANEO C., « Sull'attrito di rotolamento nei solidi elastici». Nota III. (pres. dal Socio A. SIGNORINI).

CASTOLDI L., « Operatori lineari nello spazio hilbertiano suscettibili di riduzione a forma normale » (pres. dal Socio L. BERZOLARI).

FORTI L., « Su alcuni aspetti del differenziamento del tessuto nervoso in condizione di espianto » (pres. dal Corrisp. G. COTRONEI).

FRANCHETTI A., « Sulla curva doppia della proiezione di una superficie generale dell' "S_4 da un punto generico su un S_3" » (pres. dal Socio E. BOMPIANI).

GHEZZO S., « Sulla conservazione dell'esistenza di radici di un sistema di equazioni, nel passaggio al limite. Esistenza di soluzioni di un sistema definito nello spazio hilbertiano » (pres. dal Socio M. PICONE).

MIRANDA C., « Problema a limiti per le equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine in forma parametrica » (pres. dal Corrisp. R. CACCIOPPOLI).

TIBALDO L., « Un teorema sulle funzioni misurabili rispetto ad una e continua rispetto ad un'altra variabile. Applicazioni » (pres. dal Socio, M. PICONE).

TORALDO DI FRANCIA G., « Sull'interferenza di molte vibrazioni con fasi distribuite a caso » (pres. dal Socio G. ABETTI).

VILLA M., « Sulle trasformazioni puntuali in una coppia a jacobiano nullo nel caso cremoniano » (pres. dal Socio E. BOMPIANI).

TEMI PER DISCUSSIONI

Il Presidente Castelnuovo ricorda che in occasione dell'ultima seduta della Classe si era parlato di esaminare la possibilità di tenere in Accademia, nel prossimo mese di maggio, una discussione sugli « ultra–virus », tema di grande importanza scientifica e pratica, sul quale potrebbero essere ascoltati non soltanto i Soci dell'Accademia, ma anche altri studiosi italiani e stranieri particolarmente competenti in materia.

Propone quindi che, subito dopo la seduta i Soci della Sezione di Patologia proff. De Blasi, Rondoni, Puntoni e Vernoni, si riuniscano insieme con i Chimici proff. Bargellini, Bonino e Giordani per uno scambio di idee sulla questione e per concordare le modalità della discussione stessa con la scelta dei relatori e con le proposte per gli inviti di studiosi non Soci della Accademia e di qualche scienziato straniero.

Il Socio Rondoni osserva che in Italia, specialmente per mancanza di apparecchi idonei, non si è potuta raggiungere, nello studio degli « ultravirus », una preparazione pari a quella che si è ottenuta all'estero. Propone quindi di invitare qualche scienziato straniero che svolga una relazione in Accademia. Successivamente l'Accademia stessa potrà indire il convegno progettato.

Il Socio Bargellini comunica che verrà in Italia tra breve lo scienziato francese P. Lepine, di cui è noto l'alto valore scientifico e la specifica competenza, a svolgere una relazione sull'argomento presso l'Istituto di Sanità Pubblica.

Il Presidente riassume la discussione invitando i sopra citati Soci patologi e chimici a riunirsi dopo la seduta per adottare le decisioni più opportune in relazione al progettato convegno.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta dell'11 gennaio 1947

BOAGA Giovanni. — *La deviazione della verticale in Italia.* Milano, Ist. Geofisico Italiano, 1946. Pp. 186, in 8°, con tavv. e figg. (Monografie di geofisica e geochimica, n. 1).

GRIDELLI E. — *Coleotteri dell'Africa Orientale. - Appunti per una monografia delle specie etiopiche del genere gonocephaleum sol.* (*Coleopt. Tenebr.*) (XIV contributo). Estr. da « Atti del Museo Civico di storia naturale di Trieste », vol. XVI, 1945, n. 1.

POLITECNICO DI MILANO. — *Federico Giordano.* 4 aprile 1874 – 23 dicembre 1944. Milano, Stamp. Tamburini, 1946. Pp. 29, in 8°.

ZABELLI Arnaldo. — *Champs d'application des recherches géophysiques minières du service Zabelli.* S. n. t. Pp. 15, in 4°, con figg.

ZABELLI Arnaldo. — *Contributo alla geofisica mineraria.* Estr. da « L'Industria mineraria d'Italia e d'oltremare », 1942, fasc. 3.

— *Contributo delle ricerche geofisiche alle ricerche minerarie nazionali.* Estr. da « L'Industria mineraria d'Italia e d'oltremare », 1940, fasc. 6.

— *Principio e modalità di impiego del metodo « Potenziali naturali » per ricerche geofisiche minerarie.* Relazione presentata nella 41ª riunione della Società Ital. per il Progresso delle Scienze. Roma, 1942, settembre–ottobre.

U. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta dell'8 febbraio 1947

Presidenza del Socio G. CASTELNUOVO

NOTE DI SOCI

Meccanica. — *Il superamento della barriera del suono in aviazione.* Nota IV [1] del Socio G. A. CROCCO.

CONSIDERAZIONI COSTRUTTIVE E CONFRONTI SPERIMENTALI. – Questa Nota ritorna sul problema del superamento della velocità del suono con ala portante, discusso nella Nota II, allo scopo di presentarne le calcolazioni sotto forma concreta e confrontarle con recenti risultati sperimentali subsonori.

Per tale scopo essa riprende anzitutto la relazione, indicata nella espressione (5) della Nota I, tra la convenzionale imboccatura, ω_0, e la luce frontale complessiva, A, di accesso alle giranti dei compressori; la cui dimostrazione fu per brevità omessa. Detta relazione discende dalla ideale ipotesi che il flusso d'aria entrante in ciascun compressore passi adiabaticamente ed in modo continuo dalla velocità di avanzamento, V_0, a quella, V_a, di accesso alla luce, A, delle giranti; ove sia prestabilito un massimo numero di Mach, M_a. Partendo dalla imboccatura ω_0, per la quale sia M_0 il numero di Mach, c_0 e T_0 la velocità del suono e la temperatura esterna; ed attraverso una sezione ristretta, ω_1, ove si supponga raggiunta la velocità locale del suono, c_1, ed una temperatura T_1; il fluido perviene quindi alla sezione di luce A, dove raggiunge il prescritto numero di Mach M_a rispetto alla locale velocità del suono c_a, dipendente dalla locale temperatura T_a.

L'ipotesi considera la continuità di portata

$$\omega_0 \rho M_0 c_0 = \omega_1 \rho_1 c_1 = A \rho_a M_a c_a , \tag{35}$$

dove ρ, ρ_1, ρ_a sono le corrispondenti densità dell'aria; e trascura, per velocità ultrasonore, l'effetto d'aspirazione del compressore nel determinare le temperature.

(1) Presentata nella seduta dell'11 gennaio 1947.

Si potrà allora porre nella (35), per $K = 1{,}4$,

$$(36)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{c_a}{c_1}\right)^2 = \dfrac{T_a}{T_1} = \dfrac{1 + 0{,}2}{1 + 0{,}2\, M_a^2} \quad ; \quad \dfrac{\rho_a}{\rho_1} = \left(\dfrac{T_a}{T_1}\right)^{\frac{1}{K-1}} ; \\ \left(\dfrac{c_a}{c_0}\right)^2 = \dfrac{T_a}{T_0} = \dfrac{1 + 0{,}2\, M_0^2}{1 + 0{,}2\, M_a^2} \quad ; \quad \dfrac{\rho_a}{\rho_0} = \left(\dfrac{T_a}{T_0}\right)^{\frac{1}{K-1}} ; \end{cases}$$

e quindi ricavarne, sempre per $K = 1{,}4$:

$$(37)\qquad \frac{\omega_1}{A} = M_a \left(\frac{1 + 0{,}2}{1 + 0{,}2\, M_a^2}\right)^3 \quad ; \quad \frac{\omega_0}{A} = \frac{M_a}{M_0} \left(\frac{1 + 0{,}2\, M_0^2}{1 + 0{,}2\, M_a^2}\right)^3 .$$

Di queste due relazioni la seconda riproduce la (5) della Nota I; mentre la prima conduce all'asserzione, implicita nella Nota I, che la sezione ristretta ω_1 è in rapporto *costante* con la luce di accesso A alle giranti.

Se ora, per lo scopo concreto cui mira questa Nota, si prende $M_a = 0{,}5$ (alquanto maggiore di quello dedotto da altri studiosi) si ottiene in cifre tonde

$$(38)\qquad \frac{\omega_1}{A} = 0{,}75 \quad ; \quad \frac{\omega_0}{A} = 0{,}432\, \frac{(1 + 0{,}2\, M_0^2)^3}{M_0} ;$$

formule che, sebbene con minore approssimazione, si possono estendere anche alle velocità subsonore. Si ricava in tal caso l'eguaglianza $\omega_0 = A$ approssimatamente per $M_0 = 0{,}5$, che rappresenta quindi un limite inferiore di applicazione; dal quale il rapporto tra ω_0 ed A discende sino a 0,75 per $M_0 = 1$ e poi risale. Per $M_0 = 2$ è già di 1,25. La imboccatura ω_0 risulta quindi, come si è detto, *variabile*.

Per potere assumere una entità costante atta a definire le dimensioni delle giranti, conviene perciò prendere la stessa luce A; che si può ritenere connessa dalla pratica costruttiva col diametro delle giranti medesime, D. Una corrente relazione in proposito, se si ci riferisce come nel nostro caso ad una *coppia* di reattori, è $A = 2 \cdot 0{,}32\, D^2$; che consente di calcolare D, quando A sia determinata dalla velocità di regime che si vuol conseguire con un dato velivolo ultrasonoro.

Ponendo pertanto in evidenza la grandezza costante A, al posto della variabile ω_0, nelle espressioni della massa d'aria entrante, nell'unità di tempo, $m = \rho \omega_0 V_0$; e della spinta complessiva dei reattori di un dato velivolo, $F = m\, C_F\, V_0$, dove C_F si rileva dalle calcolazioni della Nota I; si ottengono le nuove espressioni

$$(39)\qquad m = 0{,}432\, A c_0\, \rho\, (1 + 0{,}2\, M_0^2)^3 ;$$

$$(40)\qquad F = 0{,}432\, A c_0^2 \cdot \rho\, (1 + 0{,}2 M_0^2)^3 \cdot C_F\, M_0 ;$$

che dànno luogo a interessanti deduzioni.

Infatti, se si stabilisce il numero di Mach M_{0E} per il quale si vuole che la spinta di una coppia di reattori debba equilibrare la resistenza di un

velivolo ultrasonoro, definito dal suo coefficiente di resistenza C_r; si potrà determinare A, e quindi D, dalla relazione

$$\frac{A}{S} = \frac{C_r M_{oE}}{0{,}432\, C_F \left(1 + 0{,}2\, M_{oE}^2\right)^3}; \tag{41}$$

nella quale C_r è desumibile dalla Nota II nel caso di volo a quota economica.

Posto, per un esempio concreto, $M_{oE} = 2$; per cui si ha $C_F = 0{,}55$; ed in volo a quota economica $C_r = 0{,}03$; si ricava $A = 0{,}0437\, S$. Cosicchè, per un velivolo di carico alare 260 Kg/mq. e del peso di 6400 Kg., che corrisponde a $S = 24{,}6$ mq., si ricava $A = 1{,}07$ mq.; e, per la citata relazione costruttiva fra A e D, si ottiene $D = 1{,}29$ m., in cifra tonda, per ciascuno dei due reattori. Alla quota economica, alla quale corrisponde la minima resistenza e per cui è $\rho_E = 0{,}0055$, risulta allora la spinta necessaria dei due reattori in Kg. 1465; il che dà una potenza utile di 11700 cavalli–spinta; se naturalmente si concretano le ipotesi indicate.

È interessante il confronto di questo risultato del calcolo coi dati che si conoscono circa il *primato di velocità* pura conseguito dall'aeroplano da caccia Gloster-Meteor nello scorso settembre, con una velocità media di 991 Km/ora.

Il peso di questo aeroplano è appunto intorno a 6400 Kg.: e i due turboreattori che lo spingevano sviluppavano in volo una spinta complessiva di circa 3800 Kg.; corrispondente ad una potenza utile di 14.000 cavalli–spinta.

Tale potenza è pertanto superiore a quella testè calcolata per il velivolo ultrasonoro dell'esempio; ed anche se si confrontano le presumibili potenze effettive assorbite in ciascun caso dai turbocompressori, si viene alla conclusione che la potenza richiesta nel caso del nostro esempio rimane inferiore a quella richiesta dai compressori del Gloster–Meteor.

Se non che il diametro della girante dei compressori occorrenti al detto velivolo ultrasonoro, e cioè $D = 1{,}29$, risulta un po' più del *doppio* di quello dei compressori del Gloster–Meteor.

Da questo confronto emerge dunque la fondamentale conclusione che occorre un *superdimensionamento* degli attuali turboreattori per condurli a spingere un velivolo ultrasonoro a quota economica di volo con velocità corrispondente al numero di Mach *due*. Il problema costruttivo diviene quello di creare turboreattori d'*alta quota* che abbiano *pari potenza*, ma con *dimensioni raddoppiate*.

Crediamo utile di accompagnare questa interessante conclusione con una presentazione grafica della resistenza del velivolo ultrasonoro del nostro esempio in volo a quote economiche (fig. 1) e della spinta complessiva, alle stesse quote economiche, dei due turboreattori che debbono equilibrare questa resistenza in corrispondenza del numero di Mach *due* (fig. 2). Sono riportate nelle figure le *densità relative* di volo corrispondenti alle quote

economiche; e le *imboccature* di ciascuno dei due reattori, calcolate per A = 1,07 mq.; cioè per D = 1,29 m. di ciascun reattore.

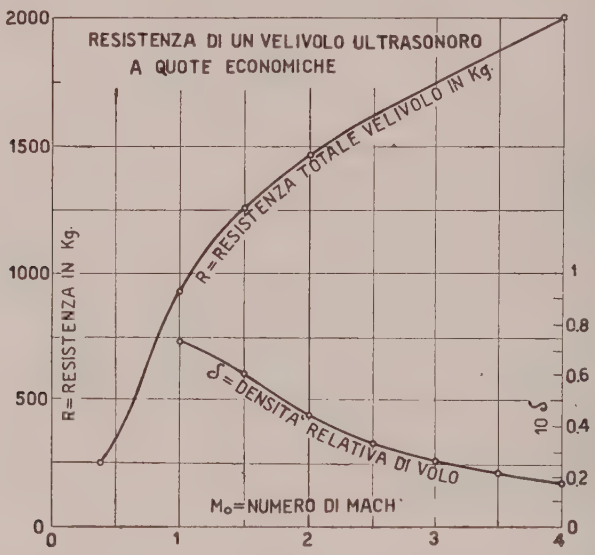


Fig. 1.

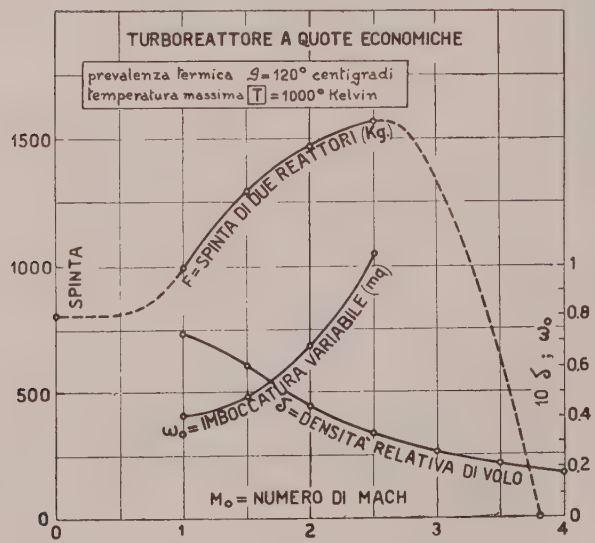


Fig. 2.

Abbiamo poi sovrapposto le due curve (fig. 3) per ricavarne un'altra deduzione. La figura 3 mostra infatti la singolarità, coi dati prescelti, che la curva della spinta complessiva dei due reattori, eguale per ipotesi alla resistenza del velivolo per il numero di Mach *due*, si adagia interamente

sulla curva della resistenza con lieve eccesso per gli altri numeri di Mach inferiori, sino al numero *uno*. Cosicchè nel tratto tra *uno* e *due* si ottiene quasi un velivolo equilibrato per qualsiasi velocità; o *indifferente*, che dir si voglia.

Se ne conclude che un velivolo così motorizzato, se, dopo aver superato la velocità del suono, dovesse raggiungere le successive velocità di volo sempre a quote economiche, non avrebbe alcuna riserva di spinta sufficiente per accelerare e salire. E quindi non potrebbe praticamente affrontare la barriera del suono.

La situazione cambia interamente di aspetto se, pur preventivando la quota economica di volo per il numero di Mach *due*, si rinunzia alle quote

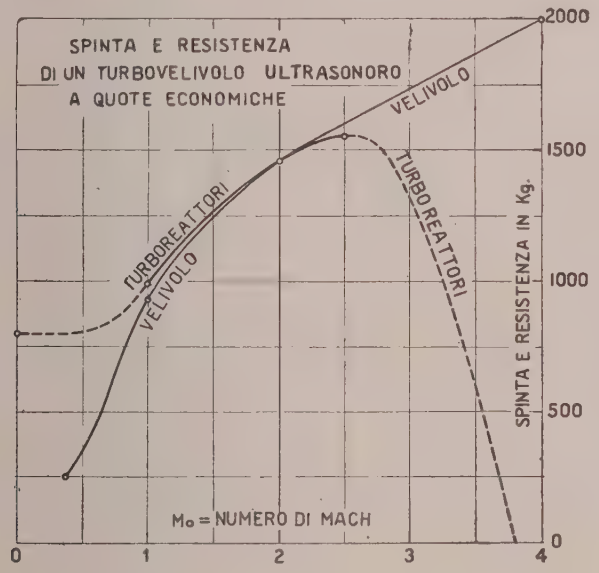


Fig. 3.

economiche per le velocità inferiori, adottando invece il criterio tecnico di tenére la minima quota di volo consentita dalla potenza massima per cui è calcolato il compressore.

È agevole precisare in genere questa potenza conoscendo la massa d'aria entrante, m; e la *prevalenza* termica, ϑ, del compressore, definita alla Nota I. La potenza del compressore, in cavalli–albero, Π_C, si può allora ricavare dalla relazione

$$75\,\Pi_C = m \cdot g\, EC_p \cdot \vartheta\,; \tag{42}$$

mentre la potenza utile, Π_S, in cavalli–spinta è data da

$$75\,\Pi_S = m \cdot C_F\, V_o^2\,. \tag{43}$$

Se ne ricava l'interessante rapporto tra la potenza del compressore e la potenza utile, per velocità ultrasonora,

$$\frac{\Pi_C}{\Pi_S} = \frac{\vartheta}{2 C_F \tau}; \tag{44}$$

dove τ è dato dalla relazione $V_o^2 = 2 g E c_p \tau$, indicata nella Nota I.

La (44) conduce ad un *minimo* rapporto per un valore di M_o prossimo a *due*.

Se ora si calcola la potenza del compressore per il volo di regime a numero di Mach *due*, valendosi della (42) e della (39); e si pone la condizione tecnica di volare a quote di egual potenza del compressore, cioè a quote per le quali risulti costante il prodotto $m\vartheta$; che, per ϑ = costante, conduce alla costanza della massa m entrante, basterà rispettare la condizione, dedotta dalla (39),

$$\rho \left(1 + 0{,}2\, M_o^2\right)^3 = \rho_E \left(1 + 0{,}2\, M_{oE}^2\right)^3; \tag{45}$$

nella quale ρ_E è la densità di volo corrispondente alla quota economica calcolata per il numero di Mach di regime, M_{oE}.

Chiameremo *quote isodinamiche*, per convenzione, le quote corrispondenti ai valori di ρ dedotti dalla (45).

Posto $M_{oE} = 2$; $\rho_E = 0{,}0055$; risulta una massa entrante di 4,44, cioè un peso d'aria di circa 45 Kg.; che conduce alla spinta di equilibrio $F_E = 4{,}44\ C_F V_{oE} = 1465$ Kg., già calcolata.

Si possono analogamente valutare le spinte fornite dalla coppia di reattori a quote isodinamiche per le altre velocità di volo, come è stato riportato nella fig. 4; dove sono segnate le *densità relative* di volo corrispondenti alle quote isodinamiche.

Occorre ora valutare le corrispondenti resistenze del velivolo, che risulteranno alquanto maggiori di quelle ottenibili a quote economiche, perchè saranno fornite dalla (15) e dalla seconda della (16) della Nota I, cioè da

$$C_r = r + hs + \frac{C_p^2}{s} \quad ; \quad C_p = \frac{Q/S}{\rho V_o^2}; \tag{46}$$

senza che sia rispettata la condizione di minimo $C_p^2 = s\,(r + hs)$.

I valori delle resistenze del velivolo così calcolate *a quote isodinamiche* sono state anch'esse riportate nella fig. 4; e rivelano una interessante eccedenza della spinta sulla resistenza; che appare più che adatta a fornire il margine occorrente all'acceleramento ed alla salita: cioè al superamento pratico della resistenza corrispondente alla barriera del suono ed all'agevole conseguimento della quota economica di regime.

Si può pertanto enunciare la seguente conclusione.

Nel mentre le *quote economiche* convengono ai voli ultrasonori di regime, in quanto che ad esse corrispondono per ciascuna velocità le minime spinte, i minimi consumi e le minime potenze del compressore; per contro a con-

seguire le velocità di regime e a superare la barriera del suono appare praticamente indicato il volo *a quote isodinamiche*, per il quale si mantiene costante la potenza del compressore. Possiamo anche chiederci se la quota economica per il volo di regime debba essere strettamente rispettata: ossia se praticamente possa riuscire più opportuna una quota minore. Si sa intanto che per una determinata velocità di regime, V_E, la quota economica fornisce la minima spinta, il minimo consumo, e, per la (44), la minima potenza del compressore. Ma essa esige una imboccatura pressochè *doppia* di quella occorrente a livello del mare.

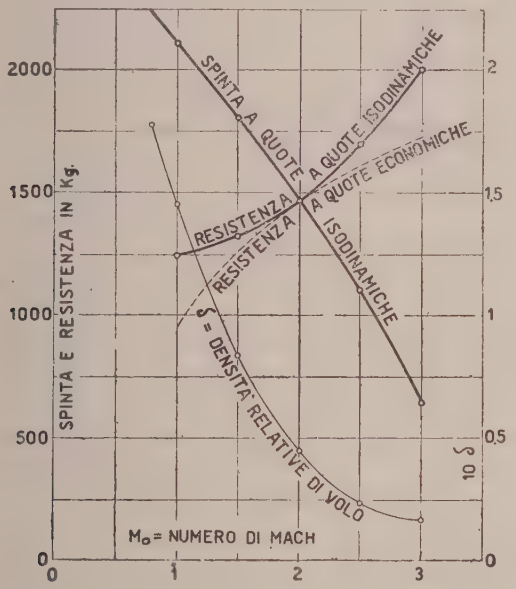


Fig. 4.

Se infatti poniamo nelle (46), per una determinata velocità V_E,

$$(47) \qquad C_p = \frac{Q/S}{\rho V_E^2} = \frac{Q/S}{\rho_0 V_E^2}\Delta = \Delta\sqrt{K\delta}\,;$$

ove ρ_0 è la densità a livello del mare; Δ la *rarefazione* dell'aria, ossia il rapporto inverso della *densità relativa*; e K una costante, definita dalle formulazioni della (47); si ottiene, per la seconda delle (17) della Nota II, indicando con ω_0 l'imboccatura a livello del mare,

$$(48) \quad C_F\frac{\omega}{S} = r + hs + K\Delta^2 \;\; ; \;\; C_F\frac{\omega_0}{S} = r + hs + K \;\; ; \;\; \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{r + hs + K\Delta^2}{r + hs + K}\,;$$

da cui, per la trascurabilità di K di fronte a $r + hs$, e dovendo essere $K\Delta_E^2 = r + hs$ per la quota economica, risulta che l'imboccatura ω_E è quasi esattamente doppia della ω_0.

Le (47) e (48) consentono poi di determinare il valore della imboccatura ω per qualsiasi altra quota definita dalla rarefazione Δ.

La corrispondente potenza assorbita dal compressore potrà analogamente scriversi

$$(49) \qquad 75\,\Pi_C = \rho\omega V_E\, E\, c_p\, g\vartheta = 75\,\Pi_{CE}\cdot\frac{\omega}{\omega_0\,\Delta};$$

e calcolarsi per ciascun valore di Δ, dopo aver calcolato il corrispondente rapporto delle imboccature.

Questi calcoli sono riportati nella figura 5; che suggerisce l'opportunità pratica di rinunziare al superlativo valore della quota economica per il

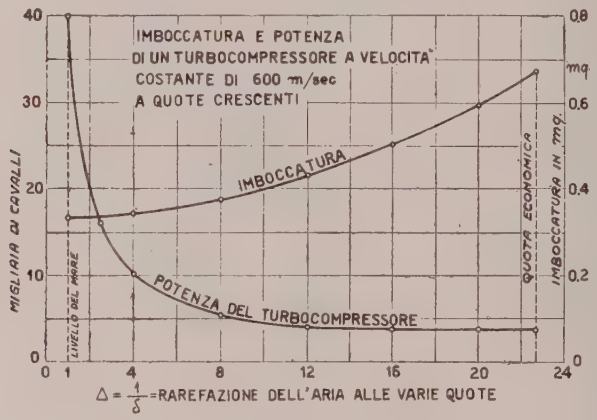


Fig. 5.

volo di regime, discendendo a quota ove si ottenga una minore imboccatura di regime, cioè minori dimensioni costruttive di tutto il turboreattore, pur rassegnandosi a una potenza del compressore e ad un consumo di regime alquanto maggiori del minimo economico. Così ad esempio per una rarefazione *metà* della massima, per il nostro velivolo, si ottiene una imboccatura ed una potenza del compressore eguali entrambe al *venticinque per cento in più* dei loro valori minimi.

Lasceremo tuttavia alla tecnica la soluzione del compromesso cui conduce questa ultima considerazione, limitandoci ad averne segnalata la pratica importanza.

Meccanica. — *Correzione del difetto di equilibramento di un motore con cilindri allineati.* Nota [1] del Socio M. PANETTI.

1. CONDIZIONI DI EQUILIBRIO. – Il problema dell'equilibramento dei motori con cilindri allineati riguarda sia le forze centrifughe delle manovelle rotanti, sia le forze alterne di inerzia delle masse collegate coi piedi delle bielle.

Fatta per queste ultime l'analisi armonica, e considerate le armoniche dello stesso ordine per tutte le manovelle della macchina, il problema si riduce a verificare l'equilibrio dei vettori rotanti, che hanno come proiezioni sugli assi del moto le forze alterne d'inerzia di un dato ordine.

Tali vettori (detti anche forze centrifughe fittizie) se corrispondono alle armoniche del 1° ordine, coincidono per fase e velocità angolare con le manovelle. Se corrispondono alle armoniche di ordine superiore, hanno fasi e velocità multiple di quelle sopra indicate.

Per conseguenza, il problema fondamentale è sempre quello dell'equilibrio di forze centrifughe A, reali o fittizie, rotanti tutte con la stessa velocità angolare intorno all'asse z della macchina. La condizione da soddisfare è quella che risultino chiusi tanto il poligono delle forze A quanto quello dei loro momenti $z \wedge A$ rispetto ad un punto O dell'asse, dal quale si contano le z.

Dovrà essere quindi

$$\Sigma A = 0 \quad , \quad \Sigma z \wedge A = 0. \tag{1}$$

Proiettando sull'asse x parallelo agli assi dei cilindri e su y normale ad essi, entrambi con l'origine in O, devono pertanto essere uguali a zero

$$\begin{cases} \Sigma\ A \cos\alpha \ , & \Sigma\ A \operatorname{sen}\alpha \\ -\Sigma z\, A \operatorname{sen}\alpha \ , & \Sigma z\, A \cos\alpha \end{cases} \tag{2}$$

essendo α le fasi dei singoli vettori A, ossia gli angoli che, in un dato istante, scelto come origine dei tempi, essi formano con l'asse del moto diretto verso il cilindro.

In tutto, dunque, si hanno quattro condizioni, quante occorrono per l'equilibrio di un sistema di forze normali e incidenti ad un asse.

Come è noto, alle forze rotanti in piani paralleli si possono sostituire le stesse forze ribaltate in un medesimo piano contenente l'asse z della macchina e gli assi dei cilindri paralleli ad x.

Dopo il ribaltamento, i vettori A continuano a rotare con la medesima velocità angolare intorno agli stessi punti P (poli), distribuiti lungo l'asse z.

Il poligono di composizione dei vettori non è cambiato per effetto del ribaltamento. Quindi, le due prime condizioni di equilibrio sono le stesse, esprimibili uguagliando a zero le sommatorie indicate nella prima coppia

(1) Presentata nella seduta dell'8 febbraio 1947.

delle (2). La condizione di equilibrio dei momenti si ridurrebbe a dichiarare nulla l'ultima sommatoria contenente i termini in $\cos\alpha$.

Ma poichè si tratta di vettori rotanti, essa deve essere soddisfatta anche dopo una rotazione di 90°, che la trasforma nella penultima, contenente i termini $-z\mathrm{A}\,\mathrm{sen}\,\alpha$.

D'altra parte, se le due sommatorie in $\cos\alpha$ e $\mathrm{sen}\,\alpha$ sono nulle, sono pure nulle tutte quelle corrispondenti ad angoli $\alpha + \varepsilon$, essendo ε una rotazione qualsiasi, identica per tutti i vettori rotanti di fasi differenti α. Dunque, le condizioni di equilibrio dei vettori rotanti nel piano coincidono con quelle dei vettori prima del ribaltamento.

Grazie a questa equivalenza, l'equilibramento delle macchine a quattro cilindri allineati è stato ridotto dal Schubert e dal Tolle a costruzioni geometriche semplicissime.

2. Correzione dei motori squilibrati. – Vogliamo qui indicare una via di risoluzione nel caso di un numero di manovelle superiore a 4.

Essa consiste nel partire da una macchina non equilibrata di $n-2$ manovelle per determinare le fasi ed i momenti statici delle masse di due nuove manovelle, da collocare a distanze prestabilite z' e z'' dall'origine O, in modo di assicurare l'equilibrio del complesso.

Se si tratta di equilibrare forze centrifughe, le due manovelle aggiunte possono essere sostituite da contrappesi.

Quindi, il problema del contrappesamento risulta come caso speciale di quello dell'equilibramento.

Se poi si fissano come piani d'azione delle due manovelle aggiunte quelli stessi di due manovelle del complesso squilibrato, dal quale siamo partiti, e si tratta di equilibrare forze alterne d'inerzia, al quale scopo i contrappesi non sono idonei, il procedimento permette la *correzione* della prima impostazione, deducendo come manovelle definitive le *risultanti* delle originarie e delle aggiunte. Ciò vale, bene inteso, soltanto per le armoniche del 1° ordine.

3. Procedimenti fondati sul vettore risultante e sul momento risultante. – La risoluzione del problema si può dare sia operando sui vettori rotanti nei diversi piani d'azione, paralleli al piano xy, sia su quelli dedotti nel piano xz, per ribaltamento di y su z.

Col primo procedimento: tracciato il poligono (1) dei vettori A e il suo lato di chiusa S; quello (2) dei vettori $z \wedge \mathrm{A}$ e il suo lato di chiusa M; si ha in S ed M il risultante dei vettori rotanti corrispondenti alle manovelle (od ai contrappesi) da aggiungere per ottener l'equilibrio. Nel caso generale l'angolo φ dei due vettori S ed M (dei quali le (2) ci dànno le proiezioni sugli assi x ed y), *non* è retto, quindi il problema non è risolvibile con una sola manovella o con un solo contrappeso.

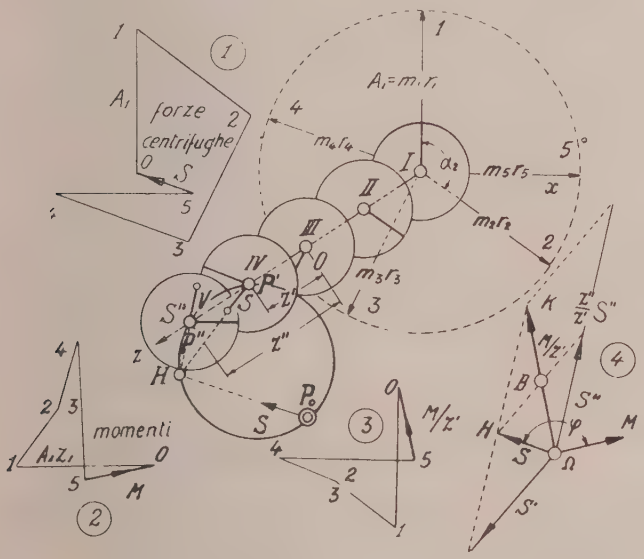
Ne occorrono due S' S''; ma si possono scegliere ad arbitrio i loro piani d'azione alle distanze z' e z'' dall'origine.

Di fatto dovrà essere vettorialmente.

$$S' + S'' = S \quad , \quad z' \wedge S' + z'' \wedge S'' = M \,. \tag{3}$$

Conviene operare sul poligono dei momenti ruotato di 90°, indicato con (3), in modo che ciascuno dei suoi lati riesca parallelo al corrispondente lato del poligono dei vettori A, equiverso od opposto, secondo chè la manovella si trova da una parte o dall'altra del centro O dei momenti.

Ciò equivale a sostituire il prodotto esterno $z \wedge A$ col vettore $A\frac{z}{z_0}$ dove z e z_0 sono semplici scalari algebrici, e si faccia $z_0 = 1$.



La seconda delle (3) diventa allora.

$$S' \frac{z'}{z_0} + S'' \frac{z''}{z_0} = \frac{M}{z_0} \,, \tag{4}$$

relazione di semplice somma geometrica, mentre sussiste tuttavia la prima delle (3).

Moltiplicando ambo i membri della (4) per $\frac{z_0}{z'}$, essa diventa

$$S' + S'' \frac{z''}{z'} = \frac{M}{z'} \,, \tag{5}$$

che si interpreta immediatamente col grafico (4) della figura allegata.

In esso, per un'origine Ω arbitraria, sono stati tracciati $\Omega H = S$ $\Omega K = M/z'$ essendo S ed M i lati di chiusa dei poligoni dei vettori (1) e dei momenti (3) (quest'ultimo rotato, come di disse, di 90°). Preso su ΩK un segmento $\Omega B = \Omega K$ (z'/z''), la HB dà la direzione di S', mentre S'' risulta parallelo ad HK.

Di fatto, scomponendo S nelle due direzioni secondo S′ ed S″ si riconosce che la somma di S′ con S″ $\frac{\zeta''}{\zeta'}$ è appunto M/z′.

4. Procedimento fondato sul polo del vettore risultante. – Il secondo procedimento consiste nella composizione dei vettori A ribaltati nel piano.

Esso conduce a dedurre, oltre al vettore S (identico a quello considerato nel primo procedimento) il suo polo P_0. Di fatto, la risultante di più vettori rotanti in uno stesso piano intorno ad una serie di poli $P_1 P_2 \cdots$ è un vettore rotante intorno ad un polo P_0, che si può ricavare componendone successivamente due, poi la loro risultante col terzo e via dicendo.

Basta allo scopo tenere presente che la risultante di due vettori rotanti, di poli $P_1 P_2$, ha per polo P un punto della circonferenza contenente i poli dei vettori componenti e la loro intersezione. Quindi, P è facilmente deducibile, e con la costruzione delle successive risultanti, estesa a tutto il complesso dei vettori componenti, si può ottenere P_0.

Ora, nel caso presente i poli $P_1 P_2 \cdots$ sono allineati, mentre in generale P_0 non appartiene alla retta che li contiene.

Questa proprietà geometrica, per la quale la distanza del polo P_0 dell'asse z dei poli è diversa da zero, è *connessa col fatto che l'angolo* φ *dei vettori* S *ed* M *non è uguale a* 90°.

In vero, sommando i momenti dei vettori A ribaltati, rispetto al polo P_0 di coordinate $x_0 z_0$, si ha

$$\Sigma (\zeta_0 - \zeta) A \cos\alpha - x_0 \Sigma A \operatorname{sen}\alpha = 0 \tag{6}$$

che esprime l'annullarsi del momento rispetto a P_0 punto della S.

Poichè si tratta di vettori rotanti, la condizione deve essere soddisfatta anche dopo una rotazione di 90°, e quindi

$$\Sigma (\zeta_0 - \zeta) A \operatorname{sen}\alpha + x_0 \Sigma A \cos\alpha = 0 .$$

Ma come è stato detto, le proiezioni di S e di M sui due assi x ed y sono, secondo le (2),

$$\begin{cases} S_x = -\Sigma A \cos\alpha \quad , & S_y = -\Sigma A \operatorname{sen}\alpha \\ M_x = \Sigma \zeta A \operatorname{sen}\alpha \quad , & M_y = -\Sigma \zeta A \cos\alpha . \end{cases} \tag{7}$$

Risulta quindi dalle (6) e (7)

$$-\zeta_0 S_x + x_0 S_y = -M_y \quad , \quad \zeta_0 S_y + x_0 S_x = -M_x ,$$

e finalmente, risolvendo rispetto ad x_0 e z_0

$$\zeta_0 = \frac{M_y S_x - M_x S_y}{S^2} = \frac{M}{S} \operatorname{sen}\varphi \quad , \quad -x_0 = \frac{S_x M_x + S_y M_y}{S^2} = \frac{M}{S} \cos\varphi , \tag{8}$$

l'ultima delle quali si annulla se i vettori S ed M sono ad angolo retto. È così dimostrato che, solo per $\varphi = \pi/2$, il polo risultante appartiene all'asse z,

nel qual caso basta collocare all'ascissa $z_0 = M/S$ una manovella (o un contrappeso) di momento statico S per risolvere il problema.

Nel caso generale, come già è stato detto, ciò non si verifica. Determinati pertanto S e P_0 suo polo, e scelti a caso due punti P′ e P″ sull'asse z con l'ufficio di poli delle manovelle (o dei contrappesi) da aggiungere: (nella figura essi coincidono coi punti fissi del 4° e del 5° manovellismo) basterà tracciare la circonferenza contenente i 3 poli P_0 P′ P″ e congiungere i due ultimi con la intersezione H della suddetta circonferenza con la S centrata in P_0 per dedurre in P′ H e P″ H le direzioni delle manovelle cercate. I loro vettori S′ ed S″ risulteranno dalla scomposizione di S nelle due direzioni. Nella figura è stata assunta come asse dei poli la retta che nella proiezione assonometrica rappresenta l'asse del motore, la quale retta, nel grafico, non è normale alla direzione degli assi dei cilindri. Tale proprietà è senza influenza sul procedimento illustrato.

Questo procedimento offre una visione più immediata della bontà della risoluzione corrispondente alla scelta dei poli, ai quali si applicano le manovelle (o i contrappesi) capaci di correggere il difetto di equilibramento.

Quanto alla posizione del polo P_0, essa discende in modo assai più rapido e sicuro dai valori delle sue coordinate, immediatamente dati dalle (8), se sono noti i lati di chiusa S ed M dei poligoni dei vettori A e dei loro momenti $z \wedge A$, anzichè dal procedimento grafico di composizione progressiva degli stessi vettori rotanti nel piano xz.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Geometria. — *La « piccola variazione » di una curva algebrica reale connessa, con speciale riguardo al caso di Harnack.* Nota II di B. BIGI, presentata [1] dal Socio L. BERZOLARI.

4. Faremo dapprima la dimostrazione in due casi particolari; utilizzeremo quindi i risultati così conseguiti per il caso più generale.

a) La curva D si componga di k componenti e si mantenga connessa anche allorchè si trascurino gli eventuali punti di connessione immaginari (sia cioè $h = 1$). Se è d il numero totale dei punti di connessione di D, e fra di questi è t il numero dei reali, è

$$t \leq d. \tag{2}$$

Indichiamo con l il numero dei circuiti che effettivamente intervengono nel procedimento di « piccola variazione », con g il numero dei sistemi connessi in cui tali circuiti si raccolgono. Sia inoltre l' il numero dei circuiti che dagli l circuiti si ottengono per « piccola variazione ».

(1) Nella seduta del 14 dicembre 1946.

È noto che, se $p_1, p_2, \cdots, p_k$ sono risp. i generi delle k componenti, e se risp. $c_1, c_2, \cdots, c_k$ è il numero dei circuiti per le corrispondenti parti reali, si ha:

$$c_s \leq p_s + 1 \qquad (s = 1, 2, \cdots, k) \tag{3}$$

e che, detto p il genere virtuale della D, è

$$p = \sum_{s=1}^{k} p_s + d - k + 1. \tag{4}$$

Per il numero c^* dei circuiti reali della curva trasformata di D, è poi:

$$c^* = \sum_{s=1}^{k} c_s - l + l'. \tag{5}$$

Ma, perchè tutte le componenti siano effettivamente legate da punti di connessione reali, deve fra gli l circuiti intervenire almeno un circuito per ogni singola componente. È cioè:

$$l \geq k.$$

Questa peraltro può rinforzarsi quando si ricordi che gli l circuiti si ripartiscono in g sistemi connessi. Invero, supposto $g \geq 2$, assunto uno dei g sistemi, almeno uno dei suoi circuiti apparterrà ad una componente che possiede un circuito in altro dei g sistemi, altrimenti (quando si prescinda dai punti di connessione immaginarî) verrebbe a mancare la connessione totale della curva. La precedente limitazione può perciò sostituirsi con quella più espressiva

$$l \geq k + g - 1. \tag{6}$$

che per $g = 1$ ricade nella precedente.

Per il numero l' dei nuovi circuiti effettivamente risultanti dalla « piccola variazione » applicata nei punti di connessione e quindi non necessariamente esaurienti quelli della trasformata sarà (num. 1):

$$l' \leq \tau,$$

onde, per la (1) (di num. 1)

$$l' \leq t - l + 2g,$$

ed infine, per la (6)

$$l \leq t - k + g + 1. \tag{7}$$

Richiamate le (3), (6), (7) dalla (5) scende allora la:

$$c^* \leq \sum_{s=1}^{k} p_s + t - k + 2.$$

È dunque, tenendo presenti pur la (4) e la (2):

$$c^* \leq p + 1.$$

La formula precedente conferma il teorema di Harnack; ma l'averla ottenuta nel modo qui seguìto permette di affermare che in essa vale il segno $=$, quando, e solo quando, esso valga nelle (2), (3), (6), (7). Ora, la comparsa del segno $=$ nella (3) risponde alla condizione α), la sua comparsa nelle (2), (6), (7) a quella parte della β) che qui interessa e cioè alla I (la seconda essendo implicita nell'ipotesi $h = 1$), e alla condizione γ) nel suo aspetto topologico.

b) La curva connessa D si componga di k componenti per le quali i d punti di intersezione siano tutti immaginario–coniugati ($h = k$).

Si è già detto (num. 2) che la curva D, astrattamente pensata (con le convenzioni fatte) come un singramma, possiede il carattere μ legato ai numeri α_1 ed α_0 degli spigoli e dei vertici del singramma dalla nota relazione [2]

$$\mu = \alpha_1 - \alpha_0 + 1 . \tag{8}$$

Nel caso attuale è

$$\alpha_0 = k \quad , \quad \alpha_1 = \frac{d}{2} \tag{9}$$

perchè ogni spigolo del singramma rappresenta una coppia di punti immaginario–coniugati. Sostituendo questi valori nella (8), si ottiene

$$\mu = \frac{d}{2} - k + 1 ,$$

od anche, tenendo presente che è $\mu \geqq 0$,

$$\frac{d}{2} - k + 1 \geqq 0 ,$$

da cui

$$d \geqq 2 (k - 1). \tag{10}$$

D'altra parte, per il numero dei circuiti della curva trasformata della D, è

$$c^* = \sum_{s=1}^{k} c_s \tag{11}$$

cioè, per la (3),

$$c^* \leqq \sum_{s=1}^{k} (p_s + 1) = k + \sum_{s=1}^{k} p_s .$$

Ma per la (4) è

$$p - d + k - 1 = \sum_{s=1}^{k} p_s ;$$

è dunque

$$c^* \leqq p - d + 2k - 1 ,$$

(2) Cfr. per esempio D. KÖNIG (9) della Nota I.

e, per la (10)

$$c^* \leq p - 2(k-1) + 2k - 1$$

cioè, infine

$$c^* \leq p + 1 .$$

Perchè sia

$$c^* = p + 1$$

deve valere il segno = nella (3), cioè deve essere soddisfatta la condizione α), e nella (10), cioè deve essere, con $\alpha_1 = \frac{d}{2}$ (per la (9)), $\mu = 0$, ciò che assicura a D la configurazione arborescente, come vuole appunto la β) (nella parte II, che qui sola interessa). Della γ) non occorre qui dire.

c) Sia infine D genericamente costituita da k componenti fra di loro legate da punti di connessione reali o immaginario-coniugati.

Gli h gruppi Γ_i (num. 1) di cui si compone la D formano altrettanti sistemi parziali, ciascuno dei quali si presenta nelle condizioni del caso *a*), mentre tali sistemi parziali si appoggiano gli uni agli altri così come, nel caso *b*), si legavano fra di loro le varie componenti della D.

Indichiamo con $c_{ij}\,(i = 1, 2, \cdots, h\,;\, j = 1, 2, \cdots, k_i)$ il numero dei circuiti della j-sima componente il gruppo Γ_i. È evidentemente

$$\sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} = \sum_{s=1}^{k} c_s , \tag{12}$$

complessivamente le c_{ij} fornendo tutte le c_s $(s = 1, 2, \cdots, k)$.

Per ognuno degli h gruppi Γ_i vale una relazione analoga alla (5), dove (con immediata estensione delle notazioni ivi usate) è:

$$l_i \geq k_i + g_i - 1 \quad , \quad l'_i \leq l_i - l_i + 2g_i \qquad (i = 1, \cdots, h).$$

Si avranno cioè h relazioni del tipo

$$c_i^* = \sum_j c_{ij} + l_i - l'_i \leq \sum_j c_{ij} + t_i - 2k_i + 2 \quad (i = 1, \cdots, h). \tag{13}$$

D'altra parte, per la (11), il numero c^* dei circuiti della trasformata della D è sottoposto ad una limitazione, che si ottiene sommando le h relazioni (13) (ciò che, del resto, è evidente, perchè la connessione tra i gruppi Γ_i avviene mediante coppie di punti immaginario-coniugati). È cioè, tenendo presente la (12) e le

$$\sum_{i=1}^{h} t_i = t \qquad \sum_{i=1}^{h} k_i = k ,$$

anche

$$c^* = \sum_{i=1}^{h} c_i^* \leq \sum_{s=1}^{k} c_s + t - 2k + 2h$$

e, per la (3)

$$c^* \leq \sum_{s=1}^{k} (p_s + 1) + t - 2k + 2h = \sum_{s=1}^{k} p_s + t - k + 2h .$$

Se τ è il numero dei punti immaginario–coniugati di D, è

$$d = t + \tau .$$

Dalla (4) si ha allora

$$p - \tau - 1 = \sum_{s=1}^{k} p_s + t - k ;$$

per cui è:

$$c^* \leq p - \tau - 1 + 2h .$$

Ma per D (astrattamente assimilata ad un singramma) vale la relazione (8), dove è

$$\alpha_1 = \frac{\tau}{2} \quad , \quad \alpha_0 = h . \tag{14}$$

E poichè è $\mu \geq 0$, è

$$\tau \geq 2(h - 1). \tag{15}$$

È allora

$$c^* \leq p - 2(h - 1) - 1 + 2h$$

cioè infine

$$c^* \leq p + 1 .$$

Perchè nella precedente relazione valga il segno $=$, occorre e basta che esso valga nella (13) e nella (15). Ma se vale il segno $=$ nella (13), sono assicurate, per ognuno degli h gruppi, le condizioni di massimo già vedute nel caso *a*): sono cioè soddisfatte la α), la prima parte della β) e la γ) nella sua parte topologica. La comparsa del segno $=$ nella (15) assicura invece alla curva D, con la $\alpha_1 = \frac{\tau}{2}$ (per la (14)), la configurazione arborescente (nel senso già precisato al num. 2): è cioè soddisfatta anche la seconda parte della condizione β).

Alla parte algebrica della γ) provvede in ogni caso l'ipotesi della traducibilità della « piccola variazione » topologica in algebrica.

Il teorema è così dimostrato [3].

(3) Il caso di due componenti irriducibili ($k = 2$) era stato trattato nel Corso di Geometria superiore tenuto dal prof. L. BRUSOTTI presso l'Università di Pavia nell'anno 1943–44.

Od è $h = 2$, e si hanno due soli punti di connessione immaginario–coniugati, od è $h = 1$, ed i d punti di connessione (reali) sono ugualmente ordinabili su due circuiti risp. delle componenti.

Analisi. — *Sopra un problema di T. Satô per l'equazione differenziale* $y'' = f(x, y, y')$.[1] Nota I di E. MAGENES, presentata [2] dal Corrisp. G. SANSONE.

I problemi di valori al contorno per l'equazione differenziale $y'' = f(x, y, y')$ sono stati oggetto di studio in questi ultimi anni particolarmente in Italia, e sopratutto per opera di S. Cinquini e di G. Scorza–Dragoni [3], i quali si sono occupati dell'esistenza di un integrale dell'equazione data che passi per due punti assegnati. Un problema di altra natura, considerato da T. Satô nel 1937 [4] ha come oggetto la determinazione di un integrale della stessa equazione che passi per un punto e che sia tangente ad una curva assegnata; relativamente a questo problema tale Autore ha dato un teorema di esistenza e di unicità sotto opportune ipotesi circa la $f(x, y, y')$ e la curva assegnata. Mi propongo in questa Nota ed in una successiva di estendere il teorema di Satô, generalizzando sopratutto le ipotesi sulla $f(x, y, y')$. A tale risultato pervengo particolarizzando il metodo ideato da L. Tonelli per un'ampia classe di equazioni funzionali [5]. In questa Nota I richiamo un teorema fondamentale di esistenza di un integrale dell'equazione $y'' = f(x, y, y')$ congiungente due punti prefissati ed estendo il risultato del Satô, togliendo l'ipotesi che la funzione $f(x, y, y')$ sia lipschitziana rispetto a y e y' e

(1) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della Scuola Normale Superiore di Pisa nel mese di febbraio del 1946.

(2) Nella seduta del 14 dicembre 1946.

(3) Ci limitiamo a citare i seguenti lavori: S. CINQUINI: 1. *Sopra i problemi di valori al contorno per equazioni differenziali del secondo ordine.* « Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa », ser. II, vol. VIII (1939), pp. 271–283; 2. *Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali di ordine n.* (Ibidem, ser. II, vol. IX (1940), pp. 61–77); G. SCORZA–DRAGONI. 1. *Il problema dei valori ai limiti studiato in grande per gli integrali di un'equazione differenziale del secondo ordine.* « Giornale di Matematiche di Battaglini », vol. 69 (1931), pp. 77–102; 2. *Elementi uniti di trasformazioni funzionali e problemi di valori ai limiti.* « Rend. del Seminario Matematico di Roma », ser. IV, vol. II (1938), pp. 255–275). Per un'ampia bibliografia sull'argomento, vedi G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale.* (Bologna 1941), II, cap. VIII, § 9.

(4) T. SATÔ, *Sur l'équation différentielle* $y'' = f(x, y, y')$. « Proc. of the Imperial Acad. of Japan », vol. XIII (1937), pp. 348–351. La dimostrazione del n. 1 della Nota del SATÔ non è del tutto chiara; è necessario precisare le ipotesi sui punti d'incontro della $\underline{y}(x)$ con l'asse delle x, che devono essere due e distinti, nel caso in cui $\underline{y}(x)$ non sia tangente all'asse delle x.

(5) L. TONELLI *Sulle equazioni funzionali del tipo di Volterra.* « Bull. of the Calcutta Math. Soc. », *20* (1928), pp. 31–48. Il metodo del TONELLI è stato applicato per la prima volta allo studio dei problemi ai limiti per le equazioni differenziali ordinarie, e precisamente a un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine, da GUIDO STAMPACCHIA in una Nota ancora inedita. Questa Nota si trova citata e commentata nel lavoro di G. SCORZA–DRAGONI, *A proposito di alcuni teoremi sulle equazioni differenziali ordinarie.* « Rend. del Seminario Matematico di Padova », anno XV (1946), pp. 61–131 (v. nota (67) p. 121), stampato in questi ultimi mesi.

sempre positiva e sostituendo alla ipotesi $f(x, y_1, y_1') < f(x, y_2, y_2')$ per $y_1 < y_2$; $y_1' \leq y_2'$ la nuova ipotesi $f(x, y_1, y_1') \leq f(x, y_2, y_2')$ per $y_1 \leq y_2$; $y_1' \leq y_2'$.

1. TEOREMA I [6]. – *Sia* $f(x, y, y')$ *una funzione reale di variabile reale definita nel campo* C_∞: $a \leq x \leq b$; $|y| < +\infty$; $|y'| < +\infty$, *la quale per ogni* x *fissato risulti continua rispetto a* (y, y') *e per ogni coppia* (y, y') *fissata risulti quasi – continua in* x *e si supponga che esista una funzione* $M(x)$ *non negativa e integrabile* [7] *sull'intervallo* (a, b) *per cui valga la*

$$|f(x, y, y')| \leq M(x) \tag{1}$$

per tutti i punti di C_∞. *Allora se* (x_0, y_0) *e* (x_1, y_1) *sono due punti qualunque del piano* (xy) *tali che sia* $a \leq x_0 < x_1 \leq b$, *l'equazione*:

$$y' = y'(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(x, y, y')\, dx \tag{2}$$

ammette in (x_0, x_1) *almeno una soluzione* $y = y_0(x)$ *con* $y_0(x)$ *e* $y_0'(x)$ *assolutamente continue e tale che* $y_0(x_0) = y_0$, $y_0(x_1) = y_1$.

Per ogni n intero positivo, costruiamo la funzione $y_n(x)$ nel modo seguente (ponendo $x_1 - x_0 = \delta$):

$$\begin{cases} y_n(x) = y_0 + \lambda_n (x - x_0), & \text{per } x_0 \leq x \leq x_0 + \dfrac{\delta}{n}, \\ y_n(x) = y_0 + \lambda_n (x - x_0) + \displaystyle\int_{x_0}^{x - \frac{\delta}{n}} \left(x - \frac{\delta}{n} - t\right) f[t, y_n(t), y_n'(t)]\, dt, & \text{per } x_0 + \dfrac{\delta}{n} \leq x \leq x_1 \end{cases} \tag{3}$$

dove λ_n è un parametro reale.

È possibile, in virtù della continuità di $y_n(x)$ rispetto a λ_n, per ogni n, determinare un valore $\bar{\lambda}_n$ del parametro λ_n tale che per la relativa $y_n(x)$ sia $y_n(x_1) = y_1$. Allora le (3), determinate in corrispondenza di λ_n e le loro derivate prime $y_n'(x)$, costituiscono due successioni di funzioni ugualmente limitate e ugualmente continue. L'applicazione del teorema di Gi. Ascoli e il passaggio al limite sotto il segno di integrale permettono allora di completare la dimostrazione del teorema.

2. TEOREMA II. – *Sia* $f(x, y, y')$ *una funzione definita e continua nel campo* C:

$$x_0 \leq x \leq x_1 \quad ; \quad \sigma(x) \leq y \leq \tau(x) \quad ; \quad |y'| < +\infty$$

(6) Per il teorema nella forma del testo, vedi G. SCORZA-DRAGONI, luogo citato per secondo in (3), § 3. La presente dimostrazione, che qui dò sia pure in modo schematico per render più chiaro quanto sarà detto nel seguito, segue anche immediatamente da quanto è detto nella nota (67) del lavoro citato in (5) di G. SCORZA-DRAGONI.

(7) L'integrabilità va intesa qui e nel seguito secondo LEBESGUE.

dove $\sigma(x)$ *e* $\tau(x)$ *sono due integrali dell'equazione differenziale*:

$$(A) \qquad y'' = f(x, y, y')$$

uscenti dallo stesso punto (x_0, y_0), *definiti e continui nell'intervallo* (x_0, x_1) *e tali che per* $x_0 < x \leq x_1$, *sia* $\sigma(x) < \tau(x)$. *Si supponga inoltre che*: 1° *esista una funzione* $M(x)$ *non negativa e integrabile in tutto* (x_0, x_1) *per cui sia in tutto* C

$$(4) \qquad |f(x, y, y')| \leq M(x);$$

2° *in tutto* C *valga la disuguaglianza*:

$$(5) \qquad f(x, y_1, y_1') \leq f(x, y_2, y_2') \quad \text{per} \quad y_1 \leq y_2 \; ; \; y_1' \leq y_2'.$$

Sia data inoltre una funzione $\varphi(x)$ *continua insieme con le derivate prima e seconda in* (x_0, x_1) *e soddisfacente alle condizioni*:

$$(6) \qquad \begin{cases} \varphi(x) < \sigma(x) & \text{per} \quad x_0 \leq x < \bar{x} \; ; \; \varphi(\bar{x}) = \sigma(\bar{x}) \\ \sigma(x) < \varphi(x) < \tau(x) & \text{per} \quad \bar{x} < x < x_1 \; ; \; \varphi(x_1) = \sigma(x_1) \end{cases}$$

$$(7) \qquad \varphi''(x) < f(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \quad \text{in} \quad (\bar{x}, x_1).$$

Allora l'equazione differenziale (A) *ammette almeno un integrale* $y = \bar{Y}(x)$ *in* (x_0, x_1) *uscente dal punto* (x_0, y_0) *e tangente in almeno un punto alla curva* $y = \varphi(x)$ *il quale soddisfa in tutto* (x_0, x_1) *alla condizione*

$$(8) \qquad \sigma(x) \leq \bar{Y}(x) \leq \tau(x).$$

a) Prolunghiamo anzitutto opportunamente la $f(x, y, y')$ ponendo nel campo C_∞: $x_0 \leq x \leq x_1$; $|y| < +\infty$; $|y'| < +\infty$

$$f_0(x, y, y') = f(x, y, y') \quad \text{per tutti gli } (x, y, y') \text{ di C},$$
$$f_0(x, y, y') = f(x, \sigma(x), y') \text{ per } y < \sigma(x),$$
$$f_0(x, y, y') = f(x, \tau(x), y') \text{ per } y > \tau(x);$$

la $f_0(x, y, y')$ risulta allora in C_∞ continua e ivi soddisfacente alle

$$(9) \qquad f_0(x, y_1, y_1') \leq f_0(x, y_2, y_2') \text{ per } y_1 \leq y_2 \; ; \; y_1' \leq y_2'$$

$$(10) \qquad \varphi''(x) < f_0(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \text{ in } (\bar{x}, x_1).$$

Dalla (10) segue in $(\bar{x}, x_1)$: $f_0(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \geq \varphi''(x) + \eta$ dove η è un opportuno numero reale positivo; si può allora trovare un h positivo e tale che $h \leq \dfrac{\bar{x} - x_0}{2}$, per cui valga la

$$(11) \qquad f_0(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \geq \varphi''(x) + \frac{\eta}{2} \text{ in } (\bar{x} - h, x_1).$$

Per la (9) segue allora

$$(12) \quad f_0(x, y, y') \geq \varphi''(x) + \frac{\eta}{2} \text{ per } \bar{x} - h \leq x \leq x_1 \; ; \; y \geq \varphi(x) \; ; \; y' \geq \varphi'(x).$$

Consideriamo, per ogni intero n positivo, come nel teorema I, le funzioni $y_n(x)$ definite dalle (3), che riterremo costruite ora e in seguito mediante la $f_0(x, y, y')$. Per n fissato, $y_n(x)$ e la derivata $y_n'(x)$ sono funzioni continue di λ_n; inoltre, possiamo nelle attuali ipotesi dimostrare che, se è $\bar{\lambda}_n < \bar{\bar{\lambda}}_n$ si ha $\bar{y}_n(x) < \bar{\bar{y}}_n(x)$ e $\bar{y}_n'(x) < \bar{\bar{y}}_n'(x)$ per tutti gli x per cui sia $x_0 < x \leq x_1$, dove con $\bar{y}_n(x)$ e $\bar{\bar{y}}_n(x)$ s'intendono le $y_n(x)$ costruite con i valori $\bar{\lambda}_n$ e $\bar{\bar{\lambda}}_n$ del parametro λ_n.

Infatti, siccome è $\bar{y}_n'\left(x_0 + \frac{\delta}{n}\right) = \bar{\lambda}_n < \bar{\bar{\lambda}}_n = \bar{\bar{y}}_n'\left(x_0 + \frac{\delta}{n}\right)$ per la continuità delle $\bar{y}_n'(x)$ e $\bar{\bar{y}}_n'(x)$ sarà pure in un opportuno intorno destro di $x_0 + \frac{\delta}{n}$:

$$\bar{y}_n'(x) < \bar{\bar{y}}_n'(x). \tag{13}$$

Supposto allora che la (13) non valga in tutto (x_0, x_1), sia (x_0, ξ') il più grande intervallo in cui essa è verificata. Sarà allora:

$$\bar{y}_n'(\xi') = \bar{\bar{y}}_n'(\xi') \quad \text{e} \quad \bar{y}_n'(x) < \bar{\bar{y}}_n'(x) \text{ per } x_0 \leq x < \xi' \tag{14}$$

e quindi pure

$$\bar{y}_n(x) < \bar{\bar{y}}_n(x) \text{ per } x_0 < x \leq \xi'. \tag{15}$$

Ma poichè è per $x_0 + \frac{\delta}{n} < x \leq \xi'$:

$$y_n''(x) = f_0\left(x - \frac{\delta}{n}, y_n\left(x - \frac{\delta}{n}\right), y_n'\left(x - \frac{\delta}{n}\right)\right), \tag{16}$$

allora per $x_0 + \frac{\delta}{n} < x \leq \xi'$ in virtù delle (9), (13) e (15) risulterà $\bar{y}_n''(x) \leq \bar{\bar{y}}_n''(x)$; e ne viene, poichè è $\bar{y}_n'\left(x_0 + \frac{\delta}{n}\right) < \bar{\bar{y}}_n'\left(x_0 + \frac{\delta}{n}\right)$ che è pure $\bar{y}_n'(\xi') < y'(\xi')$, in contraddizione con la (14).

b) Ciò premesso, consideriamo in base al teorema I, un integrale $\bar{y}(x)$ dell'equazione $y'' = f_0(x, y, y')$ definito in tutto (x_0, x_1) che passi per il punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ e per un altro punto $P \equiv (\xi, \omega)$ le cui coordinate soddisfino alle $\bar{x} < \xi < x_1$; $\sigma(\xi) < \omega < \tau(\xi)$ e che si ottenga come limite di una successione di funzioni $\bar{y}_n(x)$ convergente uniformemente in (x_0, x_1) definite mediante le (3) dove il parametro λ_n assume, per ogni n, il particolare valore $\bar{\lambda}_n$ per cui sia: $\bar{y}_n(\xi) = \omega$ [8].

Allora, poichè la $f_0(x, y, y')$ soddisfa alle (9) e coincide con la $f(x, y, y')$ nei punti di C, per un noto teorema di unicità di Scorza–Dragoni [9], $\bar{y}(x)$ soddisfa per $x_0 \leq x < \xi$ alle $\sigma(x) \leq \bar{y}(x) \leq (x)$ mentre in (ξ, x_1) soddisfa alle $\sigma(x) < \bar{y}(x) < \tau(x)$, poichè passando per P_0 e per P, $\bar{y}(x)$ non può incontrare ulteriormente, in (ξ, x_1), $\sigma(x)$ o $\tau(x)$, sempre per il citato teorema

(8) Naturalmente, per quanto si è detto in *a*) in questo caso esiste una sola $\bar{y}_n(x)$ che passi per P_0 e per P (e quindi in corrispondenza ad essa un solo valore di λ_n).

(9) V. G. SCORZA-DRAGONI, luogo citato per primo in (3) p. 90 e sg.

di Scorza-Dragoni. In particolare sarà $\sigma(x_1) < \bar{y}(x_1) < \tau(x_1)$ e per la prima delle (6) sarà pure $\varphi(x) < \bar{y}(x)$ in $(x_0, \bar{x} - h)$.

Ma allora per tutti gli n maggiori di un certo $\bar{n}$ sarà pure:

$$(17) \qquad \sigma(x_1) < \bar{y}_n(x_1) < \tau(x_1) \quad ; \quad \bar{y}_n(x) > \varphi(x) \text{ in } (x_0, \bar{x} - h).$$

Vogliamo ora dimostrare che, per n sufficientemente grande, $\bar{y}_n(x)$ incontra in due soli punti la curva $y = \varphi(x)$. Premettiamo anzitutto che è facile vedere che le $\bar{y}_n(x)$ e le $\bar{y}'_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ sono ugualmente limitate (esiste quindi un $B > 0$ per cui è $|\bar{y}_n(x)| < B$ e $|\bar{y}'_n(x)| < B$ per ogni n) e anche ugualmente continue. Allora per la continuità uniforme della $f_0(x, y, y')$ nel campo $\bar{x} - h \leq x \leq x_1$; $|y| \leq B$; $|y'| \leq B$ è possibile determinare $\theta > 0$ tale che se (x, y, y') è una terna di questo campo soddisfacente alle (12), valga pure la

$$(18) \qquad f_0(x_*, y_*, y'_*) \geq \varphi''(x) + \frac{\eta}{4}$$

per tutti gli (x_*, y_*, y'_*) per cui sia $|x - x_*| \leq \theta$; $|y - y_*| \leq \theta$; $|y' - y'_*| \leq \theta$.

Ciò premesso, determiniamo un $n_1 \geq \bar{n}$ tale che per $n > n_1$ sia

$$(19) \quad \frac{\delta}{n} \leq \theta \quad , \quad \left| \bar{y}_n\left(x - \frac{\delta}{n}\right) - \bar{y}_n(x) \right| \leq \theta \quad ; \quad \left| \bar{y}'_n\left(x - \frac{\delta}{n}\right) - \bar{y}'_n(x) \right| \leq \theta .$$

Allora per n fissato e maggiore di n_1, poichè si ha $\bar{y}_n(\xi) < \varphi(\xi)$ e $\bar{y}_n(x_1) > \sigma(x_1) = \varphi(x_1)$, ci sarà almeno un punto $\underline{x}$ per cui $\bar{y}_n(\underline{x}) = \varphi(\underline{x})$ e $\xi < \underline{x} < x_1$.

Sia ξ_1 il confine inferiore degli $\underline{x}$ di (ξ, x_1). È evidente che è

$$\varphi(\xi_1) = \bar{y}_n(\xi_1) \quad \text{e} \quad \bar{y}_n(x) < \varphi(x) \quad \text{per} \quad \xi \leq x < \xi_1 .$$

Si ha allora $\bar{y}'_n(\xi_1) \geq \varphi'(\xi_1)$ e quindi in virtù della (12) $f_0(\xi_1, \bar{y}_n(\xi_1), \bar{y}'_n(\xi_1)) \geq \varphi''(\xi_1) + \frac{\eta}{2}$, e per le (19) e (18) $f_0\left(\xi_1 - \frac{\delta}{n'}, \bar{y}_n\left(\xi_1 - \frac{\delta}{n}\right), \bar{y}'_n\left(\xi_1 - \frac{\delta}{n}\right)\right) \geq$

$\geq \varphi''(\xi_1) + \frac{\eta}{4}$, cioè (20) $\bar{y}''_n(\xi_1) > \varphi''(\xi_1)$.

Di qui seguono le relazioni $\bar{y}''_n(x) > \varphi''(x)$ e quindi le $\bar{y}'_n(x) > \varphi'(x)$ e $\bar{y}_n(x) > \varphi(x)$ per $\xi_1 < x \leq x_1$ e perciò ξ_1 è l'unico punto tra ξ e x_1 in cui è $\bar{y}_n(x) = \varphi(x)$. Infatti, dalla (20) segue $\bar{y}''_n(x) > \varphi''(x)$ almeno in un opportuno intorno destro di ξ_1; supponiamo per assurdo che il più ampio intorno in cui ciò accade sia (ξ_1, ξ'_1) con $\xi'_1 < x_1$. Si avrà

$$(21) \qquad \bar{y}''_n(\xi'_1) = \varphi''(\xi'_1) \quad \text{e} \quad \bar{y}'_n(\xi'_1) > \varphi'(\xi'_1) \quad , \quad \bar{y}_n(\xi'_1) > \varphi'(\xi'_1)$$

e quindi per le (12), (19), (18), (16): $\bar{y}''_n(\xi'_1) > \varphi''(\xi'_1)$ in contraddizione con la (21). Con ragionamenti analoghi e tenendo presente la (17) si può vedere che anche tra $\bar{x} - h$ e ξ, quindi tra x_0 e ξ, non c'è che un solo valore di x per cui sia $\bar{y}_n(x) = \varphi(x)$ e con ciò resta dimostrato che, per n fissato e maggiore di n_1, $\bar{y}_n(x)$ e $\varphi(x)$ hanno due soli punti a comune le cui ascisse diremo x_2 e x'_2 $(x_0 < x_2 < x'_2 < x_1)$.

c) Consideriamo ora, anzichè la $\bar{y}_n'(x)$, quella delle (3) determinata da un opportuno valore di λ_n in modo che passi per il punto $\left[\frac{x_2 + x_2}{2}, \varphi\left(\frac{x_2' + x_2'}{2}\right)\right]$. Diciamola $y_{n,2}(x)$. Essa, per essere $\bar{y}_n\left(\frac{x_2 + x_2'}{2}\right) < y_{n,2}\left(\frac{x_2 + x_2'}{2}\right)$ e per quanto si è detto in *a*) non incontra la $\bar{y}_n(x)$ e soddisfa pure alla:

$$y_{n,2}(x_1) > \varphi(x_1) \tag{22}$$

Di qui, o essa *non contiene* punti appartenenti alla regione Γ_1 determinata da:

$$x_2 < x < x_2' \quad ; \quad \bar{y}_n(x) < y < \varphi(x)$$

ed è allora tangente alla $y = \varphi(x)$ almeno in $\frac{x_2 + x_2'}{2}$, oppure, se passa per un punto interno a Γ_1, si dimostra in modo analogo a quanto si è visto in *b*) per $\bar{y}_n(x)$, che essa sega la $y = \varphi(x)$ in $\frac{x_2 + x_2'}{2}$ e in un altro unico punto; diciamo questi due punti x_3 e x_3'; sarà $x_0 < x_2 < x_3 < x_3' < x_2' < x_1$ e inoltre

$$x_3' - x_3 < \frac{x_2' - x_2}{2} \,. \tag{23}$$

Procediamo su $y_{n,2}(x)$ in modo analogo a quanto si è fatto su $\bar{y}_n(x)$; consideriamo cioè la funzione $y_{n,3}$, determinata da un opportuno valore di λ_n in modo che passi per $\left[\frac{x_3 + x_3'}{2}, \varphi\left(\frac{x_3 + x_3'}{2}\right)\right]$.

Così procedendo, o arriveremo a una funzione $y_{n,i}(x)$ tangente in almeno un punto alla $y = \varphi(x)$, oppure otterremo una successione di intervalli (x_i, x_i'), ognuno contenuto nel precedente, che in virtù delle (23) e delle analoghe ammetteranno un punto ξ e uno solo a comune; allora la funzione $Y_n(x)$ determinata dalle (3) in modo che passi per $[\xi, \varphi(\xi)]$ risulta ivi tangente alla $y = \varphi(x)$ (basta tener presente che $Y_n(x)$ e $y_{n,i}(x)$ non si possono mai incontrare qualunque sia i). In definitiva, per ogni n, purchè sufficientemente grande, si è trovata una funzione $Y_n(x)$, che passa per P_0, è tangente almeno in un punto alla $y = \varphi(x)$ e soddisfa alla condizione $Y_n(x_1) > \sigma(x_1)$, in virtù delle (22) e delle analoghe. Ragionando in modo analogo a quanto si fa per il teorema I, si può vedere che queste $Y_n(x)$ insieme con le loro derivate $Y_n'(x)$ sono ugualmente limitate e ugualmente continue. Si potrà allora per il teorema di Ascoli estrarre dalla successione delle $Y_n(x)$ una successione $\{Y_k(x)\}$ convergente uniformemente insieme alla successione delle derivate, per $k \to \infty$, rispettivamente a un integrale $\overline{Y}(x)$ dell'equazione $y'' = f_0(x, y, y')$ e alla sua derivata. Inoltre, $\overline{Y}(x)$ sarà tangente alla $y = \varphi(x)$ in almeno un punto. Infatti, consideriamo per ogni $Y_k(x)$ il punto di contatto sulla $y = \varphi(x)$ di ascissa minima. L'insieme di questi punti formerà sulla $y = \varphi(x)$ un insieme limitato ed avrà quindi un punto di accu-

mulazione di ascissa minima X. In ogni intorno di X ci saranno infiniti punti x_j dell'insieme suddetto, tali che per le corrispondenti $Y_{kj}(x)$ sarà

$$Y_{kj}(x_j) = \varphi(x_j) \quad ; \quad Y'_{kj}(x_j) = \varphi'(x_j).$$

Scrivendo allora:

$$\varphi(X) - \overline{Y}(X) = \varphi(X) - Y_{kj}(x_j) + Y_{kj}(x_j) - Y_{kj}(X) + Y_{kj}(X) - \overline{Y}(X)$$

preso un $\varepsilon > 0$ ad arbitrio sarà possibile determinare un $\overline{\delta} > 0$ e degli opportuni k_j per cui sia $|X - x_j| \leq \overline{\delta}$ e inoltre

$$|\varphi(X) - Y_{kj}(x_j)| < \frac{\varepsilon}{3} \ , \ |Y_{kj}(x_j) - Y_{kj}(X)| < \frac{\varepsilon}{3} \ ; \ |Y_{kj}(X) - \overline{Y}(X)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

e di qui per l'arbitrarietà di ε si ottiene $\varphi(X) = \overline{Y}(X)$. In modo analogo, si ha $\varphi'(X) = \overline{Y}'(X)$. $\overline{Y}(x)$ è quindi tangente a $y = \varphi(x)$ in almeno un punto. Infine, si vede facilmente che $\overline{Y}(x)$ soddisfa in tutto (x_0, x_1) alle

$$\sigma(x) \leq \overline{Y}(x) \leq \tau(x).$$

sempre per il citato teorema di unicità di Scorza-Dragoni.

Ne segue che $\overline{Y}(x)$ soddisfa pure alla equazione $y'' = f(x, y, y')$ [10].

3. Unicità della soluzione. — La soluzione di cui al teorema II è unica; infatti, con ragionamenti analoghi a quello del n. 2 *b*) si ha facilmente che per ogni soluzione $y(x)$ del problema non può mai essere $y(x) < \varphi(x)$ per $x_0 \leq x \leq x_1$ e quindi due soluzioni distinte avrebbero almeno un altro punto a comune, oltre al punto (x_0, y_0), contro il citato teorema di unicità di Scorza Dragoni.

Geometria. — *Sulle trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo nel caso cremoniano.* Nota di M. Villa, presentata [1] dal Socio E. Bompiani.

1. Nello studio di una corrispondenza puntuale fra piani π, π' ha particolare interesse l'esame delle coppie di punti (O, O') a jacobiano nullo. Se O appartiene alla Jacobiana di π (ed è per essa punto semplice) E. Bompiani ha posto in evidenza l'esistenza di un elemento stazionario uscente da O che *in generale* non appartiene alla Jacobiana; e per questo caso ha determinato in modo intrinseco sviluppi canonici e riferimenti nei due piani [2].

(10) Osserviamo che la dimostrazione data permette facilmente di vedere che il teorema II è valido anche quando sia $f(x, y, y')$ non negativa e $\varphi''(x) \leq 0$.

(1) Nella seduta dell'11 gennaio 1947.

(2) E. Bompiani, *Corrispondenza puntuale fra piani proiettivi*, «Memorie dell'Accademia d'Italia», vol. XIV, 1943, pp. 11–21. Ad ogni E_1 di π di centro O corrisponde in π' un E'_1 *fisso* di centro O'. Ad un E'_1 generico di π' di centro O' (≠ dall'E'_1 fisso) corrisponde in π l'E_1 *stazionario* (di centro O).

Ora io ho notato che *l'appartenenza dell'*E_1 *stazionario in* O *alla Jacobiana è condizione necessaria e sufficiente affinchè la trasformazione data sia approssimabile, fino all'intorno del 2° ordine di* (O , O'), *mediante una trasformazione cremoniana* (3).

Il caso, che potrà dirsi perciò *cremoniano*, in cui si presenti questa circostanza, ha quindi un particolare interesse in relazione allo studio delle proprietà differenziali delle trasformazioni cremoniane.

In questa Nota dò la dimostrazione del teorema precedente (n. 2) e determino le trasformazioni cubiche osculatrici (t. c. o.) per cui le cubiche della rete omaloidica di π contengono uno stesso E_4 col centro nel punto base doppio (n. 4). Passando all'intorno del 3° ordine, fra le ∞^3 t. c. o. ne caratterizzo dapprima certe ∞^1 (n. 5) e poi una (n. 6). Interpreto così i riferimenti relativi agli sviluppi canonici nel caso cremoniano della trasformazione T

$$(1.1) \qquad \begin{cases} x' = y + x^2 + x^3 + 3\,a_{21}\,x^2\,y + a_{03}\,y^3 + [4] \\ y' = xy + \mathrm{I}x^3 + b_{03}\,y^3 + [4] \end{cases}$$

dati dal Bompiani nella Nota presentata a questa Accademia, in questa stessa seduta (4).

2. Sia T la trasformazione data e supponiamo esista una trasformazione cremoniana $\bar{\mathrm{T}}$ approssimante T nella coppia (O , O'). Poichè, per ipotesi, O è sulla Jacobiana di $\bar{\mathrm{T}}$ in π, O' è punto principale per $\bar{\mathrm{T}}$: alle rette per esso corrispondono curve spezzate in una curva fissa $C_{O'}$, passante per O, che fa parte della Jacobiana e in una variabile in un fascio (solo quella passante per O dà luogo ad una curva composta con punto doppio ivi, se O non è doppio per $C_{O'}$). Sicchè, la tangente stazionaria in O è la tangente ivi alla $C_{O'}$, cioè la tangente in O alla Jacobiana.

Inversamente, se la tangente stazionaria in O tocca la Jacobiana, gli sviluppi (1.1) mostrano che la T è approssimata dalla trasformazione cubica

$$x' = y + x^2 \quad , \quad y' = x\,(y + x^2)$$

fino all'intorno del 2° ordine (5).

(3) All'E_2' di flesso (contenente l'E_1' fisso) corrisponde una curva dotata di nodo: *La coincidenza della tangente stazionaria con la tangente alla Jacobiana impone la coincidenza di una delle tangenti nodali con la tangente stazionaria e inversamente.* L'altra tangente nodale è distinta dalla tangente stazionaria (essendo O punto semplice della curva Jacobiana).

(4) BOMPIANI, *Sulle Jacobiane di una corrispondenza puntuale fra piani.* In tale lavoro, il significato geometrico dell'invariante I è indicato come invariante di contatto fra l'E_2 Jacobiano $y = (2 - 3\,\mathrm{I})\,x^2$ e l'E_2 eccezionale $y = -x^2$. L'E_2 eccezionale del BOMPIANI può anche definirsi così: è l'E_2 che corrisponde in T ad ogni E_2' di centro O' (a cui non appartenga l'E_1' fisso). La rappresentazione (1.1) implica l'ipotesi che l'E_2 eccezionale non sia di flesso.

(5) Se l'E_2 eccezionale è di flesso, la T non si può rappresentare con le (1.1), ma allora essa ammette trasformazioni quadratiche osculatrici.

3. Passiamo ora a caratterizzare i riferimenti proiettivi dei due piani che dànno luogo agli sviluppi canonici (1.1).

Gli assi x e y in π sono già caratterizzati dal fatto di essere rispettivamente la tangente stazionaria e l'ulteriore tangente nodale in O; l'asse x' dall'essere la retta cui corrisponde una curva nodata in O. Rimangono da caratterizzare le altre rette del riferimento e i punti unità in π, π'.

All'asse y (tangente nodale in O) la T fa corrispondere la curva con flesso $y' = b_{03}\, x'^3 + \cdots$; fra la tangente di flesso $y' = 0$ e la tangente nodale $x = 0$ la T subordina la proiettività $x' = y$, che si dirà *caratteristica*.

Nel riferimento canonico i punti impropri degli assi x' e y sono punti corrispondenti nella proiettività caratteristica (6).

4. Cerchiamo ora la più generale trasformazione cubica osculatrice la T nella coppia (O, O') per cui le cubiche della rete omaloidica di π contengono uno stesso E_4 col centro nel punto base doppio. O' è necessariamente punto base doppio per le cubiche della rete omaloidica di π'. Indicheremo queste trasformazioni con $\overset{\text{I}}{\text{T}}_3$. Sia $C = 0$ l'equazione della conica C corrispondente in $\overset{\text{I}}{\text{T}}_3$ ad O' (cioè individuata dall'E_4 precedente); siccome essa tocca in O la $y = 0$ è

$$C \equiv y + \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2.$$

La cubica della rete omaloidica in π con punto doppio in O è necessariamente la $C \cdot x = 0$: la $x = 0$ taglia ulteriormente la $C = 0$ nel punto doppio base della rete, sia A. Si ha quindi A $(0, -1/\gamma)$ e la tangente ivi a C è $2\beta x + \gamma y + 1 = 0$.

Per individuare la rete in π si possono assumere le seguenti tre cubiche spezzate: 1) in C e in una retta per A, ma non per O; 2) in C e nella OA; 3) nella tangente in A a C contata tre volte. Tenuto conto che la cubica che ha nodo in O corrisponde a $y' = 0$, mentre ad una retta per O', sia $x' = 0$, corrisponde una cubica del tipo 1), le equazioni di $\overset{\text{I}}{\text{T}}_3$ sono del tipo

$$x' = \frac{p_1 x + p_2 (\gamma y + 1)}{[q_1 x + q_2 (\gamma y + 1)]\, C + (2\beta x + \gamma y + 1)^3}\, C$$

$$y' = \frac{rx}{[q_1 x + q_2 (\gamma y + 1)]\, C + (2\beta x + \gamma y + 1)^3}\, C\,.$$

Bisogna ora imporre che gli sviluppi di x', y' di qui ricavati coincidano con quelli (1.1) fino ai termini del 2° ordine inclusi. Si trova

$$p_2 = \alpha = r = 1 \quad , \qquad p_1 = 4\beta \quad , \qquad q_2 = -\gamma \, ,$$

mentre β, γ e q_1 (che indicheremo con q) rimangono arbitrari.

(6) Per incidenza, aggiungiamo che anche nel caso generale in cui la tangente stazionaria non coincide con la tangente alla Jacobiana, si hanno proiettività analoghe fra ciascuna delle tangenti nodali e la direzione fissa.

Esistono ∞^3 *trasformazioni cubiche osculatrici* $\overset{1}{T}_3$.

Gli sviluppi relativi ad una $\overset{1}{T}_3$ sono:

$$x' = y + x^2 - 2\beta x^3 - 4\beta^2 x^2 y - (q + 4\beta\gamma) xy^2 + [4]$$
$$y' = xy + x^3 - 4\beta x^2 y - \gamma x y^2 + [4].$$

Le trasformazioni cubiche osculatrici qui considerate sono quelle del tipo $\overset{1}{T}_3$, ma si potrebbe vedere che di trasformazioni cubiche osculatrici la T in (O, O') ve ne sono ∞^{10}.

5. Alla retta $y' = 0$ corrispondono in T e in una qualsiasi $\overset{1}{T}_3$ due curve con le stesse tangenti nodali in O.

Rimane quindi da esse definito in modo intrinseco (7) una terna di rette per O:

(5.1) $$(I - 1) x^3 + 4\beta x^2 y + \gamma x y^2 + b_{03} y^3 = 0$$ (8).

Questa terna è apolare alla coppia delle tangenti nodali se e solo se $\beta = \gamma = 0$. Perciò:

Fra le ∞^3 $\overset{1}{T}_3$, *ne esistono* ∞^1, *che indicherò con* $\overset{2}{T}_3$, *per cui la terna invariante in* O *è apolare alla coppia delle tangenti alla curva della rete nodata in* O. *La retta all'infinito del riferimento canonico in* π *è la tangente in* A *alla conica* C *relativa a tutte queste* $\overset{2}{T}_3$.

Le cubiche della rete di $\overset{2}{T}_3$ in π' hanno punto doppio in O' e gli altri punti base costituiscono un E_3 (con E_2 di flesso), avente il centro su $x' = 0$ (che è quindi determinata) e con tangente di flesso $y' = \frac{1}{q}$ (passante, qualunque sia q, per il punto all'infinito di $y' = 0$ che dunque è pure determinato).

6. Cerchiamo di individuare una delle $\overset{2}{T}_3$ intrinsecamente (cioè di determinare q, o il punto improprio di $x' = 0$).

(7) L'esistenza di questa terna invariante risulta da ciò: che due E_2 con lo stesso centro ed una retta per esso hanno un invariante, e fissato un valore per questo si hanno tre rette che attribuiscono all'invariante quel valore (BOMPIANI); queste terne di rette descrivono un'involuzione cubica. Date due curve con le stesse tangenti nodali le due involuzioni cubiche che si possono costruire per esse hanno in comune la terna voluta. Analiticamente ciò dipende dal fatto che date le curve $xy = \varphi_3(x, y) + \cdots$, $xy = \psi_3((x, y) + \cdots$, con φ_3 e ψ_3 forme cubiche, la differenza $\varphi_3 - \psi_3$ non viene alterata dalla scelta (arbitraria) della retta impropria. Le tre direzioni (5.1) possono dirsi d'*iperosculazione* in quanto ad esse si perviene anche nel modo seguente. Per ogni $\overset{1}{T}_3$, esistono tre E_2', contenenti l'E_1' fisso, per cui l'elemento corrispondente di un E_3' contenente uno di essi ha lo stesso E_2 sia in T che in $\overset{1}{T}_3$; nella proiettività fra gli E_2' contenenti l'E_1' fisso e gli E_1 corrispondenti in T, a quei tre E_2' corrispondono appunto i tre E_1 della (5.1).

(8) Al variare di $\overset{1}{T}_3$ le terne (5.1) formano un'involuzione ∞^2 $\mathfrak{J}_3^2$. Trascuriamo i casi particolari in cui $\mathfrak{J}_3^2$ abbia una delle tangenti nodali come retta fissa. Ciò implica $I \neq 1$, $b_{03} \neq 0$.

Consideriamo un punto P (o , ε) della tangente nodale. Se P è preso nell'intorno del 2° ordine di O (cioè se si trascurano infinitesimi del 3° ordine), il suo corrispondente in π' è lo stesso sia per T che per una qualsiasi $\overset{2}{T}_3$; sia P' (ε , o).

Un E'_1 di centro P' in π' (appartenente quindi all'intorno del 3° ordine di O') avrà invece corrispondenti generalmente diversi in π per effetto di T e di una $\overset{2}{T}_3$. Al variare dell'E'_1 per P' si avranno quindi due fasci sovrapposti di E_1 per P fra loro in corrispondenza proiettiva. Se si esige che in questa corrispondenza sia unita la retta congiungente P al vertice opposto ad $x = o$ nel triangolo fondamentale si trova che deve essere $q = o$. *Si è così determinata una* $\overset{2}{T}_3$, che indicherò con $\overset{3}{T}_3$ e che è precisamente quella già considerata nel n. 2 e perciò si sono finiti di determinare i due triangoli di riferimento relativi agli sviluppi canonici (1.1).

7. Agli E'_3 aventi uno stesso E'_1 $y' = mx'$ ($m \neq o$) corrisponde in T lo stesso E_3

$$y = -x^2 + \frac{1}{m}(-m + I - 1)\,x^3.$$

Fra gli E'_1 per O' e gli E_3 per O (contenenti l'E_2 eccezionale) vi è quindi una proiettività [9]. In essa la direzione corrispondente all'E_3 in O della conica C relativa a $\overset{2}{T}_3$ è $y' = (I - 1)\,x'$ [10]. Nella proiettività subordinata da $\overset{2}{T}_3$ fra le direzioni uscenti da O' e le direzioni uscenti da A, alla retta $y' = (I - 1)\,x'$ corrisponde la retta $x = I - 1$ che interseca C nel punto $x = I - 1$, $y = -(I - 1)^2$. Il punto unità in π è così caratterizzato. In π' il punto (2.2) è il corrispondente in $\overset{3}{T}_3$ del punto unità di π. Così anche il punto unità di π' è caratterizzato. Anche l'interpretazione geometrica degli invarianti di T non offre ormai difficoltà. Ad esempio si ottiene subito il significato di b_{03} poichè la terna delle direzioni d'iperosculazione di $\overset{2}{T}_3$ ha l'equazione $b_{03}\,y^3 = (1 - I)\,x^3$.

(9) Questa proiettività non è degenere essendo $I \neq 1$.

(10) Questa direzione potrebbe dirsi *d'iperosculazione* in quanto in $\overset{2}{T}_3$ la proiettività fra gli E'_1 per O' e gli E_3 per O (contenenti l'E_2 eccezionale, cioè l'E_2 in O di C) è degenere (d'accordo col fatto che per $\overset{2}{T}_3$ l'invariante I vale 1) e agli E'_1 per O' corrisponde sempre proprio l'E_3 suddetto $y = -x^2$.

Matematica (Geometria). — *Operatori lineari nello spazio Hilbertiano suscettibili di riduzione a forma normale.* Nota di L. CASTOLDI, presentata [1] dal Socio L. BERZOLARI.

1. I metodi operativi della Meccanica quantica [2] e gli enti, vettori, operatori lineari o matrici a infiniti elementi, cui essi si applicano, hanno notoriamente, come campo di definizione, lo spazio funzionale o Hilbertiano complesso [3].

Tali metodi costituiscono un'ampia generalizzazione del calcolo vettoriale e omografico valido negli spazi Euclidei dotati di un numero finito di dimensioni, nonchè di analoghi metodi operativi applicabili in uno spazio funzionale reale.

Tuttavia, l'introduzione dell'immaginario attribuisce alcuni aspetti del tutto particolari alla Geometria dello spazio Hilbertiano complesso, che la differenziano dalle analoghe negli spazi reali dotati di un numero finito o infinito di dimensioni.

Nella presente Nota, ci proponiamo di mettere brevemente in luce una delle accennate divergenze, e precisamente il diverso contenuto che compete, negli spazi complessi e in quelli reali, alla nozione di simmetria e di emisimmetria di un operatore lineare, deducendone alcune conseguenze circa il problema di attribuire forma normale (problema della riduzione agli assi o degli autovalori) ad un operatore lineare a priori qualunque.

2. Se $\psi(x)$ è un vettore complesso, indicheremo, come si suole, con $\bar{\psi}(x)$ il complesso coniugato; e se $\mathbf{A}$ è un operatore lineare nello spazio complesso, indicheremo con $\mathbf{A}^*$ il suo trasposto, con $\bar{\mathbf{A}}$ il complesso coniugato, e con $\tilde{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}}^*$ il coniugato del trasposto (o coniugato di Hermite). Per le componenti della matrice rappresentativa di $\mathbf{A}$ rispetto ad un generico sistema di confronto, si ha:

$$a^*_{ik} = a_{ki} \quad ; \quad \tilde{a}_{ik} = \bar{a}_{ki} .$$

Per un operatore Hermitiano è $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$, cioè $\bar{a}_{ki} = a_{ik}$.

La condizione di Hermiticità è ovviamente l'analoga nel campo complesso di quella di simmetria nel campo reale.

(1) Nella seduta dell'11 gennaio 1947.

(2) Per una chiara esposizione di tali metodi si confronti, per esempio: E. PERSICO, *Fondamenti della Meccanica atomica*, parte terza.

Un'esposizione sistematicamente operativa della Meccanica quantica trovasi particolarmente nella classica opera di H. WEYL, *Gruppenthéorie und Quantenmechanik*, seconda edizione 1931.

(3) Per le proprietà geometriche dello spazio funzionale reale rinviamo all'opera di G. VITALI, *Geometria nello spazio Hilbertiano.*

Similmente la proprietà analoga a quella di emisimmetria si esprime nella relazione (che diremo di antihermiticità):

$$\tilde{\mathbf{A}} = -\mathbf{A}, \quad \text{ossia} \quad \bar{a}_{ik} = -a_{ki}. \tag{1}$$

Ma è stato osservato [4] che, mentre nel campo reale tra un operatore simmetrico, ed uno emisimmetrico non esiste relazione alcuna, nel campo complesso, un operatore antihermitiano è sempre uguale al prodotto dell'unità immaginaria per un operatore Hermitiano. Invero, se l'operatore $\mathbf{A}$ soddisfa alla (1), l'operatore $\mathbf{B} = i\mathbf{A}$ soddisfa alla relazione:

$$\tilde{\mathbf{B}} = -i\tilde{\mathbf{A}} = i\mathbf{A} = \mathbf{B}.$$

Ne segue anche che, mentre nel campo reale il problema della riduzione agli assi ha senso soltanto per un operatore simmetrico, nel campo complesso saranno riducibili a forma normale non solo gli operatori Hermitiani ma certamente anche altri tra cui necessariamente gli antihermitiani (questi ultimi con autovalori immaginari puri). È noto anzi, a questo riguardo [5], che sono pure riducibili a forma normale i cosidetti operatori unitari, definiti come quelli che lasciano inalterato il modulo di ogni vettore cui si applichino e caratterizzati analiticamente dalle condizioni

$$\tilde{\mathbf{U}}\mathbf{U} = \mathbf{1} \quad ; \quad \mathbf{U}\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{1}. \tag{2}$$

Nonostante il prevalente interesse applicativo degli operatori Hermitiani, interesse che ha il suo fondamento nella realità e nel corrispondente sostanziale significato fisico dei loro autovalori, le considerazioni precedenti suggeriscono spontaneamente il problema della ricerca di tutti gli operatori dello spazio complesso che, come gli Hermitiani, gli antihermitiani e gli unitari, sono suscettibili di riduzione a forma normale. Di ciò appunto trattiamo nel prossimo numero.

3. Premettiamo la semplice osservazione che, analogamente alla possibile scomposizione nel campo reale di un operatore lineare qualunque in una parte simmetrica e in una emisimmetrica, è possibile scomporre, nel campo complesso, un operatore lineare qualunque in una parte Hermitiana e in una antihermitiana. A ciò si perviene partendo dalla identità, valida per un operatore lineare qualunque $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{A} + \tilde{\mathbf{A}}}{2} + \frac{\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{A}}}{2}, \tag{3}$$

e osservando che $\mathbf{A} + \tilde{\mathbf{A}}$ è Hermitiano, ed $\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{A}}$ antihermitiano. Per una osservazione precedente sarà dunque

$$\mathbf{A} = \mathbf{H} + i\mathbf{H}' \tag{4}$$

(4) H. Weyl, loco citato, p. 27.
(5) H. Weyl, loco citato, p. 17.

con $\mathbf{H}$ e $\mathbf{H}'$ Hermitiani. Da quest'ultima segue poi:

$$(5) \qquad \tilde{\mathbf{A}}\,\mathbf{A} = (\mathbf{H} + i\,\mathbf{H}')(\mathbf{H} - i\,\mathbf{H}') = \mathbf{H}^2 + \mathbf{H}'^2 + i\,(\mathbf{H}'\,\mathbf{H} - \mathbf{H}\,\mathbf{H}'),$$

da cui osservando che se $\mathbf{H}$ è Hermitiano ed $\mathbf{A}$ qualunque, sono Hermitiani $\mathbf{H}^2$ ed $\tilde{\mathbf{A}}\,\mathbf{A}$, segue intanto il noto [6] risultato che, con $\mathbf{H}$ e $\mathbf{H}'$, è Hermitiano l'operatore

$$(6) \qquad i\,(\mathbf{H}'\,\mathbf{H} - \mathbf{H}\mathbf{H}').$$

La (3), mostrando la possibilità di esprimere un operatore lineare qualunque mediante due operatori Hermitiani (nonchè mediante la moltiplicazione per i), rende ragione della prevalente importanza degli operatori Hermitiani nello spazio complesso.

Supponiamo ora che $\mathbf{A}$ sia riducibile a forma normale e che, precisamente, tale forma esso assuma con riferimento a un sistema completo Σ di vettori ortogonali unitari [7] (eventualmente determinato a meno di rotazioni trasformanti in sè gli autospazi dell'operatore $\mathbf{A}$ corrispondenti ad autovalori multipli). Siano poi $\sigma_i = s_i + i\,s'_i$ (con s_i ed s'_i reali) gli autovalori di $\mathbf{A}$. Indicando con h_{ik} ed h'_{ik} le componenti degli operatori Hermitiani $\mathbf{H}$ e $\mathbf{H}'$ della decomposizione (4) di $\mathbf{A}$, dovrà essere:

$$h_{ik} + i\,h'_{ik} = 0 \text{ per } i \neq k \quad ; \quad h_{ii} + i\,h'_{ii} = s_i + i\,s'_i$$

(con h_{ii} ed h'_{ii} reali).

Ciò implica che sia

$$h_{ii} = s_i \quad ; \quad h'_{ii} = s'_i \quad \text{ed} \quad h_{ik} = -\,i\,h'_{ik},$$

ovvero, passando ai coniugati di Hermite:

$$h_{ik} = i\,h'_{ik}.$$

Ma quest'ultima relazione è incompatibile colla precedente, a meno che sia $h_{ik} = h'_{ik} = 0$ per $i = 1, 2, \cdots, k = 1, 2, \cdots, i \neq k$. Ciò significa che con riferimento a Σ assumono forma normale tanto $\mathbf{H}$ che $\mathbf{H}'$, ossia che $\mathbf{H}$ ed $\mathbf{H}'$ sono permutabili. Viceversa se $\mathbf{H}$ ed $\mathbf{H}'$ sono permutabili e Σ è un comune sistema di autovettori unitari ortogonali, l'operatore $\mathbf{H} + i\,\mathbf{H}'$ si riduce ovviamente, con riferimento a Σ, a forma normale.

Concludiamo dunque che: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un operatore lineare dello spazio Hilbertiano complesso sia riducibile a forma normale con riferimento a un conveniente sistema* Σ *di vettori unitari ortogonali, è che gli operatori Hermitiani* $\mathbf{H}$ *e* $\mathbf{H}'$ *della scomposizione* (4) *siano permutabili.*

(6) E. PERSICO, loco citato, p. 314 (50').

(7) Qui e nel seguito adottiamo notazioni che si riferiscono al caso che gli operatori considerati siano dotati di soli autovalori discreti. Esse si adattano tuttavia anche al caso generale di autovalori continui purchè si considerino, quando occorra, gli indici $i\,j$, ecc. come variabili con continuità e si introducano opportune note modificazioni di concetti e di simboli, come trasformazioni di sommatorie in integrali ecc.

In tal caso se s_i *ed* s'_i *sono gli autovalori (reali) di* **H** *e* **H'** gli *autovalori di* **A** *sono:*

$$\sigma_i = s_i + i s'_i \qquad (i = 1, 2, \cdots,). \tag{7}$$

Segue di qui in particolare che un autovalore multiplo di **A** ha necessariamente come parti reale e immaginaria rispettivamente autovalori multipli di **H** ed **H'**, e che il corripondente autospazio di **A** è l'intersezione degli autospazi corrispondenti di **H** e **H'**.

4. Come applicazione dimostriamo che un operatore infinitesimo, cioè della forma $\mathbf{A} = \mathbf{1} + \varepsilon \mathbf{C}$, con ε costante generalmente complessa di cui è ritenuto trascurabile il quadrato del modulo e **C** operatore a priori qualunque, è in ogni caso riducibile a forma normale. Infatti, scomponendo **A** secondo la (3), si ha ora:

$$\mathbf{H} = \mathbf{1} + \frac{\varepsilon}{2}(\mathbf{C} + \bar{\mathbf{C}}) \quad ; \quad \mathbf{H'} = \frac{\varepsilon}{2i}(\mathbf{C} - \bar{\mathbf{C}}).$$

Risulta di qui facilmente, tenuto conto dell'ipotesi fatta su ε, che **H** e **H'** sono permutabili, il che basta a provare l'asserto. Si ha poi

$$\bar{\mathbf{A}}\,\mathbf{A} = \mathbf{1} + \varepsilon(\mathbf{C} + \bar{\mathbf{C}}),$$

da cui segue il noto risultato [8] che affinchè un operatore infinitesimo sia unitario occorre e basta che l'operatore differenziale **C** sia antihermitiano.

Per un operatore unitario generico **U**, le condizioni (2), per effetto della scomposizione (4), diventano:

$$\mathbf{H}^2 + \mathbf{H'}^2 + i(\mathbf{H'H} - \mathbf{H\,H'}) = \mathbf{H}^2 + \mathbf{H'}^2 - i(\mathbf{H'H} - \mathbf{H\,H'}),$$

ossia

$$\mathbf{H'H} = \mathbf{H\,H'}.$$

Un operatore unitario è dunque, come si sapeva, riducibile a forma normale. Dovendo poi essere

$$\mathbf{H}^2 + \mathbf{H'}^2 = \mathbf{1},$$

colle notazioni usate nella (7) si ha:

$$s_i^2 + s_i'^2 = |\sigma_i|^2 = 1,$$

cioè: *Gli autovalori di un operatore unitario hanno tutti modulo* 1, *e gli operatori Hermitiani della sua scomposizione* (4) *hanno autovalori (reali) i cui quadrati sono complementari rispetto all'unità.*

5. Per gli operatori lineari riducibili a forma normale, più sopra caratterizzati, vale un'altra semplice scomposizione, che, come mostreremo,

(8) H. Weyl, loco citato, p. 27.

può presentare qualche interesse applicativo. Indicando, come sopra, con σ_i $(i = 1, 2, \cdots)$ gli autovalori (reali o complessi) dell'operatore considerato $\mathbf{A}$, e con φ_i i corrispondenti autovettori, con riferimento al sistema di assi principali costituito da questi ultimi, sarà

$$\mathbf{A}^{(o)}_{kk} = \delta_{hk}\,\sigma_h\,, \quad \text{con} \quad \delta_{hk} = \begin{cases} 1 \text{ se } h = k \\ 0 \text{ se } h \neq k\,. \end{cases} \tag{8}$$

Questa relazione si può anche scrivere

$$\mathbf{A}^{(o)}_{hk} = \sum_i \sigma_i\, \varphi^{(o)}_{(i)h}\, \varphi^{(o)}_{(i)k}\,, \tag{8'}$$

giacchè, per dati h e k, la somma a secondo membro è nulla fuorchè se $h = k$, nel qual caso vale σ_h. Dato il carattere tensoriale della relazione (8'), essa riuscirà valida qualunque sia il sistema di assi di riferimento, onde sarà in generale

$$\mathbf{A}_{hk} = \sum_i \sigma_i\, \varphi_{(i)h}\, \varphi_{(i)k}\,. \tag{9}$$

È questa la accennata scomposizione dell'operatore $\mathbf{A}$ mediante i suoi autovalori e autovettori, di cui mostriamo qui una semplice applicazione.

È noto dalla Meccanica quantica che se G è l'operatore lineare (Hermitiano) corrispondente all'osservabile G e se ψ_i è il vettore di stato del sistema quantico elementare in studio (caso puro), la forma

$$(G) \equiv \sum_{i,j} G_{ij}\,\psi_j\,\bar{\psi}_i \tag{10}$$

fornisce il valore medio dell'osservabile G in osservazioni eseguite su un numeroso gruppo di sistemi di struttura identica al dato e tutti situati all'atto dell'osservazione, nello stato ψ_i. Se si suppone invece che le osservazioni siano fatte ancora su sistemi elementari di identica struttura, ma situati in istati diversi (generalmente a priori sconosciuti), il valor medio della osservabile G risulta definito, invece che dalla (10), dall'invariante

$$(g) \equiv \sum_{i,j} G_{ij}\, X_{ji}\,, \tag{10'}$$

dove si è posto

$$X_{ij} = \sum_{h=1}^{n} \lambda_{(h)}\, \psi_{(h)i}\, \bar{\psi}_{(h)j} \tag{11}$$

$\lambda_{(h)}$ significando il rapporto $\dfrac{n_h}{N}$ tra il numero n_h dei sistemi che, all'atto dell'osservazione si trovano nello stato $\psi_{(h)i}$ e il numero N dei sistemi complessivamente osservati; con n si è indicato poi il numero degli stati distinti su cui sono distribuiti i sistemi stessi. In queste circostanze, il sistema osservato si chiama un *miscuglio*, e il tensore X_{ij} (che in base alla definizione (11) risulta Hermitiano), prende il nome di *tensore di stato* del miscuglio.

Per l'osservazione fatta al principio di questo numero, indicando con $\varphi_{(r)i}$ gli autovettori del tensore di stato, costituenti un sistema completo

di vettori ortogonali unitari, e con α_r i corrispondenti autovalori, sussisterà l'uguaglianza

$$X_{ij} = \sum_r \alpha_r \varphi_{(r)i} \bar{\varphi}_{(r)j} \tag{12}$$

corrispondente alla scomposizione (9) di X_{ij}.

Risulta da ciò che se è noto il tensore di stato di un miscuglio, senza che siano noti i vettori di stato dei singoli sistemi componenti, è pur sempre possibile, e in un solo modo (a prescindere dalle arbitrarietà dovute agli autovalori multipli), considerare il miscuglio come costituito da un insieme infinito di sistemi elementari raggruppantisi in proporzioni note in una successione numerabile di stati elementari a due a due ortogonali.

Matematica. — *Un teorema sulle funzioni misurabili rispetto ad una e continua rispetto ad un'altra variabile. Applicazioni.* Nota di L. Tibaldo, presentata[1] dal Socio M. Picone.

Le funzioni misurabili (in un insieme misurabile) sono quasi continue e le funzioni continue (in un insieme perfetto e limitato) sono uniformemente continue. Che cosa si potrà dire per le funzioni misurabili rispetto ad alcune e continue rispetto alle rimanenti variabili da cui esse dipendono ? Una risposta a questa domanda è fornita dal teorema del n. 3 di questa Nota, il cui enunciato debbo alla cortesia di Scorza Dragoni: il teorema afferma in sostanza che se $f(x, y)$ è misurabile rispetto ad x e continua rispetto ad y nel rettangolo $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, essa è uniformemente continua rispetto ad y, per x variabile in porzioni misurabili di $a \leq x \leq b$ di misura prossima quanto piaccia a $b - a$.

Nel n. 4 applico questo risultato per dimostrare il fatto, già rilevato dallo Stampacchia[2], che le funzioni di Carathéodory–Tonelli[3], approssimanti le soluzioni di un'equazione del tipo

$$y(x) = \eta + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt, \tag{1}$$

dipendono con continuità dai valori iniziali (naturalmente se si suppongono soddisfatti da $f(x, y)$ le ipotesi del teorema di esistenza formulato da Carathéodory[4] nei riguardi delle soluzioni della (1).

(1) Nella seduta dell'11 gennaio 1947.

(2) Per questa notizia, ved. G. Scorza Dragoni, *A proposito di alcuni teoremi sulle equazioni differenziali ordinarie*. [« Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova », vol. XV (1946), pp. 61–131], a piè di p. 122.

(3) Cfr.. per la definizione di queste funzioni, G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale*. [Zanichelli, Bologna, 1941], vol. I, p. 43.

(4) Cfr. C. Carathéodory, *Vorlesungen ueber reelle Funktionen*. [Teubner, Lipsia, 1927], §§ 576–592.

Nelle considerazioni che seguono mi sono limitata a funzioni di due variabili soltanto per semplicità. Gli argomenti qui trattati mi sono stati indicati da Scorza Dragoni, che ringrazio e del suggerimento e dei consigli datimi nella redazione di questa Nota.

1. Dimostriamo il seguente lemma:

Se $f(x, y)$ è inferiormente semicontinua rispetto ad y e misurabile rispetto ad x nel rettangolo

$$a \leq x \leq b \quad , \quad c \leq y \leq d ,$$

la funzione

$$E(x) = \text{extr. sup.}_{c \leq y \leq d} f(x, y)$$

è misurabile nell'intervallo $a \leq x \leq b$.

Ordiniamo in un'unica successione $r_1 r_2 , \cdots , r_h , \cdots$ tutti i numeri razionali dell'intervallo $c \vert\!\!-\!\!\vert d$. Sia $\varphi(x)$ l'estremo superiore di $f(x, r_h)$ per $h = 1, 2 \cdots$. Dalla misurabilità delle $f(x, r_h)$ in $a \vert\!\!-\!\!\vert b$, segue quella di $\varphi(x)$. E ciò è noto(5). Per concludere nel modo voluto basterà quindi far vedere che $E(x) \equiv \varphi(x)$.

È intanto evidente che $E(x) \geq \varphi(x)$.

Sia x_0 un punto di $a \vert\!\!-\!\!\vert b$. Se $E(x)$ è finito, dato ε positivo si può trovare un $y(x_0)$ tale da aversi:

$$f(x_0, y(x_0)) > E(x_0) - \varepsilon .$$

Dopo di ciò, data la semicontinuità inferiore di $f(x_0, y)$ rispetto ad y, esisterà un $r_h(x_0)$ tale che:

$$f(x_0, r_h(x_0)) > f(x_0, y(x_0)) - \varepsilon > E(x_0) - 2\varepsilon ;$$

di guisa che:

$$\varphi(x) > E(x_0) - 2\varepsilon ,$$

e, data l'arbitrarietà di ε:

$$\varphi(x_0) \geq E(x_0) .$$

Se $E(x_0) = +\infty$, si procede in maniera ormai evidente: fissato un ε arbitrariamente grande si può trovare un $y(x_0)$ tale che:

$$f(x_0, y(x_0)) > \varepsilon ,$$

ecc.

Con un ragionamento perfettamente analogo si dimostra che:

Se $f(x, y)$ è superiormente semicontinua rispetto ad y e misurabile rispetto ad x nel rettangolo

$$a \leq x \leq b \quad , \quad c \leq y \leq d ,$$

(5) Cfr. S. SAKS, *Theory of the Integral* (1937) p. 15.

la funzione

$$e(x) = \text{extr. inf. } f(x, y) \qquad c \leq y \leq d$$

è misurabile nell'intervallo $a \leq x \leq b$.

2. Dalle due proposizioni precedenti si ricava che:

Se $f(x, y)$ *è continua rispetto ad* y *e misurabile rispetto ad* x *nel rettangolo*

$$a \leq x \leq b \quad , \quad c \leq y \leq d ,$$

le funzioni

$$M(x) = \max_{c \leq y \leq d} f(x, y) \quad e \quad m(x) = \min_{c \leq y \leq d} f(x, y)$$

sono entrambe misurabili nell'intervallo $a \leq x \leq b$.

Questo teorema è stato già implicitamente dimostrato da Cesàri, con un ragionamento che nella sostanza è quello ripreso nel n. 1 della presente Nota (6).

3. Applicherò la proposizione del n. 2 per dimostrare il seguente teorema, che costituisce l'oggetto precipuo di questa Nota.

Sia data la funzione $f(x, y)$, *definita nel rettangolo* R: $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, *misurabile rispetto ad* x *e continua rispetto ad* y. *Fissato un numero* $\varepsilon > 0$, *si può determinare una porzione misurabile* I *di* $a\,|\!-\!|\,b$, *tale che:*

$$m\,I > (b - a) - \varepsilon$$

e che $f(x, y)$ *sia uniformemente continua rispetto ad* y *nella porzione* R* *costituita dai punti di R la cui* x *è in* I.

Sia n un numero naturale. Dividiamo l'intervallo $c\,|\!-\!|\,d$ in n parti uguali mediante i punti:

$$y_{n,0} = c \,,\; y_{n,1} = c + \frac{d-c}{n} \,,\; y_{n,2} = c + 2\frac{d-c}{n} \,,\; \cdots \,,\; y_{n,t} = c + t\frac{d-c}{n} \,,\; \cdots \,,\; y_{n,n} = d$$

e consideriamo gli intervalli:

$$\sigma_{n,0} : y_{n,0}\,|\!-\!-\!-\!|\,y_{n,2} \,, \quad \sigma_{n,1} : y_{n,1}\,|\!-\!-\!-\!|\,y_{n,3} \,, \cdots \,, \sigma_{n,n-2} : y_{n,n-2}\,|\!-\!-\!-\!|\,y_{n,n}$$

e diciamo $\omega_{n,t}(x)$ $(t = 0, 1, \cdots n - 2)$ l'oscillazione di $f(x, y)$, in quanto funzione di y, in $\sigma_{n,t}$. Consideriamo il più grande dei numeri $\omega_{n,t}(x)$ ed indichiamolo con $\Omega_n(x)$. Essendo misurabili le $\omega_{n,t}(x)$, in virtù del risultato

(6) L. Cesàri, *Sul teorema di densità in senso forte.* [« Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa », ser. II, vol. VIII (1939); pp. 301–307], nota (13). Il teorema si trova anche sfruttato da S. Cinquini in: *Sopra i problemi di valori al contorno per equazioni differenziali del secondo ordine.* [« Ibidem », vol. VIII (1939), pp. 271–283], p. 279, ultimo alinea. Si vegga anche: S. Cinquini, *Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali ordinarie d'ordine n.* [« Ibidem », vol. IX (1940), pp. 61–78], p. 71.

del n. 2, anche $\Omega_n(x)$ è misurabile. Al tendere all'infinito del numero n, $\Omega_n(x)$ tende a zero, in virtù della continuità (uniforme) della $f(x, y)$ rispetto ad y. Perciò per il teorema di Severini–Egoroff la successione di funzioni $\Omega_n(x)$ converge quasi uniformemente verso zero in tutto $a|-|b$. Da ciò segue l'enunciato: infatti, prefissato $\varepsilon > 0$, esiste un insieme I di $a|-|b$ tale che sia $m\,I > (b-a) - \varepsilon$ e che in I la convergenza delle $\Omega_n(x)$ verso zero sia uniforme. Allora, dato $\delta > 0$, esiste un numero p tale che in tutto I risulti $\Omega_p(x) < \delta$. Se $\beta = \dfrac{d-c}{p}$ e se y_1 ed y_2 sono due punti di $c|-|d$ tali da aversi $|y_1 - y_2| < \beta$, allora y_1 ed y_2 appartengono entrambi ad uno medesimo dei segmenti $\sigma_{p,0}, \sigma_{p,1}, \cdots, \sigma_{p,p-2}$. Epperò, se x appartiene ad I, risulta;

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \Omega_p(x) < \varepsilon;$$

da cui la continuità uniforme di $f(x, y)$ rispetto ad y in tutto R *.

4. Consideriamo la funzione $f(x, y)$ definita nella striscia S: $a \leq x \leq b$, $-\infty < y < +\infty$; tale funzione sia misurabile rispetto ad x e continua rispetto ad y. Supponiamo che sia sempre $|f(x, y)| < M(x)$, con $M(x)$ sommabile in tutto $a|-|b$. Si ponga:

$$k = \int_a^b M(x)\,dx \text{ (7)}.$$

Sia (x_0, y_0) un punto di S. Le approssimazioni successive $\varphi_1(x/\eta)$, $\varphi_2(x/\eta)\cdots$ di Carathéodory–Tonelli relative alla:

$$y(x) = \eta + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt,$$

si definiscono nel modo che segue (8).

a) Definizione di $\varphi_n(x/\eta)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ in $x_0 \leq x \leq b$.

Se $x_0 = b$, si ponga $\varphi_n(x_0/\eta) = b$.

Se $x_0 < b$, dividiamo l'intervallo $x_0|-|b$ in n parti uguali, di ampiezza $\delta_n = \dfrac{b - x_0}{n}$, mediante i punti:

$$x_0 < x_{n,1} < x_{n,2}, \cdots, < x_{n,n-1} < b$$

e chiamiamo rispettivamente

$$s_{n,1}, s_{n,2}, \cdots, s_{n,i+1}, \cdots, s_{n,n}$$

gli intervalli

$$x_0|\overline{\quad}|x_{n,1} \quad , \quad x_{n,1}|\overline{\quad}|x_{n,2}, \cdots, x_{n,i}|\overline{\quad}|x_{n\,i+1}, \cdots, x_{n,n-1}|\overline{\quad}|b;$$

(7) L'integrale è inteso nel senso di LEBESGUE, ora ed in seguito.

(8) La definizione originale di CARATHÉODORY era leggermente diversa; la definizione del testo è di TONELLI.

poniamo:

$$\varphi_n(x/\eta) = \eta \quad \text{in} \quad s_1,$$

$$\varphi_n(x/\eta) = \varphi_n(x_{n,1}) + \int_{x_0}^{x-\delta_n} f(t, \varphi_n(t/\eta))\,dt \quad \text{in} \quad s_2 \text{ (9)}$$

. . . . . .

$$\varphi_n(x/\eta) = \varphi_n(x_{n,i}) + \int_{x_{n,i-1}}^{x-\delta_n} f(t, \varphi_n(t/\eta))\,dt \quad \text{in} \quad s_{i+1},$$

. . . . . .

$$\varphi_n(x/\eta) = \varphi_n(x_{n,n-1}) + \int_{x_{n,n-2}}^{x-\delta_n} f(t, \varphi_n(t/\eta))\,dt \quad \text{in} \quad s_n.$$

b) Definizione di $\varphi_n(x/\eta)$ in $a \leq x \leq x_0$.

Si proceda in maniera analoga alla precedente: se $x_0 = a$, si ponga $\varphi_n(x_0) = a$; se $x_0 > a$, si divida l'intervallo $a \mid\!-\!\mid x_0$ in parti uguali ecc. In tal modo le $\varphi_n(x/\eta)$ risultano definite in tutto l'intervallo $a \mid\!-\!\mid b$ ed è:

$$|\varphi_n(x/\eta)| \leq |\eta| + k.$$

Voglio dimostrare che le $\varphi_n(x/\eta)$ dipendono con continuità da η. Cioè che: *fissato il numero naturale n ed il numero reale* y_0, *se* ε *è un numero positivo arbitrario, si può trovare un* $\vartheta > 0$ *in modo che da:*

$$|y_0 - \eta| < \vartheta$$

segua:

$$|\varphi_n(x/y_0) - \varphi_n(x/\eta)| < \varepsilon \tag{2}$$

in tutto $a \leq x \leq b$.

Dimostreremo che la (2) è soddisfatta in $x_0 \mid\!-\!\mid b$. (Un ragionamento analogo servirebbe poi per l'intervallo $a \mid\!-\!\mid x_0$).

Se $x_0 = b$, la cosa è evidente.

Nel caso contrario, detto s_{i+1} l'intervallo:

$$x_0 + i\delta_n \leq x \leq x_0 + (i+1)\,\delta_n \qquad (i = 0, 1, \cdots n-1) \quad \left(\delta_n = \frac{b - x_0}{n}\right),$$

dimostriamo che se ε_{i+1} è un numero positivo, si può scegliere un numero $\varepsilon_i > 0$ in modo che, nell'eventualità che sia:

$$|\varphi_n(x/y_0) - \varphi_n(x/\eta)| < \varepsilon_i \quad \text{in} \quad s_i, \tag{3}$$

riesca

$$|\varphi_n(x/y_0) - \varphi_n(x/\eta)| < \varepsilon_{i+1} \quad \text{in} \quad s_{i+1}.$$

(9) Si noti che i valori, attribuiti a $\varphi_n(x/\eta)$ nel punto $x_{n,1}$ dalle due diverse definizioni, coincidono. Analogamente per il seguito.

Scegliamo i numeri positivi:

$$\mu_i \quad , \quad \nu_i \quad , \quad \tau_i$$

in modo che sia:

$$\mu_i + 2\nu_i + \tau_i \delta_n < \varepsilon_{i+1} .$$

Data l'assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue come funzione d'insieme, si può scegliere il numero

$$\rho_i$$

in modo che sia:

$$\int_e M(x)\, dx < \nu_i , \tag{4}$$

se e è una qualunque porzione misurabile di s_i di misura, $m\,e$, minore di ρ_i. Trovato ρ_i, sia B_i una porzione misurabile di s_i tale da aversi:

$$m\, B_i < \rho_i ,$$

e tale che $f(x, y)$ sia uniformemente continua rispetto ad y nell'insieme dei punti la cui x è in $s_i - B_i$ e la cui y soddisfa alla

$$|y| \leq |y_0| + k + 1 . \tag{5}$$

Si scelga ora ε_i positivo, minore di 1 e di μ_i e tale che, se x è in $s_i - B_i$, e se y_1 e y_2 sono due valori di y che soddisfanno alla (5) ed alla disuguaglianza:

$$|y_1 - y_2| < \varepsilon_i ,$$

segua:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \tau_i . \tag{6}$$

Si supponga ora che in s_i valga la (3). Di qui, da $|\varphi_n(x/y_0)| \leq |y_0| + k_i$ e da $\varepsilon_i < 1$ segue intanto che è anche:

$$|\varphi_n(x, \eta)| < |y_0| + k + 1 .$$

Inoltre, dalla $|f(x, y)| \leq M(x)$, dalla (4) unita alla $m B_i < \rho_i$, dalla $\varepsilon_i < \mu_i$ e dalla (3), unita questa alla (6), si trae che in s_{i+1} riesce:

$$|\varphi_n(x/y_0) - \varphi_n(x/\eta)| \leq |\varphi_n(x_{n,i}/y_0) - \varphi_n(x_{n,i}/\eta)| +$$

$$+ \int_{B_i} [|f(t, \varphi_n(t/y_0))| + |f(t, \varphi_n(t/\eta))|]\, dt + \int_{s_i - B_i} |f(t, \varphi_n(t/y_0) - f(t, \varphi_n(t/\eta))|\, dt \leq$$

$$\leq \varepsilon_i + 2 \int_{B_i} M(x)\, dx + m(s_i - B_i)\, \tau_i \leq \mu_i + 2\nu_i + \delta_n \tau_i \leq \varepsilon_{i+1} .$$

Dato ora il numero positivo ε, posto $\varepsilon_n = \varepsilon$ è possibile determinare i numeri positivi $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{n-1}$, con $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \cdots < \varepsilon_{n-1} < \varepsilon_n$ in modo che se in s_1 riesce:

$$|\varphi_n(x/y_0) - \varphi_n(x/\eta)| < \varepsilon_1 , \tag{7}$$

in s_2 sia:

$$|\varphi_n(x/y_0) - \varphi_n(x/\eta)| < \varepsilon_2 ; \tag{8}$$

in modo che dalla validità della (8) in s_2 segua quella di:

$$|\varphi_n(x/y_0) - \varphi_n(x/\eta)| < \varepsilon_3$$

in s_3 ecc.

Ma in s_1 è:

$$\varphi_n(x/y_0) = y_0 \quad , \quad \varphi_n(x/\eta) = \eta ,$$

e quindi basta scegliere η compreso nell'intervallo $y_0 - \varepsilon_1 \,|-|\, y_0 + \varepsilon_1$, perchè sia valida la (7); cioè perchè in tutto $x_0 \,|-|\, b$ si abbia:

$$|\varphi_n(x/y_0) - \varphi_n(x/\eta)| < \varepsilon .$$

Il teorema è quindi dimostrato.

OSSERVAZIONE. – Se si tiene presente che le $\varphi_n(x/\eta)$ sono funzioni equicontinue di x, il risultato precedente si può affinare, nel senso che se le $\varphi_n(x/\eta)$ si pensano anche come funzioni di x_0, esse sono continue rispetto alla coppia (x_0, η).

Matematica. — *Risoluzione effettiva, mediante integrali definiti, dell'equazione differenziale binomia:* $\frac{d^n y}{dx^n} - a(x)\, y = f(x)$. Nota di M. CARAFA, presentata[1] dal Socio U. AMALDI.

Questa Nota è una breve sintesi di un mio lavoro di prossima pubblicazione[2], nel quale, valendomi della Teoria dei funzionali analitici del prof. Luigi Fantappiè, sono riuscito a dimostrare, dandone l'integrale generale in forma esplicita, che è possibile integrare l'equazione differenziale lineare (binomia):

$$\frac{d^n y}{dx^n} - a(x)\, y = f(x) \tag{1}$$

con n qualunque, mediante *integrali definiti* (in numero finito).

Riassumo brevemente i vari passaggi omettendo le dimostrazioni, per le quali rimando alla Memoria citata.

a) *Trasformazione della* (1) *in un'equazione integrale.* – Le funzioni $a(x)$ ed $f(x)$, siano analitiche e regolari nell'intorno di x_0 e le condizioni iniziali per la (1) siano le seguenti:

$$(y)_{x=x_0} = y_0 \quad ; \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = y_0^{(1)} ; \cdots ; \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} . \tag{2}$$

(1) Nella seduta dell'11 gennaio 1947.

(2) Nelle «Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL)», vol. XXVI, ser. 3ª, 1947.

Applicando n volte l'operatore «*integrazione rispetto alla* x, *da* x_0 *ad* x», che si indica con la lettera I, ad entrambi i membri della (1) e tenendo conto delle (2), si ottiene l'equazione integrale (di seconda specie di Volterra):

$$y - \mathrm{I}^n a(x)\, y = \bar{f}(x) \tag{3}$$

ovvero

$$y(x) - \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, a(t)\, y(t)\, dt = \bar{f}(x) \tag{4}$$

dove si è posto: $\bar{f}(x) = \mathrm{I}^n f(x) + \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^s}{s!}\, y_0^{(s)}$.

Il problema è ora riportato al calcolo del *nucleo risolvente* della (3) (ovvero (4)), dalla quale si ricava infatti la y con l'espressione formale:

$$y = \frac{1}{1 - \mathrm{I}^n a(x)}\, \bar{f}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\mathrm{I}^n a(x)\right]^k \bar{f}(x) \tag{5}$$

che poi, *portando a destra* (3) tutti gli operatori I che figurano nella serie a terzo membro, si trasforma nella seguente:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)\, \mathrm{I}^{n+k}\, \bar{f}(x) \tag{6}$$

dove le $a_k(x)$ sono opportuni polinomi di prodotti della $a(x)$ e delle sue derivate. Per il calcolo effettivo dell'operatore (6) si cerca subito di applicare il calcolo delle funzioni di operatori stabilito dal prof. L. Fantappiè, ma purtroppo la serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)\, \lambda^{n+k} \tag{7}$$

a cui può «*coordinarsi*» detto operatore, non risulta convergente (in generale).

b) *Sostituzione dell'operatore* I *con l'operatore* B. – Se $g(x)$ è una qualunque funzione integrabile in un certo campo ed s è una variabile ausiliaria, evidentemente risulta:

$$\mathrm{I}\, g(x) = \mathrm{I}\, \frac{\partial}{\partial s}\, [s g(x)] \tag{8}$$

se allora si indica l'operatore $\mathrm{I}\, \frac{\partial}{\partial s}$ con la lettera B, si può dare alla (6) l'altra forma:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)\, \frac{\mathrm{B}^{n+k}}{(n+k)!}\, s^{n+k}\, \bar{f}(x) \tag{9}$$

(3) Si tenga presente infatti che: $\left[\mathrm{I}^n a(x)\right]^k \bar{f}(x) = \mathrm{I}^n a(x)\, \mathrm{I}^n a(x), \cdots, \mathrm{I}^n a(x)\, \bar{f}(x)$.

nella quale si ha il vantaggio che l'operatore a secondo membro può «*coordinarsi*» alla serie:

$$(10) \qquad H_1(x, \eta s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) \frac{(\eta s)^{n+k}}{(n+k)!}$$

che, a differenza della (7), risulta convergente e quindi ora si può applicare detto metodo di calcolo delle funzioni di operatori. Infatti, considerando la y come *un operatore funzione di* B applicato alla $\bar{f}$ e supponendo *per un momento* di conoscere la somma $H_1(x, \xi)$ della serie (10), dove si sia posto $\eta s = \xi$, si trova che l'espressione (9) è data dalla formula:

$$(11) \qquad y(x) = H_1(x, Bs)\bar{f}(x) = \bar{f}(x) + \int_{x_0}^{x} \left[\frac{\partial H_1(x, \xi)}{\partial \xi}\right]_{\xi = x - \bar{x}} \bar{f}(\bar{x})\, d\bar{x}$$

nella quale l'unico elemento ancora da calcolare è la $H_1(x, \xi)$. Si osservi che il *nucleo risolvente* della (3) (ovvero della (4)) è proprio la funzione:

$$\left[\frac{\partial H_1(x, \xi)}{\partial \xi}\right]_{\xi = x - \bar{x}}.$$

c) *Calcolo della* H_1. – Si dimostra che la H_1 è soluzione dell'equazione a derivate parziali (equazione «*d'appoggio*»):

$$(12) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \xi}\right)^n H_1 = a(x) H_1$$

che somiglia alla equazione (1) di partenza, ma per cui si hanno le condizioni ai limiti:

$$(13) \quad H_1(x, 0) = 1 \quad ; \quad \left(\frac{\partial H_1}{\partial \xi}\right)_{\xi = 0} = \left(\frac{\partial^2 H_1}{\partial \xi^2}\right)_{\xi = 0} = \cdots\cdots = \left(\frac{\partial^{n-1} H_1}{\partial \xi^{n-1}}\right)_{\xi = 0} = 0.$$

La presenza della variabile ausiliaria ξ ed il fatto che le condizioni iniziali (13) sono date per $\xi =$ cost. e non per $x =$ cost., sono elementi decisivi per l'integrazione della (12).

Applicando n volte l'operatore «*integrazione rispetto alla* ξ, *da* 0 *a* ξ», che si indica con I_ξ, ad entrambi i membri della (12), questa si trasforma nella equazione integro-differenziale (prendendo la x variabile in un campo ove sia $a(x) \neq 0$):

$$(14) \qquad \frac{1}{a(x)}\left(1 + I_\xi \frac{\partial}{\partial x}\right)^n H_1 - I_\xi^n H_1 = \frac{1}{a(x)}$$

dalla quale, posto $\left(1 + I_\xi \frac{\partial}{\partial x}\right) = A$, otteniamo per la H_1 l'espressione simbolica:

$$(15) \qquad H_1 = \left(\frac{1}{\frac{1}{a(x)} A^n - I_\xi^n}\right)^{\frac{1}{a(x)}}$$

cioè la H_1 è il risultato dell'applicazione alla $\frac{1}{a(x)}$ di un operatore *funzione* (razionale) degli operatori tra loro permutabili $\frac{1}{a(x)}A^n$ ed I_ξ, e precisamente dell'operatore che *corrisponde* alla funzione $\frac{1}{\alpha - \beta^n}$ quando ad α si sostituisca $\frac{1}{a(x)}A^n$ e a β, I_ξ. Il problema perciò è ora riportato al calcolo degli operatori funzioni di $\frac{1}{a(x)}A^n$ ed I_ξ e quindi alla risoluzione delle equazioni *fondamentali*:

$$\alpha p - \frac{1}{a(x)} A^n p = \frac{1}{a(x)} \tag{16}$$

$$\beta \bar{\gamma} - I_\xi \bar{\gamma} = p. \tag{17}$$

Supposto infatti *per un momento* di avere risolto le equazioni (16) e (17), si ricava per la H_1, in base al calcolo delle funzioni di più operatori già ricordato:

$$H_1 = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{C_1} d\alpha \oint_{C_2} d\beta \, \frac{\bar{\gamma}(x, \xi, \alpha, \beta)}{\alpha - \beta^n}. \tag{18}$$

Diamo ora uno schema del calcolo effettivo delle funzioni p e $\bar{\gamma}$ soluzioni *uniche*, rispettivamente, delle (16) e (17).

d) *Calcolo della p.* – Dalla (16) (equazione «*intermedia*») si ricava il seguente sviluppo in serie della p:

$$p = p(x, \xi, \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^{k+1}} \left[\frac{1}{a(x)} A^n \right]^k \frac{1}{a(x)}. \tag{19}$$

Indicato poi con I_ζ l'operatore «*integrazione rispetto alla* ζ, *da* 1 *a* ζ», si considera l'altro operatore:

$$C = \frac{I_\zeta}{1 - \lambda I_\zeta A} \frac{b(\zeta)}{a(x)} = \sum_{h=0}^{\infty} \lambda^h I_\zeta^{h+1} A^h \frac{b(\zeta)}{a(x)} \tag{20}$$

(con λ parametro ausiliario e $b(\zeta)$ da precisarsi); presa inoltre una qualunque funzione $g(\zeta)$ integrabile in un certo campo, si trova:

$$\frac{1}{a(x)} C^k g(\zeta) = \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s G_s(\zeta, x, \xi) \tag{21}$$

nella quale per $s = nk$, si ha:

$$G_{nk}(\zeta, x, \xi) = \sum_{v=1}^{N_k} \psi_{k,v}(\zeta) \varphi_{k,v}(x, \xi) \tag{22}$$

essendo:

$$\psi_{k,v}(\zeta) = I_\zeta^{h_1, v+1} b(\zeta) I_\zeta^{h_2, v+1} b(\zeta) \cdots I_\zeta^{h_k, v+1} b(\zeta) g(\zeta) \tag{23}$$

$$\varphi_{k,v}(x, \xi) = \frac{1}{a(x)} A^{h_1, v} \frac{1}{a(x)} A^{h_2, v} \cdots \frac{1}{a(x)} A^{h_k, v} \frac{1}{a(x)} \tag{24}$$

i cui esponenti interi positivi o nulli $h_{1,\nu}, h_{2,\nu}, \cdots, h_{k,\nu}$, sono presi, nella somma (22), in tutti i modi possibili per i quali risulti:

$$h_{1,\nu} + h_{2,\nu} + \cdots + h_{k,\nu} = nk. \tag{25}$$

La somma (22) può sempre ordinarsi in modo che per $\nu = 1$, sia: $h_{1,\nu} = h_{2,\nu} = \cdots = h_{k,\nu} = n$, da cui:

$$\psi_{k,1}(z) = \left[I_z^{n+1} b(z) \right]^k g(z) \quad ; \quad \varphi_{k,1}(x,\xi) = \left[\frac{1}{a(x)} A^n \right]^k \frac{1}{a(x)}. \tag{26}$$

Si noti che $\frac{1}{\alpha^{k+1}} \varphi_{k,1}(x,\xi)$ *è proprio il termine* $(k+1)^{\text{esimo}}$ *della serie* (19) della quale vogliamo calcolare la somma p.

Tornando alla $G_{n,k}$, per quanto si è prima detto, avremo:

$$G_{n,k}(z,x,\xi) = \sum_{\nu=1}^{N_k} \psi_{k,\nu}(z)\, \varphi_{k,\nu}(x,\xi) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\lambda} \frac{d\lambda}{\lambda^{nk+1}} \frac{1}{a(x)} C^k g(z) \tag{27}$$

(dove C_λ è una piccola curva chiusa contenente $\lambda = 0$). A questo punto si dimostra che prendendo per $b(z)$ la funzione $\Gamma(z)$ di Eulero e per $g(z)$ la funzione razionale $\frac{1}{z}$, le N_k [4] funzioni $\psi_{k,\nu}(z)$ *risultano tra loro linearmente indipendenti*. Posto allora:

$$z = u + iw \quad ; \quad \psi_{k,\nu}(z) = V_{k,\nu}(u,w) + i W_{k,\nu}(u,w) \quad ; \tag{28}$$
$$\bar{\psi}_{k,\nu}(u,w) = V_{k,\nu}(u,w) - i W_{k,\nu}(u,w)$$

e indicato con D un certo dominio, a partire dalla (27) si costruisce il sistema delle N_k equazioni lineari:

$$\sum_{\nu=1}^{N_k} \varphi_{k,\nu}(x,\xi) \iint_D \psi_{k,\nu}(z)\, \bar{\psi}_{k,s}(u,w)\, du\, dw = \tag{29}$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\lambda} \frac{d\lambda}{\lambda^{nk+1}} \iint_D du\, dw\, \psi_{k,s}(u,w) \left(\frac{1}{a(x)} C_k \frac{1}{z} \right)$$
$$(s = 1, 2, 3, \cdots, N_k)$$

nelle incognite $\varphi_{k,1}(x,\xi), \varphi_{k,2}(x,\xi), \cdots, \varphi_{k,N_k}(x,\xi)$, il cui determinante Δ_k *è quello di* Gram delle N_k funzioni *linearmente indipendenti* $\psi_{k,1}(z)$, $\psi_{k,1}(z), \cdots, \psi_{k,N_k}(z)$.

Per l'incognita $\varphi_{k,1}(x,\xi)$ troveremo quindi (cfr. la (26)):

$$\left[\frac{1}{a(x)} A^n \right]^k \frac{1}{a(x)} = \sum_{s=1}^{N_k} \frac{\Delta_{k,s,1}}{\Delta_k} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\lambda} \frac{d\lambda}{\lambda^{nk+1}} \iint_D du\, dw\, \psi_{k,s}(u,w) \left(\frac{1}{a(x)} C^k \frac{1}{z} \right) \tag{30}$$

(4) $N_k = \binom{n+k-1}{k-1}$.

dove i $\Delta_{k,s,1}$ sono i complementi algebrici degli elementi della 1ª colonna del determinante del sistema. Un fatto essenziale è che le funzioni $\overline{\psi}_{k,s}(u,w)$ sono *indipendenti* dalla $a(x)$, dalla $f(x)$ e dalle condizioni iniziali (2), le diremo perciò più succintamente: *invarianti* (5).

Trasformando opportunamente la (30), si sostituisce in essa l'integrale superficiale con uno curvilineo e si giunge così all'altra espressione:

$$(31)\qquad \left[\frac{1}{a(x)}A^n\right]^k \frac{1}{a(x)} = \frac{1}{(2\pi i)^2}\oint_{C_\lambda}\frac{d\lambda}{\lambda^{nk+1}}\oint_{\overline{C}'} d\zeta\,\Phi_{n,k}(\zeta)\left(\frac{1}{a(x)}C^k\frac{1}{\zeta}\right)$$

dove la funzione $\Phi_{n,k}(\zeta)$, formata per mezzo delle $\overline{\psi}_{k,s}(u,w)$ e degli elementi del determinante del sistema (29), è anch'essa *invariante*.

Si introduce ora un'altra funzione *invariante* formata per mezzo di tutte le $\Phi_{n,k}(\zeta)$, e cioè la

$$(32)\qquad U_n(\zeta,\eta,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty}\eta^k\frac{\theta^{m_k}}{m_k}\Phi_{n,k}(\zeta)$$

con η e θ parametri ausiliari ed m_k interi positivi. È importante osservare che la funzione U_n, per la sua *invarianza*, potrà calcolarsi *una volta per sempre* (per ogni valore di n).

Supponendo *per un momento* di conoscere la funzione:

$$(33)\qquad \gamma = \gamma(x,\xi,\zeta,\eta\alpha,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(\eta\alpha\lambda^n)^{k+1}}C^k\frac{1}{\zeta}$$

si vede che, per la (31):

$$(34)\qquad \frac{1}{(2\pi i)^3\,a(x)}\oint_{C_\lambda}d\lambda\oint_{\overline{C}'}d\zeta\oint_{C_\eta}d\eta\,U_n(\zeta,\eta,\theta)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(\eta\alpha\lambda^n)^{k+1}}C^k\frac{1}{\zeta}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha^{k+1}}\frac{\theta^{m_k}}{m_k}\left[\frac{1}{a(x)}A^n\right]^k\frac{1}{a(x)}$$

che differisce dallo sviluppo (19) della p soltanto per i coefficienti $\frac{\theta^{m_k}}{m_k}$, i quali però possono eliminarsi facilmente con una derivazione, infatti:

$$(35)\qquad p(x,\xi,\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha^{k+1}}\left[\frac{1}{a(x)}A^n\right]^k\frac{1}{a(x)} = \frac{\partial}{\partial\theta_{\theta=1}}\frac{1}{(2\pi i)^3\,a(x)}\oint_{C_\lambda}d\lambda\oint_{\overline{C}'}d\zeta\oint_{C_\eta}d\eta\,U_n(\zeta,\eta,\theta)\,\gamma(x,\xi,\zeta,\eta\alpha,\lambda).$$

e) *Calcolo della* γ. – Nella (35) manca ancora da determinare la funzione γ, ma si dimostra che essa è soluzione *unica* dell'equazione:

$$(36)\qquad \eta\alpha\lambda^n\gamma - I_\zeta\left(\eta\alpha\lambda^{n+1}A + \frac{\Gamma(\zeta)}{a(x)}\right)\gamma = (1-\lambda I_\zeta A)\frac{\lambda^n-1}{\zeta}$$

(5) Si osservi però che le $\overline{\psi}_{k,s}(u,w)$ dipendono (*soltanto*) dall'ordine n della (1).

la quale, a differenza dell'equazione «intermedia» (16) di partenza è, rispetto all'operatore A, *del primo ordine e pertanto può risolversi con metodi già noti.* L'espressione esplicita della γ è la seguente:

$$(37)\qquad \gamma = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{\beta_1}} \frac{e^{\xi/\beta_1}}{\beta_1}\, d\beta_1 \left\{ \frac{e^{\lambda(\zeta-1)+\frac{P(1)}{\eta\alpha\lambda^n}}}{\eta\alpha\lambda} - \frac{1}{\eta\alpha\lambda}\int_1^{\zeta} \left(\frac{1+\lambda\tau}{\tau^2}\right) e^{\lambda(\zeta-\tau)+\frac{P(\tau)}{\eta\alpha\lambda^n}}\, d\tau \right\}$$

dove è

$$(38)\qquad P(\tau) = \frac{1}{\lambda\beta_1}\int_{\zeta}^{x+\lambda\beta_1(\zeta-\tau)} \frac{1}{a(t)}\,\Gamma\left(\zeta + \frac{x-t}{\lambda\beta_1}\right) dt.$$

f) *Calcolo della* $\bar{\gamma}$. – L'equazione (17) si integra invece facilmente con i metodi classici e si ha:

$$(39)\qquad \bar{\gamma} = \frac{1}{\beta}\, p(x, \xi, \alpha) + \frac{1}{\beta^2}\int_0^{\xi} e^{\frac{\xi-t}{\beta}}\, p(x, t, \alpha)\, dt.$$

g) *Espressione esplicita della* $y(x)$. – Abbiamo ora tutti gli elementi per il calcolo della $y(x)$, infatti sostituendo nella (11) alla H_1 la sua espressione (18) ed in questa alla $\bar{\gamma}$ l'espressione (39) ed infine in quest'ultima alla p la (35) (opportunamente «prolungata» [6]), dopo alcune trasformazioni e riduzioni, si arriva alla formula finale:

$$(40)\qquad y(x) = \bar{f}(x) +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi i)^4}\,\frac{\partial}{\partial\theta_{\theta=1}} \int_{x_0}^{x} d\bar{x} \oint_{\bar{C}'} d\zeta \oint_{C_\mu} d\mu \oint_{C_\omega} d\omega \oint_{C_c} dc\, (M_n)_{\xi=\cdots=\bar{x}} \left(\frac{\bar{f}(\bar{x})}{ca(x) - \frac{a(x)}{\omega}\int_x^{x+\omega(\zeta-\mu)} \frac{1}{a(t)}\,\Gamma\left(\zeta + \frac{x-t}{\omega}\right)} \right.$$

nella quale $M_n = M_n(x, \xi, \zeta, \mu, \omega, c, \theta)$ è una funzione *invariante* formata per mezzo della U_n e che, come la U_n stessa, potrà per un prefissato n, calcolarsi *una volta per sempre.*

Concludendo: *l'integrale generale della* (1) *si può ottenere, qualunque sia n, con 7 integrazioni (di cui 4 definite) ed una derivazione a partire dai termini noti e dalla funzione universale invariante* M_n.

(6) Infatti l'espressione (35) è valida solo per $|\alpha| > \alpha_0$ ($\neq 0$), mentre per il calcolo della (18) occorre *avere* il valore della p in una regione che si estende anche all'interno della circonferenza $|\alpha| = \alpha_0$.

Matematica. — *Sulla conservazione dell'esistenza di radici di un sistema di equazioni, nel passaggio al limite.* Nota di S. GHEZZO, presentata[1] dal Socio M. PICONE.

In uno spazio metrico lineare Σ l'esistenza di elementi uniti in una trasformazione $y = \Gamma(x)$ di Σ, in una sua porzione, si traduce in quella di radici per l'equazione $x - \Gamma(x) = 0$ [2]; e viceversa.

Quindi, i teoremi dati da Scorza Dragoni [3] circa il conservarsi di elementi uniti nel passare al limite in una successione convergente di trasformazioni, dotate di elementi siffatti, si interpretano subito (se lo spazio è lineare) come teoremi circa il conservarsi di radici nel passare al limite in una successione di equazioni.

In questa Nota mi propongo appunto di precisare queste considerazioni, e di applicarle poi ad estendere allo spazio hilbertiano il seguente noto teorema:

Il sistema di funzioni reali di variabile reale

$$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

ammette soluzioni, se le f_i sono continue nell'ipercubo

$$c : -1 \leq x_r \leq 1 \qquad (r = 1, 2, \cdots, n)$$

dello spazio Euclideo $S_n \equiv (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, *e soddisfanno alle condizioni*

$$f_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, -1, x_{i+1}, \cdots, x_n) \leq 0,$$
$$f_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, +1, x_{i+1}, \cdots, x_n) \geq 0$$ [4]

sulle facce $(n-1)$-dimensionali dell'ipercubo c.

1. Sia Σ uno spazio metrico lineare, di cui indichiamo con O l'origine, ed

$$\eta = F(x) \qquad (1)$$

una funzione univoca, definita in una porzione di Σ, η variando anch'essa in una porzione di Σ.

(1) Nella seduta dell'11 gennaio 1947.

(2) Cfr. P. ALEXANDROFF e H. HOPF, *Topologie*. [Springer, Berlino (1935)], cap. XII, § 3, n. 3, p. 475.

(3) G. SCORZA DRAGONI, *Elementi uniti di trasformazioni funzionali e problemi di valori ai limiti*. [«Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Roma», ser. IV, vol. 2 (1938), pp. 255–275], n. 1. Vedi anche: G. SCORZA DRAGONI, *Elementi uniti di trasformazioni funzionali e teoremi di dipendenza continua*. [«Atti del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti», to. XCIX, parte II, Cl. di Sc. mat. e nat. (1940)] pp. 147–152.

(4) Per una bibliografia completa relativa a questo teorema rimando a: G. SCORZA DRAGONI, *Sull'esistenza di soluzioni per un sistema di n equazioni in n incognite*. [«Atti della Pontificia Accademia delle Scienze», vol. X (1946), pp. 127–134].

Come si è detto, ogni radice dell'equazione $F(x) = 0$ è un elemento unito per la trasformazione funzionale

$$y = \Gamma(x) \equiv x - F(x); \tag{2}$$

e, viceversa, ogni elemento unito nella (2) è una radice per $F(x) = 0$. Ora, se in un insieme Σ' di Σ è definita una successione

$$\eta = F_1(x) \quad , \quad \eta = F_2(x), \cdots \tag{3}$$

di funzioni del tipo (1), le trasformazioni funzionali definite dalle

$$y = \Gamma_r(x) \equiv x - F_r(x) \qquad (r = 1, 2, \cdots, n)$$

mutano Σ' in porzioni di un conveniente sottinsieme Σ^* di Σ. Ed è evidente che se $F_r(x)$ è uniformemente continua in Σ', tale è anche $\Gamma_r(x)$; e che se le $F_1(x), F_2(x), \cdots$ sono equicontinue in Σ' tali sono anche le $\Gamma_1(x), \Gamma_2(x), \cdots$

Inoltre – poichè la successione (3) converge [uniformemente] verso una funzione $F(x)$, quando, prefissato un arbitrario $\varepsilon > 0$, esiste un indice m [indipendente da x] tale che per ogni $n > m$ sia

$$\rho(F(x), F_n(x)) < \varepsilon,$$

se $\rho(a, b)$ indica la distanza di due elementi a e b di Σ –, si riconosce subito che la convergenza [uniforme] delle $F_n(x)$ verso $F(x)$ è equivalente a quella delle $\Gamma_n(x)$ verso $\Gamma(x) \equiv x - F(x)$.

2. Orbene, i teoremi di Scorza Dragoni, cui si è alluso nella prefazione, dicono che:

Affinchè esista almeno un elemento unito nella trasformazione funzionale

$$y = \Gamma(x),$$

limite di una successione di trasformazioni, dotate di elementi uniti, $y = \Gamma_1(x), y = \Gamma_2(x), \cdots$ *di una porzione* Σ' *di uno spazio metrico* Σ *in sottoinsiemi di una porzione* Σ^* *di* Σ, *è sufficiente che:*

a) *Le* $\Gamma_r(x)$ *siano equicontinue in* Σ' *e* $\Sigma' \cdot \Sigma^*$ *sia compatta rispetto a* Σ';

oppure che:

b) Σ' *sia chiusa (rispetto a* Σ*) e* Σ^* *compatta, e le* $\Gamma_r(x)$ *siano continue in* Σ' *ed ivi convergenti uniformemente verso* $\Gamma(x)$;

ovvero che:

c) *l'insieme dei punti di* Σ' *uniti in una almeno delle* $\Gamma_r(x)$ *sia contenuto in una porzione* Σ'' *di* Σ', *compatta rispetto a* Σ', *e le* $\Gamma_1(x), \Gamma_2(x), \cdots$ *siano equicontinue in* Σ'';

oppure che:

d) *l'insieme dei punti di* Σ' *uniti in una almeno delle* $\Gamma_r(x)$ *sia contenuto in una porzione compatta,* Σ'', *di* Σ', *ed in* Σ'' *le* $\Gamma_1(x), \Gamma_2(x), \cdots$ *siano continue e convergenti uniformemente verso* $\Gamma(x)$.

La *c*) è più generale della *a*), e così la *d*) della *b*). Avverto inoltre che per dimostrare questi teoremi, in ipotesi così generali, bisogna far uso del postulato di Zermelo.

3. A norma delle osservazioni del n. 1, se Σ è lineare, il teorema precedente si traduce in:
Se è

$$F(x) = \lim_{r\to\infty} F_r(x)$$

in tutta una porzione Σ' *di* Σ, *e se* Σ^* *è un insieme di* Σ *che contiene tutte le immagini di* Σ' *mediante le trasformazioni* $y = x - F_r(x)$ $(r = 1, 2, \cdots)$, *l'equazione*

$$F(x) = 0$$

ammette almeno una radice, se le $F_r(x) = 0$ *sono dotate di radici, e se:*

a) *le* $F_r(x)$ *sono equicontinue in* Σ' *e* $\Sigma' \cdot \Sigma^*$ *è compatta rispetto a* Σ';
oppure se:

b) Σ' è *chiusa (rispetto a* Σ), Σ^* *è compatta, e le* $F_r(x)$ *sono continue in* Σ' *ed ivi convergenti uniformemente verso* $F(x)$;
o più generalmente se:

c) *l'insieme degli zeri delle* (3) *appartiene ad una porzione,* Σ'', *di* Σ' *compatta rispetto a* Σ' *ed in* Σ'' *le* $F_r(x)$ *sono equicontinue;*
oppure se:

d) Σ'' *è compatta in sè, le* $F_r(x)$ *sono continue e convergenti uniformemente verso* $F(x)$.

Infatti basta applicare il teorema del n. 2 alla successione

$$y = \Gamma_r(x) \equiv x - F_r(x) \qquad (r = 1, 2, \cdots),$$

convergente verso

$$y = \Gamma(x) \equiv x - F(x),$$

per dedurre che la $y = \Gamma(x)$ ammette almeno un elemento unito.

4. In una porzione H' dello spazio H di Hilbert[5], sia ora definito il sistema

$$(4) \qquad \begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \cdots) = 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \cdots) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_n(x_1, x_2, \cdots) = 0, \end{cases}$$

essendo $X \equiv (x_1, x_2, \cdots)$ e $\Phi_n(X) \equiv (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, 0, 0, \cdots)$ punti di H. Il sistema (4) si può evidentemente interpretare in H' come una unica equazione funzionale: la

$$(5) \qquad \Phi_n(X) = 0.$$

Pongasi ora che n sia suscettibile dei valori $1, 2, \cdots$. Allora, se per X variante in H', $\Phi(X) \equiv (\varphi_1, \varphi_2, \cdots)$ è un punto di H (cioè se la serie $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \cdots$ converge per X in H'), è anche

$$\Phi(X) = \lim_{n\to\infty} \Phi_n(X);$$

(5) Per questa nozione cfr. loc. cit. nota (2), cap. I, § 2, n. 12.

epperò in virtù della *c*) del n. 3:

Se per ogni $n = 1, 2, \cdots$ *la* (5) *ammette radici, e l'insieme di queste radici è contenuto in una porzione* H'' *di* H' *compatta rispetto ad* H'; *e se le funzioni*

$$Y = \Phi_n(X) \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

sono equicontinue e la serie

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \cdots$$

converge per ogni X *di* H', *anche il sistema di infinite equazioni*

$$\varphi_i(x_1, x_2, \cdots) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots)$$

ammette almeno una soluzione, radice dell'equazione $\Phi(X) = 0 - \Phi_n(X)$ *e* $\Phi(x)$ *avendo naturalmente il significato già chiarito.*

5. Il risultato del n. 4 può essere ampliato, nel senso che: *Nel caso attuale l'equicontinuità delle* $\Phi_n(X)$ *e la convergenza della serie* $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \cdots$ *non sono essenziali. Queste due condizioni possono essere sostituite dalla sola ipotesi della continuità delle* φ_i. Infatti, se $X_n \equiv (x_{n,1}, x_{n,2}, \cdots)$ è una soluzione di $\Phi_n(X) = 0$, e se $X_{r_1} \equiv (x_{r_1,1}, x_{r_1,2}, \cdots)$, $X_{r_2} \equiv (x_{r_2,1}, x_{r_2,2}, \cdots), \cdots$ converge verso $X_0 \equiv (x_{0,1}, x_{0,2}, \cdots)$, (ipotesi lecita questa, in quanto si è supposto che le radici di $\Phi_n(X) = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ varîno in un insieme compatto), allora

$$\Phi_n(X_{r_p}) = 0 \quad \text{per} \quad n \leq r_p,$$

cioè

$$\varphi_i(X_{r_p}) = 0 \quad \text{per} \quad i \leq r_p,$$

da cui, per la continuità delle φ_i,

$$\varphi_i(X_0) = 0 \quad \text{per ogni } i.$$

Notiamo inoltre che *per la validità del teorema precedente non è neanche necessario che tutte le radici di tutte le* $\Phi_n(X) = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ *siano contenute in una medesima porzione compatta* H'' di H', *basta che sia contenuta in* H' *almeno una delle radici di ciascuna delle* $\Phi_n(X) = 0$.

6. Dall'ultimo teorema enunciato si trae subito che:

Il sistema

$$\psi_i(x_1, x_2, \cdots) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots)$$

definito nell'ipercubo

$$C: -1 \leq x_r \leq 1 \qquad (r = 1, 2, \cdots)$$

dello spazio hilbertiano (6) *ammette soluzioni, se le* ψ_i *sono continue in* C *e soddisfanno alle condizioni*

$$\psi_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, -1, x_{i+1}, \cdots) \leq 0,$$

$$\psi_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, +1, x_{i+1}, \cdots) \geq 0,$$

(6) Questo significa che C è l'insieme delle successioni $x_1, x_2, x_3, \cdots$ tali che converga la serie $x_1^2 + x_2^2 + \cdots$ e che siano soddisfatte le disuguaglianze $-1 \leq x_r \leq 1$.

e se le soluzioni, certo esistenti (in virtù del teorema enunciato in prefazione), dei sistemi

$$\psi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, 0, \cdots) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

sono contenute in un insieme compatto I *di* H.

7. L'equivalenza, di cui al n. 1, fra l'esistenza degli zeri della funzione $F(X)$ e quella dei punti uniti di $Y = \Gamma(X) = X - F(X)$ ci permette di dedurre dal teorema del n. 6, che:

La trasformazione funzionale

$$Y = \Gamma(X) \tag{6}$$

dell'ipercubo $H': -1 \leq x_r \leq 1$ $(r = 1, 2, \cdots)$ *dello spazio hilbertiano* H, *in una porzione* H^* *di* H, *ammette almeno un punto unito, se è continua, se* H^* *è compatta rispetto ad* H' *e se la* $Y = \Gamma(X)$ *muta le facce di* H' *appartenenti agli iperpiani*

$$x_i = -1 \quad , \quad x_i = +1 \qquad (i = 1, 2, \cdots)$$

tutte in insiemi rispettivamente contenuti nei semispazi

$$x_i \leq -1 \quad , \quad x_i \geq 1 \qquad (i = 1, 2, \cdots), \tag{7}$$

oppure tutte in insiemi rispettivamente contenuti nei semispazi

$$x_i \geq -1 \quad , \quad x_i \leq 1 \qquad (i = 1, 2, \cdots). \tag{8}$$

Infatti, si supponga che la (6) muti il punto $(x_1, x_2, \cdots)$ di H' nel punto $(g_1(x_1, x_2, \cdots), g_2(x_1, x_2, \cdots), \cdots)$ di H^*. Allora la equazione $F(X)$ a $X - \Gamma(X) = 0$ equivale al sistema

$$f_i(x_1, x_2, \cdots) = x_i - g_i(x_1, x_2, \cdots) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots).$$

Orbene, se valgono le (7) riesce

$$f_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, -1, x_{i+1}, \cdots) \leq 0 \quad , \quad f_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \cdots) \geq 0$$
$$(i = 1, 2, \cdots),$$

se invece valgono le (8) riesce

$$f_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, -1, x_{i+1}, \cdots) \geq 0 \quad , \quad f_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \cdots) \leq 0.$$
$$(i = 1, 2, \cdots).$$

Inoltre, se $(a_{n,1}, a_{n,2}, \cdots, a_{n,n})$ è una soluzione in H' di

$$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, 0, \cdots) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots n), \tag{9}$$

il punto $A_n \equiv (a_{n,1}, a_{n,2}, \cdots, a_{n,n}, 0, 0, \cdots)$ di H' è trasformato dalla (6) in un punto del tipo $B_n \equiv (a_{n,1}, a_{n,2}, \cdots, a_{n,n}, \beta_{n,n+1}, \beta_{n,n+2}, \cdots)$ appartenente ad H^* (di guisa che la somma dei quadrati delle coordinate è convergente), essendo $\beta_{n,n+p} = g_{n+p}(a_{n,1}, a_{n,2}, \cdots, a_{n,n}, 0, 0, \cdots)$. Ora essendo H^* compatta rispetto ad H', dalla successione dei punti

$$(a_{n,1}, a_{n,2}, \cdots, a_{n,n}, \beta_{n,n+1}, \beta_{n,n+2}, \cdots) \qquad (n = 1, 2, \cdots),$$

se ne può estrarre una

$$(10) \qquad (a_{r_\nu,1}, a_{r_\nu,2}, \cdots, a_{r_\nu,r_\nu}, \beta_{r_\nu,r_\nu+1}, \beta_{r_\nu,r_\nu+2}, \cdots) \quad (\nu = 1, 2, \cdots)$$

convergente verso il punto $(a_1, a_2, \cdots)$ di H′ (di guisa che $a_1^2 + a_2^2 + \cdots$ è convergente). E quindi, la successione

$$(a_{r_\nu,1}, a_{r_\nu,2}, \cdots, a_{r_\nu,r_\nu}, 0, 0, \cdots) \qquad (\nu = 1, 2, \cdots)$$

che fornisce una soluzione del sistema (9) per $n = r_\nu$ risulta convergente anch'essa verso $(a_1, a_2, \cdots)$ di H′. Dunque l'ipotesi che H* sia compatta rispetto ad H′ equivale a quella che le soluzioni dei sistemi (9) varîno in una porzione di H′ compatta rispetto ad H′.

Vale a dire: nelle ipotesi attuali il sistema $f_i = 0$ $(i = 1, 2, \cdots)$ soddisfa alle condizioni del teorema del n. 6. Donde la conclusione.

In particolare:

La $Y = \Gamma(X)$ *ammette almeno un elemento unito, se muta con continuità* H′ *in un insieme compatto di* H, *portando la frontiera di* H′ *in una porzione di* H′ *stesso.*

I teoremi contenuti in quest'ultimo numero si riattaccano a risultati di Birkhoff, Kellog, Schauder, Caccioppoli [7].

Analisi. — *Problemi ai limiti per le equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine in forma parametrica.* Nota di C. Miranda, presentata [1] dal Corrisp. R. Caccioppoli.

1. Sia C una curva piana biregolare, cioè dotata in ogni punto di tangente e curvatura continue. Orientiamo C in modo qualsiasi e introduciamo su di essa un sistema di ascisse curvilinee s in modo che il verso delle s crescenti coincida con quello prestabilito come positivo su C; diciamo poi τ la retta tangente a C in un suo punto generico orientata anch'essa nel verso positivo, α e β i suoi coseni direttori e θ l'angolo orientato $x\tau$.

Se $f(x, y, \alpha, \beta)$ è una funzione continua con le sue derivate parziali prime nel dominio

$$-\infty < \frac{x}{y} < +\infty \quad , \quad -1 \leq \frac{\alpha}{\beta} \leq 1$$

e se lungo tutta C riesce

$$(1) \qquad \frac{d\theta}{ds} = f(x, y, \alpha, \beta),$$

diremo che la curva orientata C è una curva integrale della (1).

(7) Per le indicazioni bibliografiche relative si veda: R. Caccioppoli, *Sugli elementi uniti di trasformazioni funzionali: un'osservazione sui problemi di valori ai limiti.* [« Questi Rendiconti », ser. 6ª, vol. XIII (1931), pp. 498–502].

(1) Nella seduta dell'11 gennaio 1947.

Se

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad , \quad (a \leq t \leq b \quad , \quad x'^2 + y'^2 > 0),$$

è una rappresentazione parametrica di C, tale che il verso delle t crescenti coincida con quello prestabilito come positivo su C, la (1) può anche scriversi:

$$(1') \qquad \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = f\left(x, y, \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right)$$

e pertanto essa si dirà *un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine in forma parametrica*. Se in particolare come parametro si assume l'arco s di C, dalla (1') si ricava:

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{ds^2} = -\dfrac{dy}{ds} f\left(x, y, \dfrac{dx}{ds}, \dfrac{dy}{ds}\right) \\ \dfrac{d^2y}{ds^2} = \dfrac{dx}{ds} f\left(x, y, \dfrac{dx}{ds}, \dfrac{dy}{ds}\right) \end{cases}$$

e quindi, per la continuità delle derivate parziali prime di $f(x, y, \alpha, \beta)$, x e y risultano dotate di derivate terze continue rispetto a s.

Dati ora arbitrariamente due punti P_1 e P_2 del piano, sia Γ la classe di tutte le curve biregolari di punti terminali P_1 e P_2, orientate nel verso che va da P_1 a P_2 e di lunghezza finita. Ci proponiamo di vedere se esistono curve integrali della (1) appartenenti a Γ.

2. Consideriamo più generalmente l'equazione

$$(3) \qquad \frac{d\theta}{ds} = \lambda f(x, y, \alpha, \beta)$$

con $0 \leq \lambda \leq 1$ e supponiamo che esistano due numeri positivi M e m tali da risultare

$$(4) \qquad |f(x, y, \alpha, \beta)| \leq M,$$

$$(5) \qquad f^2 + \beta f_x - \alpha f_y \leq -m.$$

Sussiste allora il seguente:

LEMMA. – *Nell'ipotesi* (5), *se per un valore* λ_0 *di* λ *dell'intervallo* (0,1) *la* (3) *ammette una curva integrale* C_0 *appartenente a* Γ, *comunque si prenda un intorno del primo ordine di* C_0, *sufficientemente ristretto, si può determinare un intorno di* λ_0 *tale che per ogni valore di* λ *in esso contenuto la* (3) *ammetta una e una sola curva integrale appartenente a* Γ *e contenuta nel prefissato intorno di* C_0.

Sia l_0 la lunghezza di C_0 e scriviamo le equazioni parametriche di C_0 nella forma.

$$x = \varphi(s) \quad , \quad y = \psi(s) \quad , \quad (0 \leq s \leq l_0),$$

dove φ e ψ sono dotate di derivate terze continue rispetto all'arco s ed è inoltre

$$P_1 \equiv (\varphi(0), \psi(0)) \quad ; \quad P_2 \equiv (\varphi(l_0), \psi(l_0)).$$

Ogni curva C di un conveniente intorno del primo ordine di C_0 ha equazioni parametriche del tipo

$$x = \varphi(s) - \eta\psi'(s) \quad , \quad z = \psi(s) + \eta\varphi'(s),$$

dove η è funzione di s continua con la sua derivata prima e nulla per $s = 0$ e $s = l_0$.

Indicando con $\mathring{f}$ i valori assunti dalla f su C_0 e ponendo

$$A = \sqrt{(1 - \lambda_0 \mathring{f}\eta)^2 + \eta'^2}$$

il nostro problema si riconduce quindi alla ricerca di un integrale dell'equazione differenziale ordinaria

$$\eta''(1 - \lambda_0 \mathring{f}\eta) + \eta' \frac{d}{ds}(\lambda_0 \mathring{f}\eta) + \lambda_0 \mathring{f} A^2 = \tag{6}$$

$$= A^3 \lambda f\left(\varphi - \eta\psi', \psi + \eta\varphi', \frac{\varphi'(1 - \lambda_0 \mathring{f}\eta) - \psi'\eta'}{A}, \frac{\varphi'\eta' + \psi'(1 - \lambda_0 \mathring{f}\eta)}{A}\right),$$

verificante le condizioni

$$\eta(0) = \eta(l_0) = 0 \quad , \quad A > 0. \tag{7}$$

Se un tale integrale esiste ed è una funzione derivabile di λ (nulla per $\lambda = \lambda_0$), posto:

$$\left(\frac{d\eta}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0} = \omega(s),$$

sussistono per ω l'equazione differenziale

$$\omega'' + \lambda_0 [\psi' \mathring{f}_\alpha - \varphi' \mathring{f}_\beta] \omega' + [\lambda_0^2 \mathring{f}^2 + \lambda_0 (\psi' \mathring{f}_x - \varphi' \mathring{f}_y)] \omega = \mathring{f} \tag{8}$$

e le condizioni ai limiti

$$\omega(0) = \omega(l_0) = 0, \tag{9}$$

dove $\mathring{f}_\alpha$, $\mathring{f}_\beta$, $\mathring{f}_x$, $\mathring{f}_y$ designano le derivate parziali di f calcolate su C_0.

Viceversa, se la (8) ammette una e una sola soluzione verificante le (9), noti teoremi assicurano che per λ sufficientemente prossimo a λ_0 la (6) ammette una e una sola soluzione verificante le (7) che si mantenga in un conveniente intorno del primo ordine di $\eta = 0$ e sia funzione continua e derivabile di λ nulla per $\lambda = \lambda_0$.

Ora per $\lambda_0 = 0$ la curva C_0 si riduce al segmento $P_1 P_2$, l_0 alla lunghezza di tale segmento e la risolubilità della (8) con le condizioni (9) è evidente; per $\lambda_0 = 0$ essa segue invece dalla (5) e resta con ciò dimostrato quanto volevamo.

Si osservi anche che, supposta verificata anche la (4) si ha per $0 < \lambda_0 \leq 1$:

$$|\omega| \leq \frac{M}{m\lambda_0^2}, \tag{10}$$

giacchè nei punti di massimo [minimo] relativo per ω riesce:

$$[\lambda_0^2 f^0 + \lambda_0(\psi' f_x^0 - \varphi' f_y^0)]\,\omega \geqq -M \quad , \quad [\leq M],$$

mentre è

$$\lambda_0^2 f^0 + \lambda_0(\psi' f_x^0 - \varphi' f_y^0) \leq -m\lambda_0^2.$$

Ciò premesso dimostriamo che

I. - *Nelle ipotesi* (4) *e* (5) *esiste per ogni* λ *dell'intervallo* $(0\,,\,1)$ *almeno una curva integrale della* (3) *appartenente a* Γ.

Diciamo Δ l'insieme dei valori di δ, positivi e non superiori ad 1, tali che ad ogni valore di λ dell'intervallo chiuso $(0\,,\,\delta)$ si possa far corrispondere una ben determinata curva C_λ in modo che:

a) C_λ appartenga a Γ e sia curva integrale della (3).

b) C_λ si riduca al segmento $P_1\,P_2$ per $\lambda = 0$.

c) Comunque si prenda λ_0 in $(0\,,\,\delta)$ e comunque si fissi un intorno del primo ordine, convenientemente ristretto, di C_{λ_0}, si possa trovare un intorno di λ_0 su $(0\,,\,\delta)$ tale che, per λ in detto intorno, C_λ sia l'unica curva integrale della (3) contenuta nel predetto intorno di C_{λ_0}.

Dal lemma che abbiamo premesso segue che Δ non è vuoto e che esso è anzi un intervallo aperto a destra; pertanto se noi dimostriamo che l'estremo superiore $\bar{\delta}$ di Δ appartiene a Δ, che cioè Δ è anche chiuso sull'intervallo $(0\,,\,1)$, rimarrà provato che Δ coincide con l'intervallo $(0\,,\,1)$ e cioè che la (3) ammette per ogni λ di $(0\,,\,1)$ almeno una curva integrale appartenente a Γ.

Ora per mostrare che Δ è chiuso basta far vedere che la (3) ammette anche per $\lambda = \bar{\delta}$ una curva integrale appartenente a Γ che sia curva di accumulazione delle C_λ per $\lambda \to \bar{\delta}$ e ciò resta pienamente dimostrato se mostriamo che, comunque si prenda in Δ un punto $\lambda_0 > 0$, la lunghezza delle C_λ sono equilimitate per $\lambda_0 \leq \lambda < \bar{\delta}$, perchè allora l'insieme delle C_λ è compatto e ammetta quindi una curva di accumulazione per $\lambda \to \bar{\delta}$, la quale è poi, ovviamente, curva integrale della (3) per $\lambda = \bar{\delta}$.

Detta $l(\lambda)$ la lunghezza della curva C_λ si ha:

$$\frac{dl}{d\lambda} = -\int_0^l f\omega\, ds$$

e quindi per $\lambda > \lambda_0$, in virtù della (10):

$$\left|\frac{d\log l}{d\lambda}\right| \leq \frac{M^2}{m\lambda^2},$$

da cui

$$l(\lambda) < l(\lambda_0)\, e^{\frac{M^2}{m}\frac{1}{\lambda_0}},$$

con che resta provato il nostro asserto.

Un ragionamento analogo permette di provare che

II. – *Se è* $0 < \lambda_0 \leq 1$ *e se per* $\lambda = \lambda_0$ *la* (3) *ammette, oltre la* C_{λ_0} *di cui al teorema precedente, anche un'altra curva integrale* C'_{λ_0}, *pur essa appartenente a* Γ, *ad ogni valore positivo e non superiore ad* 1 *di* λ *si può far corrispondere una curva integrale della* (3) C'_λ, *pur essa appartenente a* Γ, *la quale varia con continuità (del primo ordine) al variare di* λ *e tende a* C'_{λ_0} *per* $\lambda \to \lambda_0$. *Per* $\lambda \to 0$ *la lunghezza di* C'_λ *tende a* $+\infty$.

L'ultima parte dell'enunciato deriva dal fatto che, se le lunghezze delle C'_λ fossero equilimitate, per $\lambda \to 0$ C'_λ tenderebbe, come C_λ, al segmento $P_1 P_2$, ciò che contraddirebbe il lemma che abbiamo premesso.

3. – Vogliamo ora indicare alcuni complementi dei teoremi dimostrati nel numero precedente.

Si noti anzitutto che l'ipotesi (4) diviene superflua se è possibile assicurare che le curve integrali della (3) appartenenti a Γ non escono da una porzione limitata del piano xy. Ciò avviene, per esempio, se esiste un cerchio di centro P_1 e raggio R, contenente anche il punto P_2, tale che all'esterno di esso riesca

$$1 + [\alpha (y - y_1) - \beta (x - x_1)] f(x, y, \alpha, \beta) > 0, \tag{11}$$

designando x_1 e y_1 le coordinate del punto P_1.

Invero, se $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$ sono al solito le equazioni parametriche di una curva integrale C della (3) appartenente a Γ, posto

$$\zeta = [\varphi(s) - x_1]^2 + [\psi(s) - y_1]^2$$

si ha

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \zeta}{ds^2} = 1 + \lambda [\varphi' (\psi - y_1) - \psi' (\varphi - x_1)] f(\varphi, \psi, \varphi', \psi'),$$

$$\zeta(0) = \zeta'(0) = 0,$$

onde nell'ipotesi posta segue che $\zeta(s)$ non può avere massimi all'esterno del cerchio di centro P_1 e raggio R e la curva C è, pertanto, tutta contenuta in detto cerchio.

Supponiamo ora che la (11) valga qualunque siano x, y, α e β; è allora chiaro che lungo ogni curva integrale C della (3) appartenente a Γ riesce $\zeta \leq \overline{P_1 P_2}^2$. Detto allora μ il minimo dell'espressione (11) nel cerchio di centro P_1 e raggio $\overline{P_1 P_2}$, si ha

$$\zeta > \mu s^2$$

e quindi per la lunghezza l di C:

$$l \leq \frac{P_1 P_2}{\sqrt{\mu}}. \tag{12}$$

Dalla (12) e dai teoremi I e II segue in definitiva:

III. – *Nelle ipotesi* (5) *e* (11) *esiste, per ogni* λ *dell'intervallo* (0, 1) *una e una sola curva integrale della* (3) *appartenente a* Γ.

4. Ci proponiamo ora di far vedere che l'ipotesi (11) è da sola sufficiente ad assicurare l'esistenza di almeno una curva integrale della (3) appartenente a Γ. Ciò risulterà come caso particolare di un teorema più generale.

Diciamo $C(\alpha_1, \beta_1)$ la curva integrale della (3) uscente dal punto P_1 nella direzione dell'asse di coseni direttori (α_1, β_1). Indicando con s l'arco di $C(\alpha_1, \beta_1)$ contato a partire dal punto P_1 e con P il punto di $C(\alpha_1, \beta_1)$ di ascissa curvilinea s si ha che:

IV. – *Se per qualsiasi coppia* (α_1, β_1) *si ha sempre*

$$\lim_{s \to +\infty} \overline{PP_1} = +\infty, \tag{13}$$

esiste sempre almeno una curva integrale della (3) *appartenente a* Γ.

Le coordinate del punto P risultano funzioni continue di $s, \alpha_1, \beta_1, \lambda$:

$$x = x(s, \alpha_1, \beta_1, \lambda) \quad , \quad y = y(s, \alpha_1, \beta_1, \lambda) \tag{14}$$

e le (14) definiscono per ogni λ una trasformazione della superficie cilindrica D_1:

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1 \quad , \quad 0 \leq s < +\infty,$$

in un insieme T_λ del piano xy. Dimostrare il teorema significa dunque far vedere che T_λ coincide con l'intero piano xy.

Sotto l'ipotesi (13) ogni porzione limitata di T_λ è l'immagine di una porzione limitata di D_1, onde segue ovviamente, per la continuità della trasformazione, che T_λ è chiuso.

Detto ora $H_\lambda(P)$ l'insieme di tutti i punti di D_1 che hanno per immagine il punto P di T_λ (distinto da P_1), sia γ_1 la frontiera (orientata in un verso prestabilito) di un intorno di $H_\lambda(P)$ su D_1 e γ la sua immagine in T_λ. Poichè γ non contiene P resta definito l'ordine topologico n di P rispetto a γ ed esso è, una funzione continua di P in T_λ. Poichè n può assumere solo valori interi e T_λ è connesso, n è costante in T_λ. È noto che se è $n \neq 0$ in un punto P, tutto un intorno di P appartiene a T_λ e quindi T_λ è un insieme aperto, che, per essere anche chiuso, deve coincidere con l'intero piano xy.

Il teorema sarà dunque dimostrato se faremo vedere che è $n \neq 0$. Ma ciò segue dal fatto che n è costante anche al variare di λ, mentre per $\lambda = 0$ è $n = \pm 1$.

Dal teorema IV segue, come volevamo:

V. – *Nell'ipotesi* (11) *esiste, per ogni* λ, *almeno una curva integrale della* (3) *appartenente a* Γ.

Invero dalla (11) segue facilmente la (14).

Matematica. — *Sugli elementi eccezionali dell'algebra legata a un gruppo di ordine finito in un corpo a caratteristica p.* Nota di L. LOMBARDO-RADICE, presentata [1] dal Socio E. BOMPIANI.

1. Sia dato un gruppo G di ordine n, formato dagli elementi:

$$\gamma_1 (= \text{elemento identico}), \gamma_2, \cdots, \gamma_n .$$

Un'algebra A si dice legata al gruppo G, se esistono in A n elementi indipendenti, atti a generare A, e siano:

$$g_1, g_2, \cdots, g_n$$

tali che se:

$$\gamma_i \gamma_j = \gamma_l$$

anche:

$$g_i g_j = g_l .$$

È noto che, dato un corpo Γ ed un gruppo G, esiste sempre un'algebra A legata a G e definita in Γ, *unica* di fronte alla relazione di equivalenza: che chiameremo senz'altro l'algebra legata a G in Γ. È noto anche che, se la caratteristica p del corpo Γ non divide l'ordine n del gruppo G, l'algebra A legata a G in Γ è semisemplice, priva cioè di elementi eccezionali [2].

2. La struttura dell'algebra A legata a un gruppo di ordine n in un corpo Γ a caratteristica p muta profondamente se la caratteristica p del corpo divide l'ordine n del gruppo. Esiste sempre, in quest'ultimo caso, almeno un elemento eccezionale [3], ecc.

In due Note successive, l'una del 1938, l'altra del 1939 [4], ho studiato la struttura dell'algebra A legata a G in Γ nel caso appunto in cui la caratteristica del corpo divide l'ordine del gruppo. Nella seconda delle mie due

(1) Nella seduta dell'8 febbraio 1947.

(2) Per i risultati ora ricordati vedi: SCORZA, *Corpi numerici e algebre.* (Messina-Principato, 1921), p. 437 e sgg.; G. FICHERA, *I caratteri di un gruppo e le sue rappresentazioni sopra un gruppo di sostituzioni lineari.* (« Atti dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania », serie V, vol. XIII).

Per il risultato ricordato nell'ultimo capoverso vedi: G. SCORZA, *Sulle algebre legate ai gruppi di ordine finito.* (« Rendiconti dell'Accademia Naz. dei Lincei », vol. XXV, serie 6-*a*, 1° sem.).

(3) Quest'osservazione si trova, ad esempio, nella nota di Gaetano Scorza citata in (1); ed è riportata anche dai più recenti trattati di algebra moderna (vedi ad esempio: B. L. VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra*, volume II, 2ª edizione, p. 186).

(4) L. LOMBARDO-RADICE, *Intorno alle algebre legate ai gruppi di ordine finito.* Nota 1ª. (« Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Roma », serie IV, vol. 2, fascicolo 4, 1938) e Nota 2ª (idem serie IV, vol. 3, fascicolo 3-4, 1939).

Note si trovano, in primo luogo, delle condizioni che *occorre* siano soddisfatte dalle coordinate α_i di un elemento:

$$\varepsilon = \sum_{1}^{n}{}_i \alpha_i g_i$$

di A, affinchè ε sia eccezionale in A.

Si trovano, in secondo luogo, altre relazioni fra le coordinate α_i di ε che, se soddisfatte, *bastano* per affermare che ε è eccezionale. Dovremo fra poco riscrivere le une e le altre relazioni tra le α_i per facilitare la lettura del presente lavoro. Per farne però comprendere subito lo scopo ricordiamo che la Nota in questione si limitava a far vedere, nell'ultimo paragrafo, come nei casi relativamente più semplici si potessero dedurre dalle condizioni necessarie quelle sufficienti e viceversa [5], lasciando aperto, nel caso generale, il problema dell'equivalenza o meno dei due gruppi di relazioni.

Riprendendo in esame, dopo molti anni di interruzione degli studi, i risultati stabiliti in quella Nota (per vederne il legame con un risultato di R. Brauer sulle rappresentazioni di un gruppo in un corpo a caratteristica p [6]), mi è venuto fatto di osservare, su di un esempio, che può ben darsi che le coordinate α_i di un elemento ε di A soddisfino le condizioni necessarie perchè l'elemento sia eccezionale, ma non quelle sufficienti; e che anzi vi possono essere degli elementi *eccezionali* le cui coordinate *non* soddisfano quelle condizioni sufficienti. Ed ho pensato non inutile comunicare subito questa osservazione.

3. Supponiamo che G sia dotato di l sottogruppi di Sylow relativi al numero primo p ($l \equiv 1 \mod p$): e siano:

$$S_1, S_2, \cdots, S_l.$$

Se p^t ($t \geqq 1$) è la massima potenza di p che divide l'ordine n di G, ciascuno dei sottogruppi S_1 sarà naturalmente di ordine p^t.

Sia ora k il numero totale degli elementi distinti di G appartenenti a detti sottogruppi; e siano:

$$s_1, s_2, \cdots, s_k$$

gli elementi che ad essi corrispondono nella base di A formata dalle g_i.

(5) Le condizioni necessarie e quelle sufficienti coincidono quando, per esempio:

a) G possiede un unico sottogruppo di Sylow relativo al numero primo p;

b) quando, l'ordine del gruppo essendo $p^t q$ (q primo con p), il gruppo G possiede uno ed un solo sottogruppo di ordine q, mentre tutti i restanti elementi hanno per periodo una potenza di p.

(6) R. BRAUER, *Ueber die Darstellung von Gruppen in Galoisschen Feldern.* (Hermann–Paris, «Actualités scientifiques et industrielles», 195, anno 1935). Già nel 1940, recensendo la mia 2ª Nota («Zentralblatt», 23, 103), Max DEURING osservava: «queste ricerche devono essere collegate con quelle di R. Brauer sulla teoria della rappresentazione di un gruppo in un corpo a caratteristica p» («diese Untersuchungen müssen mit der Darstellungstheorie mod p von R. Brauer zusammenhängen»).

Potremo sempre supporre (e basterà ordinare convenientemente le g), che si abbia:

$$g_1 = s_1 ; \cdots ; g_k = s_k .$$

Sia $\bar{g}_j$ una delle unità g. Indicheremo con:

$\alpha^{(s)}_{j,i}$ il coefficiente di $\bar{g}_j s_i$ in ε;

$\alpha^{(d)}_{j,i}$ il coefficiente di $s_i \bar{g}_j$ in ε (essendo ε, come prima, l'elemento corrente di A).

Condizione necessaria affinchè ε *sia eccezionale è allora che* siano soddisfatte le uguaglianze:

$$(1) \qquad \begin{cases} \sum_1^k{}_i \, \alpha^{(s)}_{j,i} = 0 \\ \sum_1^k{}_i \, \alpha^{(d)}_{j,i} = 0 \end{cases} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

Decomponendo il gruppo formato dalle g_i in sistemi laterali sinistri (destri) rispetto ad S_h, si avrà:

$$A = S_h + g_2^{(h)} S_h + \cdots + g_q^{(h)} = S_h + S_h g'_2{}^{(h)} + \cdots + S_h g'^{(h)}_h$$

(dove le $g_l^{(h)} g'^{(h)}_l$ sono opportune g).

Indichiamo con :

$$s_1^{(h)}, \cdots, s_{p'}^{(h)}$$

le s_1 che generano il sottogruppo S_h; con:

$\alpha^{(h)}_{i,l}$ il coefficiente di $g_l^{(h)} s_i^{(h)}$ in ε;

$\beta^{(h)}_{i,l}$ il coefficiente di $s_i^{(h)} g_l^{(h)}$ in ε.

Condizione sufficiente affinchè ε *sia eccezionale* è allora che siano soddisfatte le uguaglianze:

$$(2) \qquad \begin{cases} \sum_1^{p'} \alpha^{(h)}_{i,l} = 0 \\ \sum_1^{p'}{}_i \, \beta^{(h)}_{i,l} = 0 . \end{cases}$$

Riepilogando a parole:

Condizione necessaria affinchè un elemento di A sia eccezionale è che in esso sia uguale a zero la somma delle coordinate relative alle unità che appartengono a sistemi laterali di S_1, S_2, $\cdots$, S_e contenenti una stessa unità $\bar{g}$;

Condizione sufficiente affinchè un elemento sia eccezionale è che in esso sia uguale a zero la somma delle coordinate relative alle unità che appartengono a uno stesso sistema laterale rispetto ad un *dato* sottogruppo S_p ($p = 1 \cdots, l$).

4. Consideriamo ora il gruppo di ordine 60 delle sostituzioni pari su 5 elementi, che chiameremo G_{60}. Il gruppo è composto da:

24 elementi a periodo 5 che si suddividono in *due* sistemi completi di elementi coniugati, T_1 e T_2, contenenti ciascuno 12 elementi;

20 elementi a periodo 3, formanti un unico sistema, T_3, di elementi coniugati;

15 elementi a periodo 2, formanti anch'essi un unico sistema T_4;

l'elemento identico, che forma da solo il sistema T_0.

Indichiamo con t_i l'elemento dell'algebra A_{60}, legata a G_{60} in un corpo a caratteristica 5, ottenuto sommando tutti gli elementi di un sistema T_i[7]. È noto allora[8] che la sottoalgebra centrale C di A_{60} è generata dagli elementi t_i. Come si può verificare con il calcolo, la tavola di moltiplicazione di C è la seguente:

t_0	t_1	t_2	t_3	t_4
t_1	$2t_0+t_2+3t_3$	$t_1+t_2+3t_3+4t_4$	$3t_3+4t_4$	$3t_3+4t_4$
t_2		$2t_0+t_1+3t_3$	$3t_3+4t_4$	$3t_3+4t_4$
t_3			$2t_3+3t_4$	t_3+4t_4
t_4				$3t_3+2t_4$

Consideriamo ora l'elemento di C: $t_1 - t_2$. Utilizzando la tavola di moltiplicazione; e semplificando i calcoli ricordando che, trattandosi di un'algebra commutativa in un corpo a caratteristica 5 si ha:

$$(t_1 - t_2)^5 = t_1^5 - t_2^5$$

si vede facilmente che:

$$(t_1 - t_2)^5 = 0$$

cioè che $t_1 - t_2$ è pseudonullo. Ma essendo anche permutabile con tutti gli elementi di A (come elemento di C) sarà addirittura eccezionale.

Ora, le coordinate dell'elemento eccezionale $t_1 - t_2$ *non* soddisfano le condizioni sufficienti, affinchè un elemento dell'algebra legata a un gruppo sia eccezionale, prima riportate. Fissiamo l'attenzione infatti su *uno* dei sottogruppi di ordine 5, ad esempio su quello generato da (23451), composto dalle sostituzioni:

(23451); (34512); (45123); (51234); elemento identico; che chiameremo S_1. Consideriamo il sistema laterale sinistro:

$$\begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix} \times S_1 .$$

(7) Indichiamo con gli stessi simboli gli elementi di G_{60} e gli elementi di una base di A_{60} formanti un gruppo isomorfo a G_{60}.

(8) Vedi, per esempio il lavoro di GIUSEPPE FICHERA citato in (1). (La dimostrazione dal corpo complesso si estende ad un corpo qualsiasi).

Come si vede eseguendo semplici operazioni, esso è composto dagli elementi:

$$(34251) \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1245 \\ 4512 \end{pmatrix} \quad ; \quad (51423) \quad ; \quad \begin{pmatrix} 345 \\ 534 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}.$$

Nel detto sistema vi sono perciò soltanto due elementi a periodo 5: (34251) e (51423). *Essi sono coniugati fra di loro in* G_{60}: infatti:

$$\begin{pmatrix} 235 \\ 523 \end{pmatrix} \cdot (34251) \cdot \begin{pmatrix} 235 \\ 352 \end{pmatrix} = (51423)\,^{(9)}$$

I due elementi appartengono perciò ad uno stesso sistema di elementi coniugati, che potremo sempre supporre essere, per esempio, T_1. Allora in $t_1 - t_2$ compaiono solo due elementi di $\begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix} \cdot S_1$ con coefficiente diverso da zero; ciascuno di questi due elementi ha il coefficiente $+1$. La somma dei coefficienti degli elementi appartenenti a $\begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix} S_1$ che compaiono in $t_1 - t_2$ è quindi 2; e $2 \neq 0$ in un corpo a caratteristica 5. Le condizioni (2), sufficienti perchè un elemento sia eccezionale, richiedono invece che tale somma sia zero.

Si vede così su di un esempio che *le condizioni sufficienti* (2) *non sono necessarie* perchè un elemento di un'algebra legata a un gruppo di ordine finito, in un corpo la cui caratteristica divide l'ordine del gruppo, sia eccezionale.

Matematica. — *Sui funzionali continui con la metrica di Fréchet*[1]. Nota di G. Fichera, presentata[2] dal Socio M. Picone.

Sia E un insieme dello spazio euclideo a r dimensioni misurabile secondo Lebesgue e di misura finita o infinita. Indichiamo con H lo spazio (hilbertiano) di tutte le funzioni reali quasi-continue in E e ivi di quadrato sommabile. Si definisce, è ben noto, come distanza hilbertiana di due funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ di H il valore

$$\left| \sqrt{\int_E [\varphi(x) - \psi(x)]^2 \, dx} \right|.$$

Dicesi poi sfera di Hilbert di raggio R (e centro l'origine) l'insieme di tutte le funzioni di H per le quali si ha

$$\int_E [\varphi(x)]^2 \, dx \leq R^2.$$

(9) $\begin{pmatrix} 235 \\ 352 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 235 \\ 523 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 235 \\ 352 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 32 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 25 \\ 52 \end{pmatrix}$ è una sostituzione *pari*.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo.

(2) Nella seduta dell'8 febbraio 1947.

Introdotto un sistema di funzioni $\{\varphi_k(x)\}$ ortogonale e normale, completo per l'approssimazione lineare in media, nell'insieme E, delle funzioni di H, poniamo

$$c_k = \int_E \varphi(x)\,\varphi_k(x)\,dx, \quad , \quad \gamma_k = \int_E \psi(x)\,\varphi_k(x)\,dx, \qquad (k = 1, 2, \cdots).$$

Dicesi distanza secondo Fréchet delle due funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ la somma della serie (certamente convergente).

$$\mathfrak{F}(\varphi, \psi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{|c_k - \gamma_k|}{1 + |c_k - \gamma_k|}.$$

Nelle *Lezioni di Analisi funzionale* del prof. Picone, trovasi dimostrato che con la metrica di Fréchet, l'insieme S_R è compatto e chiuso (3) e, pertanto, ogni funzionale, in esso definito e continuo con la detta metrica, è ivi dotato – per un noto teorema – di massimo e di minimo.

Una notevole classe di funzionali, studiati nel Calcolo delle variazioni, è quella dei cosidetti *polinomiali*. Detto $E^{(\nu)}$ l'insieme dello spazio euclideo a νr dimensioni, luogo dei punti le cui coordinate si ottengono al variare di ν punti arbitrarî di E, $x_1, x_2, \cdots, x_\nu$, prendendo assieme quelle di tutti questi, e indicata con $K_\nu(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$ un'assegnata funzione reale dei punti $x_1, x_2, \cdots, x_\nu$, di quadrato sommabile in $E^{(\nu)}$, si definisce come *polinomiale di grado n* il seguente funzionale.

$$P[\varphi] = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{E^{(\nu)}} K_\nu(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)\,\varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_\nu)\,dx_1\,dx_2\cdots dx_\nu,$$

se $K_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ non è equivalente a zero.

Nelle citate *Lezioni di Analisi funzionale* trovasi dimostrata la continuità di $P[\varphi]$ con la metrica di Fréchet e quindi l'esistenza del massimo e del minimo di tale funzionale in S_R (4).

In un mio lavoro (5) ho determinato le condizioni necessarie e sufficienti perchè nel caso $n = 2$ (*polinomiale quadratico*) le funzioni estremanti di $P[\varphi]$ in S_R appartengano alla frontiera FS_R di S_R, cioè verifichino la condizione

$$\int_E [\varphi(x)]^2\,dx = R^2,$$

e perchè ivi $P[\varphi]$ sia dotato di massimo e di minimo.

Dai teoremi stabiliti in quel lavoro risulta sempre la seguente circostanza e, cioè, sia che il polinomiale quadratico abbia massimo (minimo) su FS_R,

(3) Ed. Tumminelli (Roma), 1946. Cap. II, § 2, n. 127.

(4) Cap. III, § 3, n. 134.

(5) *Sull'ubicazione e l'unicità delle estremanti del polinomiale quadratico nella sfera di Hilbert.* [Pubblicazione n. 160 dell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo C. N. R. (Roma) 1944].

sia che non lo abbia, il suo estremo superiore (inferiore) in detto insieme è sempre uguale al massimo (minimo) in tutta S_R. Ho voluto indagare se tale eventualità si viene a verificare solo per il polinomiale quadratico, oppure si presenta anche per funzionali di quello più generali, e sono giunto alla seguente conclusione e cioè, che tale circostanza sussiste *comunque si definisca in* S_R *un funzionale continuo nella metrica* di Fréchet. Ho potuto perciò stabilire il seguente teorema:

Se $J[\varphi]$ *è un funzionale definito in* S_R *e ivi continuo nella metrica di* Fréchet, *l'estremo superiore (inferiore) di* $J[\varphi]$ *in* FS_R *è uguale al massimo (minimo) di* $J[\varphi]$ *in tutta* S_R.

Sia $\varphi_0(x)$ la massimante di $J[\varphi]$ in S_R.

Poniamo

$$c_k^{(0)} = \int_E \varphi_0(x)\,\varphi_k(x)\,dx \qquad (k = 1, 2, \cdots).$$

Facciamo prima l'ipotesi che $\varphi_0(x)$ sia tale che per tutti gl'indici h maggiori di un certo h_0 si abbia $c_h^{(0)} = 0$.

Consideriamo la successione $\{\psi_k(x)\}$ con $\psi_k(x)$ così definita

$$\psi_k(x) = \varphi_0(x) + \alpha\varphi_{h_0+k}(x) \qquad (k = 1, 2, \cdots),$$

essendo

$$\alpha = \left| R^2 - \sqrt{\int_E [\varphi_0(x)]^2\,dx} \right|.$$

Abbiamo intanto

$$\int_E [\psi_k(x)]^2\,dx = \int_E [\varphi_0(x)]^2\,dx + \alpha^2 = R^2,$$

cioè tutte le funzioni di $\{\psi_k(x)\}$ appartengono a FS_R.

In secondo luogo abbiamo

$$\mathcal{F}(\psi_k, \varphi_0) = \frac{1}{(h_0 + k)!}\,\frac{\alpha}{1+\alpha}$$

e quindi

$$\lim_{k\to\infty} \mathcal{F}(\psi_k, \varphi_0) = 0. \tag{1}$$

Ne segue per la continuità di $J[\varphi]$ in S_R

$$\lim_{k\to\infty} J[\psi_k] = J[\varphi_0]. \tag{2}$$

Nel caso considerato il teorema è acquisito.

Supponiamo ora, invece, che comunque si consideri un indice h_0 si possa determinare un indice $h > h_0$, tale che sia $c_h^{(0)} \neq 0$. Indichiamo allora con $i_1, i_2, \cdots, i_k, \cdots$ una successione crescente di indici per la quale risulti $c_{i_k}^{(0)} = 0$ $(k = 1, 2, \cdots)$.

Poniamo questa volta

$$\psi_k(x) = \varphi_0(x) + \alpha_k \left[c^{(0)}_{i_{k+1}} \varphi_{i_k}(x) - c^{(0)}_{i_k} \varphi_{i_{k+1}}(x) \right],$$

essendo

$$\alpha_k = \left| \sqrt{\frac{R^2 - \int_E [\varphi_0(x)]^2 \, dx}{c^{(0)2}_{i_k} + c^{(0)2}_{i_{k+1}}}} \right|.$$

Abbiamo

$$\int_E [\psi_k(x)]^2 \, dx = \int_E [\varphi_0(x)]^2 \, dx + \alpha_k^2 \left[c^{(0)2}_{i_{k+1}} + c^{(0)2}_{i_k} \right] +$$

$$+ 2\alpha_k \left[c^{(0)}_{i_{k+1}} \int_E \varphi_0(x) \varphi_{i_k}(x) \, dx - c^{(0)}_{i_k} \int_E \varphi_0(x) \varphi_{i_{k+1}}(x) \, dx \right] = R^2.$$

Cioè, anche in tal caso le funzioni di $\{\varphi_k(x)\}$ appartengono a FS_R.

Si ha d'altra parte

$$\mathcal{F}(\psi_k, \varphi_0) = \frac{1}{i_k!} \frac{\alpha_k \left| c^{(0)}_{i_{k+1}} \right|}{1 + \alpha_k \left| c^{(0)}_{i_{k+1}} \right|} + \frac{1}{i_{k+1}!} \frac{\alpha_k \left| c^{(0)}_{i_k} \right|}{1 + \alpha_k \left| c^{(0)}_{i_k} \right|} < \frac{1}{i_k!} + \frac{1}{i_{k+1}!},$$

e quindi sussiste la (1) e in conseguenza la (2). Il teorema è così dimostrato.

In sostanza la dimostrazione di esso è consistita nel porre in luce la seguente proprietà topologica della sfera di Hilbert:

Adottando come definizione di distanza di due elementi di H *quella di* Fréchet *la frontiera* FS_R *della sfera di* Hilbert *è un insieme denso in* S_R.

Giova notare esplicitamente che in conseguenza del teorema dimostrato si ha:

L'estremo inferiore e superiore del polinomiale $P[\varphi]$ *in* FS_R *coincidono rispettivamente col massimo e col minimo di* $P(\varphi)$ *in tutta* S_R.

È da osservare che, nel caso del polinomiale $P(\varphi)$, una delle estremanti è certamente su FS_R (6), mentre può accadere che l'altro estremo sia conseguito esclusivamente nell'interno di S_R (7).

Come conseguenza del teorema si ha anche che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un funzionale $J[\varphi]$ *continuo in* S_R *nella metrica di* Fréchet *sia ivi costante è che sia tale su* FS_R.

(6) Cfr. M. PICONE, loc. cit. (2), cap. II, § 3, n. 139.
(7) Cfr. G. FICHERA, loc. cit. (4), pp. 5–10.

Meccanica. — *Problemi dinamici della trave in regime ereditario.* Nota II di E. VOLTERRA, presentata [1] dal Socio A. SIGNORINI.

Completo in questa Nota lo studio dinamico della trave in regime ereditario viscoso.

Per le premesse ed il significato dei simboli mi riferisco alla precedente Nota I, pubblicata su cotesti «Rendiconti». Anche la numerazione delle formule e dei paragrafi è fatta in continuazione.

4. CARICO CONCENTRATO CHE AVANZA CON VELOCITÀ COSTANTE SU DI UNA TRAVE SEMPLICEMENTE APPOGGIATA. – Si consideri ora un carico di grandezza costante W che avanzi su di una trave semplicemente appoggiata di lunghezza l alla velocità costante v.

Si assuma come istante $t = 0$, dal quale si contano i tempi, l'istante in cui il carico si trovi su una delle due estremità della trave. All'istante t esso si troverà nel punto $x = vt$.

Risolvendo il carico W in una serie di carichi distribuiti mediante la equazione:

$$W = \frac{2W_0}{l}\left(\sin\frac{\pi vt}{l}\sin\frac{\pi x}{l} + \sin\frac{2\pi vt}{l}\sin\frac{2\pi x}{l} + \cdots\right)$$

la soluzione dell'equazione (1) in questo caso sarà data dalla formula (19). Basterà in essa porre al posto del termine $2\pi n$ il termine $\frac{i\pi v}{l}$ e porre $g = \frac{2W_0}{lm}$.

La soluzione sarà pertanto:

$$u(x,t) = g\sum_1^\infty{}_i\, D_i \sin\frac{i\pi x}{l}\sin\left(\frac{i\pi vt}{l} - \varphi_i\right) +$$

$$+ \sum_1^\infty{}_i \left[C_{1i}e^{-r_i t} + C_{2i}e^{-p_i t}\sin q_i t + C_{3i}e^{-p_i t}\cos q_i t\right]\sin\frac{i\pi x}{l}$$

con:

$$\operatorname{tg}\varphi_i = \frac{iv\alpha a^2\dfrac{A}{E}\left(\dfrac{\pi}{l}\right)^3}{(iv)^2\left\{\left(\dfrac{i\pi v}{l}\right)^2 - a^2\left(\dfrac{\pi}{l}\right)^4\left(1+\dfrac{A}{E}\right)\right\} + a^2\left\{(iv)^2 - a^2\left(\dfrac{\pi}{l}\right)^2\right\}}$$

$$\sqrt{\left[\left(\frac{i\pi v}{l}\right)^2\left\{\left(\frac{i\pi v}{l}\right)^2 - a^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\left(1+\frac{A}{E}\right)\right\} + \alpha^2\left\{\left(\frac{i\pi v}{l}\right)^2 - a^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\right\}\right]^2 + \left[\frac{i\pi v}{l}\alpha a^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\frac{A}{E}\right]^2}$$

$$D_i = \frac{}{\left(\dfrac{i\pi v}{l}\right)^2\left\{\left(\dfrac{i\pi v}{l}\right)^2 - a^2\left(\dfrac{\pi}{l}\right)^4\left(1+\dfrac{A}{E}\right)\right\}^2 + \alpha^2\left\{\left(\dfrac{i\pi v}{l}\right)^2 - a^2\left(\dfrac{\pi}{l}\right)^4\right\}^2}$$

(1) Nella seduta dell'8 febbraio 1947.

$$C_{1i} = g D_i \sin \varphi_i - C_{3i}$$

$$C_{2i} = \frac{r g D_i \sin \varphi_i}{q_i} - \frac{\frac{i\pi v}{l} g D_i \cos \varphi_i}{q_i} + \frac{p_i - r_i}{q_i} C_{3i}$$

$$C_{3i} = \frac{\left(\frac{i\pi v}{l}\right)^2 g D_i \sin \varphi_i + \frac{2 i \pi v}{l} p_i g D_i \cos \varphi_i + r_i^2 g D_i \sin \varphi_i - 2 p_i r_i g D_i \sin \varphi_i}{r_i^2 + 2 p_i (p_i - r_i)}$$

5. CARICO PULSANTE CHE AVANZA CON VELOCITÀ COSTANTE SU DI UNA TRAVE SEMPLICEMENTE APPOGGIATA. – Si supponga un carico concentrato di intensità $W = W_0 \cos 2\pi n t$ che avanzi su di una trave semplicemente appoggiata di lunghezza l alla velocità costante v.

Si potrà allora scrivere:

$$W = \frac{2 W_0}{l} \left[\sum_1^\infty{}_i \sin \frac{i\pi v t}{l} \sin \frac{i\pi x}{l} \right] \cos 2\pi n t =$$

$$= \frac{W_0}{l} \sum_1^\infty{}_i \left[\sin \frac{i\pi x}{l} \sin \left(\frac{i\pi v}{l} + 2\pi n \right) t + \sin \frac{i\pi x}{l} \sin \left(\frac{i\pi n}{l} - 2\pi n \right) t \right].$$

Il carico viene espresso come somma di due infinite serie di carichi per ciascuno dei quali, per soddisfare all'equazione (1), serve l'equazione (19). Avendo posto $g = \frac{W_0}{lm}$ si otterrà come soluzione:

$$u(x,t) = g \sum_1^\infty{}_i D_i' \sin \frac{i\pi x}{l} \sin \left[\left(\frac{i\pi v}{l} + 2\pi n \right) t - \varphi_i' \right] +$$

$$+ g \sum_1^\infty{}_i D_i'' \sin \frac{i\pi x}{l} \sin \left[\left(\frac{i\pi v}{l} - 2\pi n \right) t - \varphi_i'' \right] +$$

$$+ \sum_1^\infty{}_i \left[C_{1i} l^{-r_i t} + C_{2i} l^{-p_i t} \sin q_i t + C_{3i} l^{-p_i t} \cos q_i t \right] \sin \frac{i\pi x}{l}$$

con

$$\operatorname{tg} \varphi_i' = \frac{\left(\frac{i\pi v}{l} + 2\pi n \right) \alpha a^2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \frac{A}{E}}{\left(\frac{i\pi v}{l} + 2\pi n \right)^2 \left\{ \left(\frac{i\pi v}{l} + 2\pi n \right)^2 - a^2 \left(1 + \frac{A}{E} \right) \right\} + \alpha^2 \left\{ \left(\frac{i\pi v}{l} + 2\pi n \right)^2 - a^2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \right\}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_i'' = \frac{\left(\frac{i\pi v}{l} - 2\pi n \right) \alpha a^2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \frac{A}{E}}{\left(\frac{i\pi v}{l} - 2\pi n \right)^2 \left\{ \left(\frac{i\pi v}{l} - 2\pi n \right)^2 - a^2 \left(1 + \frac{A}{E} \right) \right\} + \alpha^2 \left\{ \left(\frac{i\pi v}{l} - 2\pi n \right)^2 - a^2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \right\}}$$

$$D'_i = \frac{\sqrt{\left[\left(\frac{i\pi v}{l}+2\pi n\right)^2\left\{\left(\frac{i\pi v}{l}+2\pi n\right)^2-a^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\left(1+\frac{A}{E}\right)\right\}+\alpha^2\left\{\left(\frac{i\pi v}{l}+2\pi n\right)^2-\alpha^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\right\}\right]^2+\left[\left(\frac{i\pi v}{l}+2\pi n\right)\alpha a^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\frac{A}{E}\right]^2}}{\left(\frac{i\pi v}{l}+2\pi n\right)^2\left\{\left(\frac{i\pi v}{l}+2\pi n\right)^2-a^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\left(1+\frac{A}{E}\right)\right\}^2+\alpha^2\left\{\left(\frac{i\pi v}{l}+2\pi n\right)^2-a^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\right\}^2}$$

$$D''_i = \frac{\sqrt{\left[\left(\frac{i\pi v}{l}-2\pi n\right)^2\left\{\left(\frac{i\pi v}{l}-2\pi n\right)^2-a^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\left(1+\frac{A}{E}\right)\right\}+\alpha^2\left\{\left(\frac{i\pi v}{l}-2\pi n\right)^2-a^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\right\}\right]^2+\left[\left(\frac{i\pi v}{l}-2\pi n\right)\alpha a^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\frac{A}{E}\right]^2}}{\left(\frac{i\pi v}{l}-2\pi n\right)^2\left\{\left(\frac{i\pi v}{l}-2\pi n\right)^2-a^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\left(1+\frac{A}{E}\right)\right\}^2+\alpha^2\left\{\left(\frac{i\pi v}{l}-2\pi n\right)^2-a^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\right\}^2}.$$

Le condizioni che devono essere soddisfatte all'istante $t = 0$ sono:

$$u(x,0) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial t^2} + a^2\frac{\partial^4 u(x,0)}{\partial x^4} = 0$$

da cui si ricava:

$$C_{1i} = gD'_i\sin\varphi'_i + gD''_i\sin\varphi''_i - C_{3i};$$

$$C_{2i} = \frac{r_i gD'_i\sin\varphi'_i + r_i gD''_i\sin\varphi''_i - \left(\frac{i\pi v}{l}+2\pi n\right)gD'_i\cos\varphi'_i - \left(\frac{i\pi v}{l}-2\pi n\right)gD''_i\cos\varphi''_i}{q_i} + \frac{p_i - r_i}{q_i}C_{3i};$$

$$C_{3i} = \frac{\left(\frac{i\pi v}{l}+2\pi n\right)^2 gD'_i\sin\varphi'_i + \left(\frac{i\pi v}{l}-2\pi n\right)^2 gD''_i\sin\varphi''_i + r_i^2 gD'_i\sin\varphi'_i + r_i^2 gD''_i\sin\varphi''_i}{p_i^2+q_i^2+r_i^2-2p_i r_i} +$$

$$+ \frac{-2p_i r_i gD'_i\sin\varphi'_i - 2p_i r_i gD''_i\sin\varphi''_i + 2p_i\left(\frac{i\pi v}{l}+2\pi n\right)gD'_i\cos\varphi'_i + 2p_i\left(\frac{i\pi v}{l}-2\pi n\right)gD''_i\cos\varphi''_i}{p_i^2+q_i^2+r_i^2-2p_i r_i}.$$

Astronomia (Ottica astronomica). — *Una camera per spettrografo ad alta luminosità*[1]. Nota di A. Colacevich, presentata[2] dal Socio G. Abetti.

Ho avuto occasione di fare, in questi ultimi tempi, alcuni studi sul comportamento ottico di un sistema composto da uno specchio sferico e da una lente a menisco a facce sferiche concentriche a quelle dello specchio[3]. Questo sistema quindi gode simmetria centrale ed è adatto in particolare per strumenti a grande campo ed ha inoltre una superficie immagine sferica col centro nel centro comune di curvatura di tutte le altre superficie.

L'attuale esame si limita al caso nel quale il menisco è composto di solo tipo di vetro. Già esami precedenti avevano fatto vedere che un simile strumento poteva fornire immagini dell'ordine di 25 micron per una distanza focale di mm. 120 e per un rapporto di apertura dell'ordine di $f/1{,}1$, risultati questi degni già di considerazione se si pensa alla semplicità teorica di un simile strumento.

Ho voluto successivamente esaminare il caso nel quale la camera è composta di un solo blocco di vetro con le due facce sferiche concentriche e quella posteriore riflettente. Avendo trovato che un simile strumento permette di raggiungere delle immagini dell'ordine dei 25 micron per una distanza focale di mm. 50 e rapporto di apertura f/0,5, ritengo opportuno dare qui un cenno sulla teoria di questo particolare strumento.

Si consideri la figura qui annessa di cui adottiamo i simboli ivi segnati. Sia n l'indice di rifrazione del menisco e sia r il raggio CP della superficie rifrangente, mentre il raggio CA di quella riflettente si assume uguale ad uno. Seguiamo il percorso PAF di un raggio generico. Si ha

$$\sin i_1 = \frac{h}{r} \quad , \quad \sin i_2 = \frac{h}{n}$$

$$\sin i_1'' = \frac{h}{nr} \quad , \quad \sin \varphi = \frac{h}{nf}$$

dove

$$\varphi = 2\,i_2 + i_1 - i_1''$$

ed $f = \mathrm{CF}$ è la focale dello strumento, per le ragioni di simmetria prima menzionate. Si ha quindi

$$\frac{1}{f} = \frac{h}{n \sin (2\,i_2 + i_1 - i_1'')} .$$

(1) Lavoro eseguito all'Osservatorio Astrofisico di Arcetri, Firenze.
(2) Nella seduta dell'8 febbraio 1946.
(3) « Rendiconti Accademia dei Lincei », maggio 1946, p. 610.

Ricordando gli sviluppi in serie

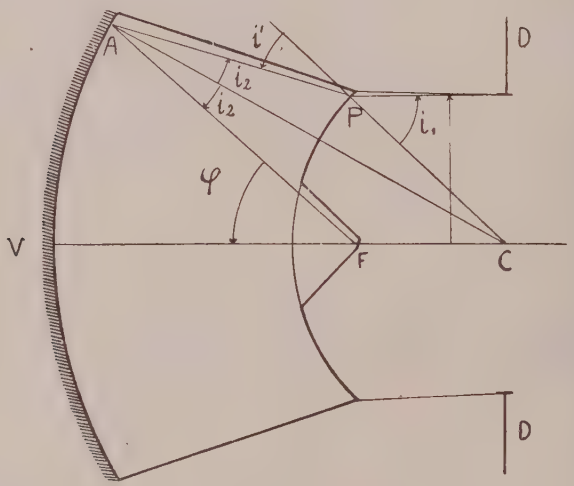
$$x = \sin x + \frac{1}{6}\sin^3 x + \cdots \qquad \text{e} \qquad \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \cdots$$

e fermandoci alla terza potenza si ha facilmente

$$\varphi = \frac{h}{n}\left(2 + \frac{n-1}{r}\right) + \frac{h^3}{6n^3}\left(2 + \frac{n^3-1}{r^3}\right)$$

e quindi

$$\frac{1}{f} = 2 + \frac{n-1}{r} + \frac{h^2}{6n^2}\left[2 + \frac{n^3-1}{r^3} - \left(2 + \frac{n-1}{r}\right)^3\right].$$



Se si desidera che entro questa approssimazione, nelle potenze di h, la quantità f non dipenda da h, deve essere

$$2 + \frac{n^3-1}{r^3} = \left(2 + \frac{n-1}{r}\right)^3.$$

I valori di r che eventualmente risolvono in senso reale questa equazione di terzo grado introdotti nella formula precedente che fornisce la potenza della lente, stabiliscono il valore f della focale parassiale. Si trova, risolvendo questa equazione, la seguente serie di valori di r ed i conseguenti f in funzione dell'indice n. Delle tre soluzioni solo una è reale e positiva le altre sono immaginarie.

n	1,45	1,50	1,55	1,60	1,65	1,70	1,75
r	0,4255	0,4319	0,4373	0,4420	0,4477	0,4500	0,4533
f	0,3270	0,3167	0,3069	0,2979	0,2897	0,2812	0,2737

Vi è quindi la possibilità teorica di esistenza di un sistema ottico convergente corretto per aberrazione monocromatica nel terzo ordine. La sua

aberrazione cromatica (del primo ordine) si ottiene derivando l'espressione della focale parassiale,

$$\frac{1}{f} = 2 + \frac{n-1}{r}$$

rispetto all'indice n; si ottiene

$$d\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{dn}{r} \quad \text{oppure} \quad \frac{df}{dn} = -\frac{f^2}{r}$$

Come caso pratico ho scelto quello in cui l'indice n è uguale a 1,50. Applicando le formule rigorose date in principio, si è trovato subito che la soluzione del terzo ordine $r = 0{,}4319$ non soddisfa al finito nel miglior modo al requisito di portare piccola aberrazione anche per forti valori di h. Il valore $r = 0{,}460$ ha portato ai valori dati nella tabella qui sotto, dove sono segnati anche i valori del segmento CF per diverse radiazioni per le quali gli indici del vetro siano rispettivamente 1,51 ed 1,53. Per riportare i valori qui dati delle singole focali ad una focale media dell'ordine di millimetri 50.000 si sono moltiplicati tutti i dati per 1.542407. Si vede che, per le tre radiazioni così scelte, il miglior fuoco cade rispettivamente ai valori di CF pari a mm 50,081, mm 49,728, mm 49.024. Le differenze tra questi valori ed i singoli valori dànno le cosidette aberrazioni longitudinali e moltiplicando queste per 2 tang φ si ottengono quelle trasversali, cioè il diametro dell'immagine di una sorgente puntiforme, secondo l'ottica geometrica. Tali valori sono segnati nella tabella stessa, nelle ultime tre righe, per i valori degli indici sopra detti nell'ordine.

n \ h	0,0	0,1	0,2	0,3	03,2	0,35
1,50	0,323944	0,324169	0,324674	0,324794	0,324625	0,324114
1,51	0,321453	0,321888	0,322365	0,322441	0,322265	0,321745
1,53	0,317241	0,317430	0,317845	0,317840	0,317649	0,317118
1,50	0,000	0,034	0,003	0,025	0,019	0,184
1,51	0,000	0,033	0,005	0,000	0,038	0,211
1,53	0,000	0,026	0,001	0,008	0,052	0,232
n / h	0,0	15,4	30,8	46,3	49,4	54,0

Posta la focale pari a mm. 50 si trova che il raggio della prima faccia, è di mm 70,95, mentre quella dello specchio è di mm 154,24.

Si nota dalla tabella che le dimensioni dell'immagine, per la radiazione, prescelta, sono inferiori a 25 micron se si considerano i valori di h

compresi tra poniamo 0,15 o pari a mm 23,1 e 0, 32 pari mm 49,4. I valori di h inferiori a 0,15 vengono eliminati necessariamente dal supporto dello chassis e da una lente addittiva di cui ora parleremo. I valori superiori a 0,32 vengono eliminati da un diaframma DD indicato in figura. Entro questi limiti per h, i valori delle immagini superano i 25 micron per le altre radiazioni nella zona esterna estrema, ma con opportuni ritocchi le dimensioni possono essere portate entro i limiti di 25 micron. Questo fatto dice che lo strumento, pur avendo diversi fuochi per le varie radiazioni, è in ciascun fuoco ugualmente ben corretto entro larghi limiti. Esso quindi si presta particolarmente bene quale camera per spettrografo, infatti il rapporto tra il diametro di apertura del diaframma DD e la focale CF dà allo strumento un'apertura relativa $f/0,5$.

Nel ragionamento fatto si è implicitamente ammesso, che il raggio dopo la riflessione resti nel mezzo ottico; per soddisfare a questo scopo si appoggia al menisco, come indicato in figura, una lente con una faccia di raggio r e l'altra tale da seguire la superficie focale delle varie radiazioni. Se non esistesse la curvatura di campo tale superficie sarebbe piana. Ad esempio con un prisma di 60° di angolo rifrangente ed indice 1,50, ad una variazione di indice pari a 0,01 corrisponde una variazione di deviazione di 52′ e quindi sulla superficie immagine uno spostamento di millimetri 0,756 tenendo conto che la focale varia di mm 0,353 ne consegue che la lastra dovrebbe essere inclinata di 25° e la distanza fra le due radiazioni sulla lastra sarebbe di mm 0,829. La curvatura di campo imporrebbe in questo caso una lieve concavità (volta verso C) dell'ordine di 6 micron, infatti il raggio di curvatura rimarrebbe sensibilmente uguale a CF. Il campo sarebbe perciò praticamente piano, entro questi limiti.

Il fatto dell'esistenza di un residuo di cromatica non permette l'uso di questa camera al di fuori della spettroscopia. o dello studio di sorgenti monocromatiche anche estese. Ma in questo campo essa si impone fra gli strumenti a corta focale dove lo spessore di vetro attraversato dai raggi luminosi non è molto lungo, nel nostro caso esso risulta di cm. 18 con un assorbimento complessivo dell'ordine del 20 % in dipendenza del tipo di vetro adoperato. Perdita per riflessione si ha su una sola faccia, quella d'ingresso. In totale tenendo conto di queste perdite e dello schermo del supporto dello chassis e della lente piccola risulta un rapporto di apertura relativa utile pari a $f/0,6$.

Consideriamo infine la possibilità tecnica di realizzare un simile strumento. Una variazione di indice in tutta la massa del vetro di un'unità della quarta decimale porta una variazione di 3 micron nella focale. Questa costanza d'indice è normalmente verificata, la tolleranza di 3 micron è sufficiente. I valori dati per i raggi di curvatura possono essere realizzati con la precisione del 2 ‰ e quindi con scarti di mm 0,2 oppure 0,3. Si è controllato con il calcolo trigonometrico che dette variazioni non alterano sensibilmente la bontà della correzione sferica dello strumento. Lo spessore può essere realizzato con la precisione di mm 0,1 esso equivale ad

una variazione analoga del raggio e quindi è tollerata. La costanza dei raggi di curvatura sulle superficie si può realizzare con deviazioni del quarto d'onda e quindi è fuori di discussione. La non esatta riproduzione dei raggi di curvatura prefissati e dello spessore porta necessariamente ad una non coincidenza dei centri di curvatura delle due facce. Ora mentre i valori dei raggi e dello spessore non contano in se stessi in modo da peggiorare l'immagine, la non coincidenza è dannosa. Questa non coincidenza può assumere valori di vari decimi di millimetro. Il calcolo mostra che se i due centri sono allineati nel senso del fascio incidente, per questo fatto la immagine ha una dimensione che è pari ad un decimo dello scentramento. Se i due centri risultano su una retta normale alla precedente, le dimensioni dell'immagine (coma) è pari allo scentramento. A questa impossibilità tecnica di centrare sufficientemente precisa si può facilmente ovviare nel modo seguente. Siano i due centri in una posizione generica, la congiungente i due centri è allora l'asse di simmetria del sistema. Supponiamo di tracciare una sfera con centro nel centro di curvatura dello specchio e tangente alla faccia rifrangente sull'asse di simmetria. Se detta faccia avesse questa sfera come superficie, lo strumento sarebbe buono. Vi è quindi una sottile corteccia di vetro in più o in meno, con spessore nullo sull'asse di simmetria. Immaginiamo questa corteccia isolata, dato il suo spessore estremamente sottile, essa introduce sul raggio incidente una deviazione che è indipendente dalla direzione stessa del raggio. Consideriamo ora il prisma che genera la dispersione dei raggi; esso ha la faccia, da cui emergono i raggi, posta prossima il più possibile al diaframma DD. L'asse di simmetria dello strumento incontra il prisma in un determinato punto. Possiamo pensare applicato il menisco di vetro su questa faccia del prisma in modo che in quel punto del prisma si abbia lo spessore minimo del menisco. Quindi questa faccia sarà leggermente sferica e concava o convessa a seconda che lo spessore di vetro sia da aggiungere o da togliere. Occorrerà quindi una volta realizzata la camera, osservare al microscopio la posizione dei due centri di curvatura ed in dipendenza ritoccare la faccia del prisma stesso.

Questo metodo di ritocco sarà pure consigliabile per altre eventuali parti ottiche.

La variazione di temperatura fa cambiare l'indice al massimo di 4 unità della 5ª decimale per grado centigrado, quindi anche una variazione di 10° non altera in modo sensibile la bontà delle immagini, nè varia in modo sensibile la posizione del fuoco. La dilatazione termica in se stessa non altera lo strumento altro che nelle sue dimensioni. In complesso si ritiene che si può applicare l'emulsione sensibile direttamente sulla lente interna che dovrà avere la sagomatura opportuna a seconda delle parti ottiche che precedono la camera.

La semplicità concettuale e le possibilità di realizzazione rendono questa camera particolarmente indicata nei casi in cui si intenda avere piccola focale ed elevato rapporto di apertura.

Fisica (Ottica). — *Sull'interferenza di molte vibrazioni con fasi distribuite a caso.* Nota di G. Toraldo di Francia, presentata [1] dal Socio G. Abetti.

§ 1. – Il problema della composizione di un numero grandissimo di vibrazioni coerenti, le cui fasi siano distribuite a caso è molto vecchio e ai suoi tempi dette luogo ad interessanti controversie. Esso si presenta fra l'altro nel caso della diffrazione provocata da un diaframma con innumerevoli aperture eguali ed egualmente orientate, come pure nel caso della formazione degli aloni atmosferici.

Supponiamo, per precisare, che le vibrazioni siano N (numero molto grande) ed abbiano tutte un'ampiezza e un'intensità eguali a 1 (ciò che può sempre farsi, pur di scegliere convenientemente le unità di misura). Ora il Verdet [2] ed altri credettero di dimostrare che l'intensità della vibrazione risultante, quando le fasi fossero distribuite completamente a caso, fosse eguale ad N. Si sarebbe avuta cioè un'intensità eguale alla somma delle intensità di tutte le componenti. La cosa sembrava conforme al buon senso e all'esperienza. Fu Lord Rayleigh a far rilevare che la dimostrazione matematica, su cui si basava quell'affermazione, era errata. Egli dimostrò invece che l'intensità risultante non è affatto determinata e che qualunque valore è possibile per essa, secondo una certa legge di probabilità [3]. Per esempio, il valore più probabile è lo zero e la probabilità che l'intensità sia inferiore a N è 0,6321. Se poi si prende un gran numero di casi diversi, il valore medio dell'intensità è N.

Ora bisogna osservare che la legge trovata da Lord Rayleigh, quantunque si applichi rigorosamente al caso dell'illuminamento prodotto da una sorgente estesa, nella quale le fasi dei singoli elementi emettenti sono distribuite assolutamente a caso, rappresenta invece nel campo della diffrazione soltanto un caso limite. Infatti, come vedremo, quando si compongono le vibrazioni provenienti da innumerevoli aperture eguali, le fasi sono bensì distribuite a caso, ma le loro differenze *non possono superare un dato valore assoluto.*

Tenendo conto di questo fatto, si giunge ad una legge più generale di quella di Lord Rayleigh, modificandone in modo abbastanza notevole le conclusioni. È questo lo scopo del presente lavoro.

§ 2. – Consideriamo un diaframma piano opaco AB (fig. 1), nel quale siano praticate innumerevoli aperture distribuite a caso, ma tutte eguali ed

(1) Nella seduta dell'11 gennaio 1947.

(2) Verdet, *Leçons d'optique physique*, vol. I, p. 207.

(3) Rayleigh, *On the Resultant of a Large Number of Vibrations of the Same Pitch and of Arbitrary Phase.* « Phil. Mag. », X, p. 73 (1880).

egualmente orientate. Supponiamo che sul diaframma incida un'onda piana parallela ad esso.

Le vibrazioni diffratte dalle varie aperture in una medesima direzione hanno tutte la stessa ampiezza, ma fasi differenti. Per esempio la vibrazione proveniente da B ha percorso il cammino BC in più di quella proveniente da A. Ma, se il diaframma ha dimensioni finite, come sempre avviene in pratica, le differenze di fase non superano un certo valore assoluto, che è nullo nella direzione perpendicolare al diaframma e va aumentando con l'angolo di diffrazione.

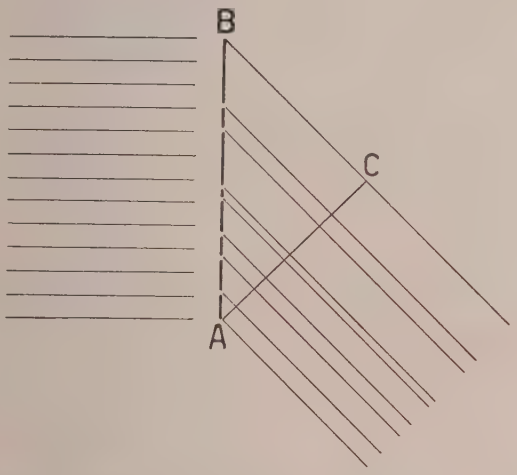


Fig. 1.

Fissando opportunamente l'origine dei tempi, diremo che nella direzione considerata le fasi φ delle vibrazioni sono distribuite a caso fra i valori $-\alpha$ e $+\alpha$.

§ 3. – Come è noto, una vibrazione persistente e monocromatica (armonica) può rappresentarsi mediante un punto su un piano cartesiano, convenendo che la sua distanza dall'origine sia proporzionale all'ampiezza e che la fase sia eguale all'angolo che la congiungente il punto con l'origine forma con l'asse x.

Consideriamo ora con Lord Rayleigh [4] n distribuzioni casuali delle N aperture e sia n un numero grandissimo. Per ciascuna di queste distribuzioni avremo una vibrazione risultante e quindi un punto rappresentativo nel piano cartesiano. Prendiamo di mira un rettangolino $dx\,dy$ attorno al punto (x, y). Il numero dei punti rappresentativi che cadono in esso dipenderà evidentemente da N e da x, y, mentre sarà proporzionale ad n e all'area $dx\,dy$. Porremo allora che tale numero sia

$$nf(\mathrm{N}, x, y)\,dx\,dy.$$

(4) RAYLEIGH, *Theory of Sound*, vol. I, p. 35 (1894).

Allora $f dx dy$ sarà la *probabilità* che la vibrazione risultante abbia il punto rappresentativo nel rettangolino $dx dy$.

A ciascuna delle n distribuzioni aggiungiamo ora un'altra vibrazione unitaria a caso. Tutti i punti rappresentativi si sposteranno di segmenti unitari, le cui inclinazioni rispetto all'asse x sono comprese fra $-\alpha$ e $+\alpha$. I punti che giungeranno in (x, y) proveranno da un'arco di circonferenza di raggio unitario, con centro in (x, y) e di lunghezza 2α. Un punto generico di quest'arco di circonferenza avrà coordinate della forma $x - \cos\varphi$, $y - \sin\varphi$ (con $-\alpha \leqq \varphi \leqq \alpha$) e in un intorno di esso il numero dei punti rappresentativi, prima dell'aggiunta delle nuove vibrazioni unitarie, era

$$nf(N, x - \cos\varphi, y - \sin\varphi)\, dx\, dy .$$

Poichè tali punti si sono poi spostati in tutte le direzioni comprese fra $-\alpha$ e $+\alpha$, quelli pervenuti in (x, y) saranno soltanto

$$\frac{d\varphi}{2\alpha} nf(N, x - \cos\varphi, y - \sin\varphi)\, dx\, dy .$$

Ripetendo lo stesso ragionamento per tutti i punti dell'arco di circonferenza, cioè facendo variare φ fra $-\alpha$ e $+\alpha$, avremo che i punti giunti in (x, y) sono in numero di

$$\frac{n\, dx\, dy}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{+\alpha} f(N, x - \cos\varphi, y - \sin\varphi)\, d\varphi .$$

Ora evidentemente questo numero deve essere eguale a $nf(N+1, x, y)\, dx\, dy$, per cui potremo scrivere

$$(1) \qquad f(N+1, x, y) = \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{+\alpha} f(N, x - \cos\varphi, y - \sin\varphi)\, d\varphi .$$

È questa l'equazione funzionale della probabilità cercata.

Supponiamo ora che N sia grandissimo. Allora saranno grandi anche x e y e gl'incrementi delle variabili nella (1) possono essere considerati infinitesimi. Si potrà allora porre

$$f(N+1, x, y) = f(N, x, y) + \frac{\partial f}{\partial N}$$

$$f(N, x - \cos\varphi, y - \sin\varphi) = f(N, x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi - \frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\varphi + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin^2\varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\cos\varphi \sin\varphi .$$

Sostituendo nella (1) ed eseguendo l'integrazione, si ottiene

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial N} = -\frac{\sin\alpha}{\alpha}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Integrando questa equazione con i metodi ben noti per le equazioni della fisica matematica, si trova che la soluzione che per N = 0 è nulla ovunque, tranne che nell'origine, è

$$f = \frac{C}{N} \exp\left\{ -\frac{1}{N}\left[\frac{\left(x - \frac{\sin\alpha}{\alpha}N\right)^2}{1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}} + \frac{y^2}{1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}} \right] \right\}$$

con C costante. Il valore di C si calcola facilmente esigendo che la probabilità di trovare il punto rappresentativo in un posto qualsiasi sul piano sia eguale a 1, cioè integrando la f su tutto il piano ed eguagliando a 1 il risultato. Si giunge così all'espressione

$$(3) \quad f = \frac{1}{\pi N \sqrt{1 - \frac{\sin^2 2\alpha}{4\alpha^2}}} \exp\left\{ -\frac{1}{N}\left[\frac{\left(x - \frac{\sin\alpha}{\alpha}N\right)^2}{1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}} + \frac{y^2}{1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}} \right] \right\}.$$

Si constata subito che per $\alpha = \infty$ si ha

$$f = \frac{1}{\pi N} e^{-\frac{x^2 + y^2}{N}}$$

cioè la legge di Lord Rayleigh.

§ 4. – È interessante una discussione della (3).

Prima di tutto notiamo che *il valore più probabile per la y è sempre lo zero*. Anzi la dispersione dei suoi valori probabili attorno allo zero va diminuendo sempre più quando α tende a zero. Per $\alpha = 0$ la y non può essere che nulla.

Ben diversamente vanno le cose per la x. Il suo valore più probabile x_p è

$$x_p = \frac{\sin\alpha}{\alpha} N.$$

È bensì vero che tale valore tende allo zero per $\alpha \to \infty$. Ma si noti che esso *è dell'ordine di* N e, comunque sia grande α, si può trovare un valore di N tale che x_p differisca dallo zero quanto si vuole. Quando si pensa che nei casi particolari lo scostamento dal valore più probabile è dell'ordine di $\sqrt{N}$, si vede quale differenza notevole vi sia fra la legge trovata e quella di Lord Rayleigh.

L'intensità è in generale dell'ordine di N^2 *e non dell'ordine di* N.

Soltanto quando α è un muitiplo di π si ritorna alla probabilità secondo la distribùzione di Lord Rayleigh.

Fisica (Elettroacustica). — *Grandezze caratteristiche dei trasduttori elettromeccanici* [1]. Nota di I. Barducci, presentata [2] dal Socio A. Signorini.

1. Premessa. – In una precedente Nota di P. G. Bordoni [3] dal titolo: *Equazioni generali dei trasduttori elettromeccanici*, è stato introdotto un nuovo tipo di *impedenze miste elettromeccaniche di accoppiamento*, definite come rapporto fra una forza meccanica e una corrente elettrica. La utilità di queste nuove impedenze risiede principalmente nella notevole semplificazione che esse introducono nella teoria dei trasduttori elettromeccanici, perchè permettono di caratterizzare il funzionamento di un qualsiasi trasduttore con un unico sistema di equazioni.

Nella presente Nota ci si propone di mostrare come, partendo dalle equazioni generali dei trasduttori elettromeccanici così ottenute, sia possibile calcolare le grandezze finora comunemente usate per caratterizzare il funzionamento dei trasduttori, ed inoltre introdurre allo stesso scopo, nuovi parametri particolarmente significativi. Saranno innanzi tutto calcolate le *impedenze dinamiche* che il *secondario* del trasduttore trasferisce al *primario*, e si mostrerà che le impedenze dinamiche di corto circuito soddisfano ad un teorema di reciprocità che conserva lo stesso enunciato sia per i circuiti elettrici, sia per i sistemi meccanici, sia per i trasduttori elettromeccanici, anche quando l'accoppiamento è imperfetto a causa di perdite dielettriche o correnti parassite.

Si introdurranno successivamente i *rapporti di trasformazione* del trasduttore, definiti come rapporti fra grandezze corrispondenti nella analogia classica, cioè fra forza e tensione e fra velocità e corrente (ovvero fra pressione e tensione e fra portata e corrente) e si farà vedere che due di tali rapporti si identificano con le *sensibilità* del trasduttore usato come microfono e come altoparlante.

Saranno poi calcolati i rapporti fra le potenze reali (rendimenti) e fra le potenze apparenti del *secondario* e del *primario*, ricavando dalle loro espressioni la condizione perchè si verifichi la *risonanza elettromeccanica*.

Si definirà infine un *coefficiente di accoppiamento*–reale, adimensionale e indipendente dal senso della trasformazione – il quale, tendendo a zero quando l'accoppiamento è nullo e tendendo all'unità quando l'accoppiamento diviene perfetto, caratterizza assai efficacemente la *bontà* di diversi tipi di accoppiamento elettromeccanico, e ne permette il confronto nel modo più generale.

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale di Elettroacustica « O. M. Corbino ».
(2) Nella seduta dell'8 febbraio 1947.
(3) « Atti Accademia Naz. Lincei », vol. I, serie 8ª, 1946, p. 1324.

2 Impedenze dinamiche. – Le equazioni di un trasduttore elettromeccanico scritte nella nota precedentemente citata (4):

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathfrak{F} - \mathfrak{Z}\,U - \mathfrak{Z}''U - \mathbf{Z}\,I = 0 \\ V - Z\,I - Z''I + \mathbf{Z}^*\,U = 0 \end{cases}$$

ne caratterizzano il funzionamento nelle condizioni più generali, cioè quando ad esso sono contemporaneamente applicate una forza vibromotrice ed una forza elettromotrice. Nella maggior parte delle applicazioni tecniche la trasformazione di energia è tuttavia utilizzata in un solo senso; se esso è quello meccanico elettrico (microfono) la forza elettromotrice V si annulla, mentre si annulla la forza vibromotrice $\mathfrak{F}$ nel caso contrario (altoparlante). Indicando con il nome di *primario* la parte del trasduttore cui è applicata la forza esterna (vibromotrice o elettromotrice) l'unica forza attiva nel *secondario* è quella dovuta all'accoppiamento, data rispettivamente da: $+\mathbf{Z}^*U$ per il microfono e $-\mathbf{Z}I$ per l'altoparlante. La reazione del secondario sul primario è allora caratterizzata, come nel caso dei trasformatori elettrici, da una impedenza trasferita, o *impedenza dinamica*, il cui valore si deduce immediatamente dalle (1) ed è per la trasformazione meccanico–elettrica: $\mathbf{Z}\,\mathbf{Z}^*/(Z + Z'')$, e per quella inversa: $\mathbf{Z}\,\mathbf{Z}^*/(\mathfrak{Z} + \mathfrak{Z}'')$.

I valori che le impedenze dinamiche assumono quando il secondario è chiuso in corto circuito ($Z'' = 0$) – ovvero vibra nel vuoto ($\mathfrak{Z}'' = 0$) – hanno una particolare importanza perchè dipendono soltanto dai parametri del trasduttore, e sono dati rispettivamente da:

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathfrak{Z}' = \dfrac{\mathbf{Z}\mathbf{Z}^*}{Z} \text{ (trasformazione meccanico–elettrica)} \\ Z' = \dfrac{\mathbf{Z}\mathbf{Z}^*}{\mathfrak{Z}} \text{ (trasformazione elettrico–meccanica).} \end{cases}$$

Quando si trascurano i fenomeni parassiti $\mathbf{Z}^*$ è il coniugato di $\mathbf{Z}$; quindi il loro prodotto è sempre reale e positivo. Da questo punto di vista il comportamento di un trasduttore elettromeccanico è dunque identico a quello di un trasformatore elettrico, quando al fattore di accoppiamento $\omega^2 M^2$ si sostituisca il prodotto $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^*$. Le (2) dànno inoltre una nuova giustificazione delle osservazioni fatte nella Nota precedentemente citata a proposito delle variazioni di segno, nelle equazioni (1), dei termini dovuti ad un accoppiamento resistivo. Tale cambiamento di segno è richiesto, in base alle (2), dalla condizione che le resistenze trasferite dal secondario al primario,

(4) Nelle (1) e nelle formule che seguono, i simboli hanno lo stesso significato che ad essi è attribuito nel lavoro di P. G. Bordoni, e cioè $\mathfrak{F}$ = forza vibromotrice; V = forza elettromotrice; U = velocità; I = corrente; $\mathfrak{Z}$ = impedenza meccanica propria; $\mathfrak{Z}''$ = impedenza meccanica di carico; Z, Z'' = impedenze elettriche, propria e di carico. $\mathbf{Z} = \mathfrak{F}/I$ (altoparlante) e $\mathbf{Z}^* = V/U$ (microfono) sono le impedenze elettromeccaniche di accoppiamento.

abbiano segno positivo. Questa condizione è necessaria perchè si tratta di trasduttori passivi, e d'altronde le resistenze di accoppiamento elettromeccanico non provengono da una funzione dissipativa. Se si tiene conto anche dei fenomeni parassiti, i quali alterano l'angolo di fase ideale tra forza e corrente, la resistenza **R** e la reattanza **X** componenti della **Z** vanno considerate anch'esse grandezze complesse, moltiplicandole per due fattori $e^{j\vartheta_1}$; $e^{j\vartheta_2}$ essendo precisamente ϑ_1 e ϑ_2 gli sfasamenti introdotti dalle perdite dei due accoppiamenti; $\mathbf{Z}^*$ non è più allora il coniugato di **Z**.

Si vedrebbe allora facilmente che i fenomeni parassiti producono una diminuzione delle resistenze dinamiche positive trasferite al primario, cioè riducono l'efficacia dell'accoppiamento.

3. Rapporti di trasformazione e sensibilità. – Per caratterizzare il funzionamento di un trasduttore elettromeccanico, accanto alle impedenze proprie, Z, $\mathfrak{Z}$, all'impedenza di accoppiamento **Z** ed alle impedenze dinamiche Z', $\mathfrak{Z}'$ conviene introdurre i *rapporti di trasformazione*: forza–tensione e velocità–corrente, e quelli relativi alla trasformazione inversa. Nell'analogia classica tali rapporti corrispondono, evidentemente, ai rapporti di trasformazione, di tensione e di corrente, di un trasformatore elettrico.

Quando la trasformazione avviene nel senso: meccanico–elettrico (microfono) dalle (1) si ricavano immediatamente i valori del rapporto n_1 (tensione–forza) ed n_2 (corrente-velocità):

$$(3) \qquad \begin{cases} n_1 = \dfrac{|V|}{|\mathfrak{F}|} = \dfrac{|V|}{|U||\mathfrak{Z}|} = \dfrac{|\mathbf{Z}^*|}{|\mathfrak{Z}|} \\ n_2 = \dfrac{|I|}{|U|} = \dfrac{|V|}{|Z||U|} = \dfrac{|\mathbf{Z}^*|}{|Z|} \end{cases}.$$

Invertendo il senso della trasformazione (altoparlante) si trova facilmente, per il rapporto tensione–forza, una espressione analoga a quella di n_2 già calcolata, e per il rapporto velocità–corrente una espressione analoga a quella di n_1, con la sola differenza che al posto di $|\mathbf{Z}^*|$ va posto $|\mathbf{Z}|$. Dato che, in assenza di fenomeni parassiti $\mathbf{Z}^*$ è il coniugato di **Z**, e quindi i loro moduli sono eguali, si vede che anche per i trasduttori elettromeccanici ideali – come per i trasformatori elettrici ideali – il rapporto di trasformazione *di tensione* in un senso è eguale al rapporto di trasformazione *di corrente* nel senso opposto.

Sussistono quindi le seguenti espressioni di n_1 e n_2 (trascurando i fenomeni parassiti) (5):

(5) Per interpretare correttamente le (4) si deve osservare che, nelle espressioni di definizione di n_1 ed n_2, al numeratore compare sempre una grandezza del secondario (effetto) ed al denominatore la grandezza analoga del primario (causa).

$$(4)\qquad \begin{cases} n_1 = \dfrac{|\mathbf{Z}|}{|\mathfrak{Z}|} = \dfrac{|\mathbf{Z}^*|}{|\mathfrak{Z}|} \begin{cases} = \dfrac{|\mathbf{V}|}{|\mathfrak{F}|} & \text{(microfono)} \\ = \dfrac{|\mathbf{U}|}{|\mathbf{I}|} & \text{(altoparlante)} \end{cases} \\ n_2 = \dfrac{|\mathbf{Z}|}{|\mathrm{Z}|} = \dfrac{|\mathbf{Z}^*|}{|\mathrm{Z}|} \begin{cases} = \dfrac{|\mathbf{I}|}{|\mathbf{U}|} & \text{(microfono)} \\ = \dfrac{|\mathfrak{F}|}{|\mathbf{V}|} & \text{(altoparlante).} \end{cases} \end{cases}$$

TABELLA I.

Espressioni formali e dimensioni fisiche delle principali grandezze caratteristiche dei trasduttori elettromeccanici.

GRANDEZZA	Simbolo	Dimensioni	ACCOPPIAMENTO	
			a resistenza elettromeccanica	a capacità elettromeccanica
Impedenza meccanica dinamica di *corto circuito.*	$\mathfrak{Z}'$	$\mathrm{Nw}\cdot m^{-1}\cdot\mathrm{sec}$.	$\mathbf{R}^2/\mathrm{Z}$	$1/\omega^2\mathbf{C}^2\,\mathrm{Z}$
Impedenza elettrica dinamica di *corto circuito.*	Z'	$\mathrm{V}\cdot\mathrm{A}^{-1}$	$\mathbf{R}^2/\mathfrak{Z}$	$1/\omega^2\mathbf{C}^2\,\mathfrak{Z}$
Primo rapporto di trasformazione.	n_1	$\mathrm{V}\cdot\mathrm{Nw}^{-1} = m\cdot\mathrm{sec}^{-1}\,\mathrm{A}^{-1}$	$\mathbf{R}/\lvert\mathfrak{Z}\rvert$	$1/\omega\,\mathbf{C}\,\lvert\mathfrak{Z}\rvert$
Secondo rapporto di trasformazione.	n_2	$\mathrm{Nw}\cdot\mathrm{V}^{-1} = \mathrm{A}\cdot m^{-1}\cdot\mathrm{sec}$	$\mathbf{R}/\lvert\mathrm{Z}\rvert$	$1/\omega\,\mathbf{C}\,\lvert\mathrm{Z}\rvert$
Rendimento meccanico-elettrico.	$\eta_{m,e}$	—	$\dfrac{\mathbf{R}^2\,\mathrm{R}}{\mathbf{R}^2\,\mathrm{R}+\mathfrak{R}\,\lvert\mathrm{Z}\rvert^2}$	$\dfrac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}+\omega^2\mathbf{C}^2\,\mathfrak{R}\,\lvert\mathrm{Z}\rvert^2}$
Rendimento elettrico-meccanico.	$\eta_{e,m}$	—	$\dfrac{\mathbf{R}^2\,\mathfrak{R}}{\mathbf{R}^2\,\mathfrak{R}+\mathrm{R}\,\lvert\mathfrak{Z}\rvert^2}$	$\dfrac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}+\omega^2\mathbf{C}^2\,\mathrm{R}\,\lvert\mathfrak{Z}\rvert^2}$
Rapporto: potenza apparente secondaria, potenza apparente *propria* primaria.	$\mathfrak{N}'/\mathfrak{N}$	—	$\dfrac{\mathbf{R}^2}{\lvert\mathfrak{Z}\,\mathrm{Z}\rvert}$	$\dfrac{1}{\omega^2\mathbf{C}^2\,\lvert\mathfrak{Z}\,\mathrm{Z}\rvert}$
Rapporto: potenza apparente secondaria, potenza apparente *totale* primaria.	$\mathfrak{N}'/\mathfrak{N}''$	—	$\dfrac{\mathbf{R}^2}{\lvert\mathbf{R}^2+\mathfrak{Z}\,\mathrm{Z}\rvert}$	$\dfrac{1}{\lvert 1+\omega^2\mathbf{C}^2\,\mathfrak{Z}\,\mathrm{Z}\rvert}$
Coefficiente di accoppiamento.	n	—	$\dfrac{\mathbf{R}^2}{\mathbf{R}^2+\lvert\mathfrak{Z}\,\mathrm{Z}\rvert}$	$\dfrac{1}{1+\omega^2\mathbf{C}^2\,\lvert\mathfrak{Z}\,\mathrm{Z}\rvert}$

Nella tabella I sono raccolte le espressioni assunte da n_1 ed n_2, e dagli altri parametri che saranno introdotti in seguito, per i due tipi fondamentali di trasduttori elettromeccanici: a resistenza elettromeccanica **R** e a capacità elettromeccanica **C**. Accanto ad n_1 ed n_2, si possono definire le corrispondenti grandezze *acustiche* s_1 ed s_2, cioè i *rapporti di trasformazione acustico–elettrici*, nei quali al posto di $\mathfrak{F}$ ed U, figurano, rispettivamente, la pressione P e la portata Ψ. Si vedrebbe allora immediatamente che s_1, s_2 sono date da relazioni analoghe alle (4), nelle quali al posto delle impedenze elettromeccaniche di accoppiamento $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}^*$ e della impedenza meccanica $\mathfrak{Z}$ figurano le corrispondenti grandezze *acustiche*: $\mathbf{Z}_A$; $\mathbf{Z}_A^*$; $\mathfrak{Z}_A$ [6]. Si verifica facilmente che quando il trasduttore è adoperato come microfono la s_1 dà la *sensibilità alla pressione*, definita come rapporto fra la d. d. p. a vuoto e la pressione effettivamente agente sul diaframma in movimento [7]. Anche nel caso di un altoparlante la s_1 caratterizza la sensibilità del trasduttore, che può esser definita come rapporto fra la portata acustica nel vuoto [8] e la corrente che la produce, e definita in questo modo dipende soltanto dai parametri del trasduttore. Nelle applicazioni interviene, invece, anche l'impedenza di radiazione, la quale però è generalmente molto piccola rispetto all'impedenza propria.

4. Rapporti di impedenze e di potenze e teorema di reciprocità sulle impedenze. – Se si calcolano, mediante le (2) i rapporti $\mathfrak{Z}'/\mathfrak{Z}$ e Z'/Z delle *impedenze dinamiche di corto circuito* (le quali sono indipendenti dal carico esterno) alle corrispondenti impedenze proprie, si trova:

$$\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{Z}'} = \frac{\mathbf{Z}\mathbf{Z}^*}{Z\mathfrak{Z}} = \frac{Z'}{Z} . \tag{5}$$

La (5) rivela una importante proprietà dei trasduttori che può essere considerata come un *teorema di reciprocità relativo alle impedenze*; precisamente si vede che:

Il rapporto della impedenza dinamica di *corto circuito* alla corrispondente impedenza propria *non* dipende dal senso della trasformazione.

Si osserva anzi che l'eguaglianza dei rapporti $\mathfrak{Z}'/\mathfrak{Z}$ e Z'/Z, in modulo e fase, sussiste anche se $\mathbf{Z}^*$ non è il coniugato di $\mathbf{Z}$, cioè nel caso più generale in cui si tenga conto dei fenomeni parassiti. Il teorema conserva inoltre lo stesso enunciato anche per i sistemi formati di soli parametri elettrici o di soli parametri meccanici e per i sistemi di più trasduttori accoppiati. Esso ha quindi una validità più generale del teorema di reciprocità relativo

(6) Vedere la formula (6) del lavoro di P. G. Bordoni prima citato per la definizione di: $\mathbf{Z}_A$; $\mathbf{Z}_A^*$

(7) La sensibilità va definita in tal modo per rendersi indipendenti tanto dalla impedenza di radiazione quanto dal carico esterno.

(8) Si intende per portata acustica nel vuoto il prodotto della velocità media dell'organo mobile – nel vuoto – per la sua area equivalente S.

alle forze elettromotrici (vibromotrici) e alle velocità (correnti) [9]. Dalle (4), (5) si vede ancora che il modulo del rapporto di una impedenza dinamica alla corrispondente impedenza propria è eguale al prodotto dei rapporti di trasformazione (n_1 n_2); esso è inoltre eguale al rapporto fra la potenza apparente $\mathfrak{N}'$ localizzata nel secondario e quella $\mathfrak{N}$ localizzata nell'impedenza propria primaria.

Il rapporto fra potenza apparente secondaria $\mathfrak{N}''$ e potenza apparente totale del primario $\mathfrak{N}''$ è dato, invece, da:

$$(6) \qquad \frac{\mathfrak{N}'}{\mathfrak{N}''} = \frac{|\mathcal{Z}'|}{|\mathcal{Z}+\mathcal{Z}'|} = \frac{|Z'|}{|Z+Z'|} = \frac{|\mathbf{Z}\mathbf{Z}^*|}{|\mathbf{Z}\mathbf{Z}^*+\mathcal{Z}Z|}.$$

Come si vede, i rapporti di potenze considerati sono indipendenti dal senso della trasformazione. Essi inoltre possono assumere tutti i valori fra o e $+\infty$; nel secondario si può quindi localizzare una potenza apparente anche molto maggiore della potenza totale primaria $\mathfrak{N}''$, ma si tratta naturalmente di una potenza quasi completamente reattiva. Ciò avviene quando:

$$(7) \qquad \mathbf{Z}\mathbf{Z}^* = -\mathcal{Z}Z.$$

si ha allora una *risonanza elettromeccanica*: primario e secondario si scambiano potenza reattiva senza riceverne dalla sorgente. Naturalmente ciò avviene soltanto nel caso ideale in cui le dissipazioni siano trascurabili [10].

Oltre ai rapporti delle potenze apparenti si possono considerare quelli tra le potenze reali; i quali possono essere chiamati *rendimenti elettromeccanici* del trasduttore. Dalle (4) e (6), si ha:

$$(8) \qquad \begin{cases} \eta_{m,e} = \dfrac{R\,|I^2|}{(\mathcal{R}+\mathcal{R}')\,|U^2|} = \dfrac{R\,n_2^2}{\mathcal{R}+R\,n_2^2} \\ \eta_{e,m} = \dfrac{\mathcal{R}\,|U^2|}{(R+R')\,|I^2|} = \dfrac{\mathcal{R}\,n_1^2}{R+\mathcal{R}\,n_1^2}. \end{cases}$$

Si vede che il rendimento così definito dipende, generalmente dal senso della trasformazione; in particolare esso si annulla quando il secondario è costituito da reattanze pure.

I rapporti di trasformazione n_1 e n_2 non si prestano a caratterizzare in maniera semplice e generale la bontà di un accoppiamento, perchè il loro valore dipende dalle unità scelte ed essi possono assumere qualsiasi valore positivo.

(9) Vedere il lavoro di P. G. BORDONI. Si verificherebbe che la (5) vale anche per il caso segnalato da MCMILLAN « J. A. S. A. », vol. 18, 1946, p. 344) nel quale il teorema di reciprocità classico cade completamente in difetto. La questione potrà essere esaminata nei particolari in un successivo lavoro.

(10) Un noto esempio di risonanza elettromeccanica è quello di un altoparlante elettrodinamico; Vedi N. W. MCLACHLAN: *Loud speakers*. Clarendon, 1934, p. 134.

Il loro prodotto $(n_1 n_2)$ si presta meglio a questo scopo, essendo adimensionale, ma anch'esso ha l'inconveniente di assumere valori positivi qualsiasi. D'altra parte il rendimento ora definito non ha una grande importanza nelle applicazioni tecniche, perchè generalmente non si utilizza la potenza reale del trasduttore, ma uno dei fattori della sua potenza apparente (per esempio la f. e. m. generata nei microfoni).

Per caratterizzare meglio la *bontà* degli accoppiamenti si può, invece, introdurre un *coefficiente di accoppiamento* n, reale, adimensionale ed indipendente dal senso della trasformazione, il quale si annulla con l'accoppiamento e cresce, tendendo all'unità, quando l'accoppiamento diviene più stretto. Tale coefficiente può essere definito mediante i moduli delle impedenze proprie e dinamiche, nel modo seguente:

$$(9) \qquad n = \frac{|\mathcal{Z}'|}{|\mathcal{Z}| + |\mathcal{Z}'|} = \frac{|Z'|}{|Z| + |Z'|} = \frac{|\mathbf{Z}\mathbf{Z}^*|}{|\mathbf{Z}\mathbf{Z}^*| + |\mathcal{Z}Z|} = \frac{n_1 n_2}{n_1 n_2 + 1}.$$

Si vede immediatamente dalla (9) che il valore di n tende all'unità quando le impedenze trasferite Z' e $\mathcal{Z}'$ sono, rispettivamente, molto grandi in confronto con le corrispondenti impedenze proprie Z e $\mathcal{Z}$, cioè quando l'accoppiamento tende a divenire *perfetto*. Nelle stesse condizioni il prodotto $n_1 n_2$ tende all'infinito.

5. Conclusione. – Servendosi delle equazioni generali dei trasduttori elettromeccanici ricavate in una precedente Nota da P. G. Bordoni, sono state calcolate le principali grandezze caratteristiche dei trasduttori elettromeccanici: impedenze dinamiche trasferite dal secondario al primario, sensibilità, rendimenti.

Mediante lo stesso sistema di equazioni, è stato possibile definire alcuni nuovi parametri dei trasduttori ed in particolare un *coefficiente di accoppiamento* n – reale, adimensionale, compreso fra 0 ed 1, ed indipendente dal senso della trasformazione – mediante il quale sembra possibile caratterizzare nel modo migliore la *bontà* dell'accoppiamento elettromeccanico e stabilire un confronto tra i vari tipi di accoppiamento.

Sono state, inoltre calcolate, e raccolte nella tabella I, le espressioni che le varie grandezze introdotte assumono per i due tipi fondamentali di accoppiamenti elettromeccanici: a resistenza elettromeccanica **R** ed a capacità elettromeccanica **C**.

Si è infine mostrato che i sistemi elettromeccanici soddisfano ad un teorema di reciprocità relativo alle impedenze dinamiche di corto circuito, il quale ha una validità del tutto generale e conserva lo stesso enunciato anche per i sistemi formati da soli parametri elettrici o da soli parametri meccanici.

Chimica (Chimica–Fisica). — *Cinetica delle reazioni lente.* – I. *Acetilazione dell'alcole metilico* [1] Nota di U. Beretta e L. Jannelli, presentata [2] dal Socio F. Giordani.

La teoria delle collisioni per le reazioni bimolecolari [3], che si svolgono in fase gassosa, porta a calcolare la velocità di tali reazioni come il prodotto del numero di urti (che avvengono nell'unità di tempo tra le molecole reagenti) per un fattore esponenziale, $e^{-E/RT}$, detto comunemente fattore di Boltzmann, il quale sta a rappresentare la frazione degli urti totali che si producono tra molecole aventi tra loro energia superiore ad un determinato valore E, che si designa come energia di attivazione. Il fattore di Boltzmann rappresenta in altri termini quella frazione degli urti totali, che si possono definire urti attivati.

La costante di velocità k sarebbe eguale al prodotto del fattore di Boltzmann, per il numero Z di urti che si producono nell'unità di tempo, nell'unità di volume, in corrispondenza dell'unità di concentrazione di entrambi i reagenti: al numero Z si dà anche correntemente il nome di fattore di urto.

Poichè il numero Z si può calcolare con sufficiente approssimazione e l'energia di attivazione E si può dedurre, per mezzo della formula di Arrhenius, quando si disponga di misure di velocità a varie temperature; è possibile di eseguire il confronto tra i valori trovati sperimentalmente per le costanti k e quelli calcolati in base alla teoria delle collisioni. Le eventuali differenze si valutano per mezzo di un fattore P, che si introduce nella formula

$$k = PZ\, e^{-E/RT}.$$

Questo nuovo fattore esprime la probabilità del verificarsi di una serie di altre condizioni che – oltre a quella del semplice contatto tra le molecole attivate – devono essere soddisfatte affinchè la reazione abbia luogo. Rientra nel novero di queste ulteriori condizioni quella relativa al realizzarsi dell'urto tra determinati gruppi atomici delle singole molecole, che sono proprio quelli interessati alla reazione, e perciò il fattore P prende anche il nome di fattore sterico. In generale però esso sta a rappresentare il rapporto tra il numero di urti efficaci ed il numero degli urti attivati.

La teoria delle collisioni si può estendere anche al caso in cui le reazioni si svolgano in soluzione; ma molto spesso accade per queste che il fattore P assuma valori molto piccoli (perfino dell'ordine di 10^{-8}): si dice allora che si ha da fare con « reazioni lente ». E poichè un rendimento così basso non

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica–Fisica dell'Università di Napoli. Centro Studi di Chimica Applicata del C. N. R.

(2) Nell'adunanza dell'11 gennaio 1947.

(3) C. N. Hinshelwood, *The kinetics of chemical change.* (Oxford, 1942) p. 70.

si può spiegare con la sola necessità che si verifichino condizioni semplicemente accessorie, come sono quelle di tipo sterico, resta aperto il problema di fornire una spiegazione adeguata per questo comportamento anomalo. Tra le tante teorie che sono state formulate, ha ricevuto speciale attenzione quella fondata sulla ipotesi che si possa avere un minor numero di urti efficaci in seguito al verificarsi di una disattivazione come conseguenza di urti ternari con le molecole del solvente; ma anche questa spiegazione è stata messa in dubbio in seguito alla dimostrazione del fatto che in molti casi le reazioni, che sono di tipo lento in soluzione, lo sono anche quando decorrono in fase gassosa.

Per far luce su questa interessante questione ci è sembrato che potesse riuscire opportuno la raccolta sistematica di un materiale sperimentale sufficiente a caràtterizzare l'influenza dei vari fattori di azione ed, in ogni caso, a ristabilire un più giusto rapporto tra la quantità dei fatti sperimentalmente accertati ed il numero delle teorie emesse.

Tra le reazioni bimolecolari di tipo lento, che sono state studiate dal punto di vista cinetico, abbiamo fermato la nostra attenzione su quelle di acetilazione degli alcoli in solventi poco dissocianti, reazioni che furono studiate per la prima volta da Menschutkin [4] in soluzioni benzeniche e che sono state di recente riprese in esame da Soper e Williams [5] e da Moelwyn–Hughes ed Hinshelwood [6], anche in altri solventi.

Riferiamo in questa prima Nota i risultati delle misure eseguite sulla acetilazione dell'alcole metilico.

Si sono eseguite alcune serie di misure adoperando soluzioni benzoliche nelle quali la concentrazione iniziale dell'anidride acetica era sensibilmente eguale per tutte e cioè circa 0,300 m, mentre le concentrazioni iniziali dell'alcole metilico variavano da 0,125 m a 0,750 m. Le misure di velocità sono state eseguite alle temperature di 49,63°, di 59,00° e di 68,85° C, le quali venivano mantenute costanti nei limiti di $\pm$ 0,02° nei primi due casi e di $\pm$ 0,03° nell'ultimo.

Dalle esperienze di Menschutkin (loc. cit.) risulta che a 100° tutte queste reazioni di acetilazione degli alcoli sono praticamente illimitate, ma alle temperature più basse utilizzate per le nostre esperienze ciò non è più rigorosamente vero. Abbiamo perciò seguìto le reazioni stesse fino a non oltre il 65 % di conversione del costituente meno rappresentato, essendoci con esperienze preliminari accertati che entro tali limiti l'influenza della reazione inversa poteva ritenersi trascurabile.

(4) N. Menschutkin, *Ueber die Geschwindikgeit der Esterbildung.* (« Z. phys. Ch. », *1*, 611–630; 1887).

(5) F. G. Soper and E. Williams, *The effect of the solvent on the rate of acetylation of ethyl alcohol by acetic anhydride.* (« J. Ch. Soc. », *134*, 2297–2303; 1931).

(6) E. A. Moelwyn–Hughes and C. N. Hinshelwood, *The kinetics of two bimolecular reactions in solution and in the vapour phase.* (« J. Ch. Soc. », *135*, 230–240; 1932).

Tabella I.

Conc. iniziale C	$k \cdot 10^4$ in litri·mol^{-1}·sec^{-1}.					
	$t = 49{,}63°$		$t = 59{,}00°$		$t = 68{,}85°$	
	oss.	calc.	oss.	calc.	oss.	calc.
0,125	1,805	1,891	3,833	3,785	7,831	7,568
0,250	1,625	1,705	3,231	3,158	6,003	5,868
0,375	1,488	1,536	2,746	2,761	5,151	4,973
0,500	1,285	1,329	2,295	2,288	4,060	3,938
0,625	1,190	1,229	2,085	2,076	3,605	3,512
0,750	1,063	1,094	1,825	1,825	3,133	3,090

La tabella I contiene i valori delle costanti di velocità k determinati in altrettante esperienze con diversi valori della concentrazione iniziale C dell'alcole ed alle varie temperature. Accanto ai valori osservati figurano anche i valori calcolati con altrettante formule di Arrhenius $k = A\, e^{-E/RT}$ corrispondenti ognuna ad una determinata concentrazione C: come si vede, dal confronto, le massime deviazioni non superano il 5 %; ma nella maggioranza dei casi l'approssimazione è molto maggiore.

Ad ogni temperatura, le costanti di velocità crescono regolarmente quando le concentrazioni iniziali dell'alcole diminuiscono, e perciò sono stati separatamente calcolati i valori di E e di A per altrettante formule di Arrhenius quanti sono i valori di C ed utilizzando il me todo dei minimi quadrati. I risultati ottenuti figurano nella tabella II.

Tabella II.

Conc. iniziale C	E		$A \cdot 10^{-5}$		log A	
	calc. dir.	interp.	calc. dir.	interp.	calc. dir.	interp.
0,125	15.813	15.760	97,92	103,9	6,99089	7,01262
0,250	14.077	14.253	5,878	6,670	5,76925	5,82411
0,375	13.376	13.192	1,775	1,249	5,24925	5,09683
0,500	12.390	12.465	0,329	0,394	4,51821	4,59558
0,625	11.963	11.968	0,157	0,166	4,19525	4,22119
0,750	11.625	11.644	0,086	0,0817	3,93435	3,91236

I valori delle energie di attivazione crescono con grande regolarità ed in modo apprezzabile al diminuire della concentrazione iniziale dell'alcole, il che fa sorgere il dubbio che le molecole da attivare non siano tutte mediamente le stesse e che alle più basse concentrazioni debbano prevalere molecole le quali richiedono una più grande energia di attivazione. Questo modo di variare di E porta come conseguenza che il fattore di Boltzmann nelle formule di Arrhenius risulti tanto più piccolo per quanto minore è C, mostrando un andamento discordante da quello di k, il quale, come abbiamo visto, cresce al diminuire di C: la compensazione spetta al fattore A, che deve perciò crescere in modo molto marcato al diminuire della concentrazione iniziale dell'alcole. Nell'intervallo di concentrazioni da noi utilizzato, le costanti di velocità si raddoppiano all'incirca, mentre il fattore A diventa più che mille volte maggiore, passando da $0{,}8 \cdot 10^4$ a $1{,}039 \cdot 10^7$. Nemmeno quest'ultimo valore ricavato dalle misure cinetiche raggiunge però il valore Z, che, in base alla teoria cinetica, si può calcolare per il numero di collisioni corrispondenti alle concentrazioni unitarie di entrambi i reagenti per ogni minuto secondo e che risulta eguale a $2{,}8 \cdot 10^{11}$.

Seguendo il criterio comunemente adottato, la reazione in esame dovrebbe pertanto essere classificata tra le « reazioni lente », come hanno fatto, per tutte le reazioni analoghe, gli studiosi che se ne sono occupati. Le nostre misure però – che esplorano in modo sistematico un campo esteso di concentrazioni e di temperature – fanno anche vedere che, al diminuire della concentrazione iniziale dell'alcole, ci si avvicina sempre più alle condizioni che si prevederebbero in base alla semplice teoria delle collisioni.

Ci è parso quindi logico di estrapolare al limite, per concentrazioni, bassissime, i nostri risultati di esperienza ed abbiamo a tal fine calcolato delle formule di interpolazione per E e per A, in funzione di C, utilizzandole poi per trovare i valori corrispondenti a $C = 0$. Col sussidio del metodo dei minimi quadrati, si ottengono le formule seguenti:

$$\frac{1}{E} = 0{,}00005538 + 0{,}00006994\,C - 0{,}00004317\,C^2 + 0{,}00000597\,C^3$$

$$\frac{1}{\log A} = 0{,}10775 + 0{,}30537\,C - 0{,}22563\,C^2 + 0{,}1084\,C^3.$$

Nella tabella II, i valori di E e di A, calcolati direttamente per le formule di Arrhenius, sono posti a confronto con quelli che si calcolano per mezzo delle due formule di interpolazione; e si può osservare che tanto E quanto log A sono suscettibili di essere interpolati con l'approssimazione di qualche unità per cento. Si deduce inoltre che:

$$\lim_{C \to 0} E = 18.056 \quad \text{e} \quad \lim_{C \to 0} A = 1{,}9 \cdot 10^9.$$

Quest'ultimo risultato è molto interessante in quanto ci dice che – nei limiti di approssimazione consentiti da questo genere di calcoli – la rea-

zione bimolecolare in esame appare svolgersi in modo normale quando la concentrazione iniziale dell'alcole tende a zero.

Poichè esperienze appositamente istituite hanno dimostrato che le costanti di velocità non sono influenzate quando si cambi il valore della concentrazione iniziale dell'anidride acetica, si deve concludere dai risultati sovraesposti che il comportamento anomalo, in base al quale la reazione si classifica tra quelle a decorso lento, è strettamente collegato alla concentrazione dell'alcole. Alle più alte concentrazioni di questo reagente il numero degli urti efficaci è sensibilmente inferiore al numero degli urti attivati; ma la prima di tali grandezze tende a coincidere con la seconda allorquando le molecole dell'alcole tendono alla diluizione infinita.

È noto che gli alcoli sono più o meno associati nelle loro soluzioni benzeniche, ed in particolare per l'alcole metilico si può ricavare, dalle misure crioscopiche di Auwers [7] e di Pickering [8], un fattore di associazione dell'ordine di 2,7 per la concentrazione 0,75 m. Si deve quindi ritenere che in queste soluzioni – accanto a molecole monomere – se ne trovino anche di quelle polimere in proporzione non piccola; e non è improbabile che queste ultime richiedano una minore energia di attivazione per reagire con l'anidride acetica.

Purtroppo non è facile calcolare come vari la concentrazione delle singole specie molecolari, monomere e polimere, al variare della concentrazione complessiva della soluzione alle diverse temperature e quindi non è possibile tentare di scindere la reazione globale nelle singole reazioni, che con ogni probabilità decorrono parallelamente. L'unica conclusione che può formularsi con un alto grado di attendibilità, si è quella che i valori limiti di A e di E, ottenuti per estrapolazione, sono quelli corrispondenti alla reazione tra anidride acetica ed alcole metilico entrambi monomeri e che, in tali condizioni limiti, il numero degli urti efficaci viene a coincidere molto sensibilmente col numero degli urti attivati.

Questa interpretazione pone una folla di problemi sul significato fisico da attribuire alle grandezze k, E ed A, che si ricavano immediatamente dalle misure eseguite alle concentrazioni praticamente accessibili e per le quali la reazione mostra un decorso lento; ma sembra per ora prematuro di affrontarne, sia pure l'esame preliminare, prima che sia stato raccolto un sufficiente materiale sperimentale su altre reazioni dello stesso tipo.

(7) K. Auwers, *Ueber kryoskopische Molekulargewichtbestimmungen in Benzol.* («Z. phys. Ch.», *12*, 689–722; 1893).

(8) S. U. Pickering, *A study of the properties of some strong solutions.* («J. Ch. Soc.», *63*, 998–1027; 1893).

Biologia. — *Su alcuni aspetti del differenziamento del tessuto nervoso in condizione di espianto*[1]. Nota di L. Forti, presentata[2] dal Corrisp. G. Cotronei.

I problemi del differenziamento morfologico ed istologico del tessuto nervoso sono stati recentemente presi in esame da Alberto Stefanelli, sperimentalmente, associando l'indirizzo embriologico sperimentale con quello istologico, con lo scopo di chiarire, con l'approfondito studio di un territorio nervoso, i fattori generali che entrano in gioco in queste fasi dello sviluppo nervoso. Quale materiale ha usato gli embrioni di *Rana esculenta*, il classico materiale embriologico, e come metodo quello della cultura *in vivo* mediante trapianto in una cavità di un embrione ospite (cavità celomatica, cavità ependimale) o espiantando frammenti della regione presuntiva dell'allungato, prendendo come riferimento i neuroni di Mauthner.

Il metodo dei trapianti, ampiamente usato, e quello dell'isolamento della zona mediante resezioni del tubo nervoso hanno permesso a questo autore di chiarire alcune modalità della determinazione istogenetica della cellula di Mauthner e mettere in luce alcuni fattori causali del differenziamento specifico. È risultato da queste esperienze che l'elevato differenziamento specifico del neurone mauthneriano è raggiunto attraverso due fasi: la cellula subisce in un tempo relativamente precoce una determinazione istogenetica generale (determinazione comune a tutte le cellule nervose) che si estrinseca successivamente col differenziamento istologico generale rappresentato essenzialmente dalla neurofibrillazione e dalla produzione di prolungamenti; in un secondo tempo subisce una determinazione istogenetica particolare (che avviene in tempi differenti per i vari neuroni) che fa acquisire al neuroblasta, in potenza, ma irrevocabilmente, quei caratteri differenziativi particolari che si renderanno evidenti con la successiva fase di differenziamento istologico.

Questo autore ha così potuto concludere che il neuroblasta acquisisce potenzialmente il differenziamento neuroplasmatico specifico generale prima di quello particolare e che è perciò possibile dissociare sperimentalmente il primo dal secondo tempo della determinazione, sottraendo la cellula ai fattori determinanti il differenziamento particolare che entrano in gioco più tardi.

Sia col metodo dei trapianti, come col metodo degli espianti, erano state fatte da questo autore delle osservazioni sul differenziamento morfogenetico e sulla regolazione dei frammenti nervosi così isolati, ma se

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata « Battista Grassi » della Università di Roma.

(2) Nella seduta dell'11 gennaio 1947.

aveva potuto stabilire qualche dato di carattere generale sulle condizioni causali delle differenti condizioni di sviluppo, non aveva potuto dare per alcuni punti una documentazione sufficientemente dimostrativa. Sono stata pertanto indotta a riprendere le esperienze di espianto su più vasta scala, sia per un più ampio controllo dei dati sul differenziamento specifico generale e particolare (dato che solo con questo metodo è possibile eliminare con certezza ogni possibile influenza dell'ospite, di qualunque natura essa sia, sul differenziamento), sia per una più profonda indagine della causalità dello sviluppo morfogenetico dei frammenti [3].

Anche io ho usato gli embrioni di *Rana esculenta* come materiale, prendendo come riferimento del differenziamento i neuroni mauthneriani. Le operazioni sono state eseguite in vari stadî dello sviluppo asportando con forbicette da iridectomia, opportunamente affilate, un frammento corrispondente alla zona presuntiva di sviluppo della cellula di Mauthner del lato destro. I frammenti venivano trapiantati sul ventre di un embrione ospite (alle volte dello stesso embrione) e quindi, dopo avvenuto l'attecchimento (4–6 ore), espiantati con una zona di tuorlo ed un vasto lembo ectodermico ventrale, che, successivamente rimarginandosi, veniva ad avvolgere in una vescicola il frammento nervoso ed il frammento di tuorlo (che in qualche caso si è differenziato in un frammento di tubo digerente). Questo metodo è risultato più rapido di quello di avvolgere il frammento direttamente in un lembo ectodermico poichè, se è facile togliere tali lembi nell'*Hyla*, altrettanto non è nella rana. Gli espianti venivano tenuti in liquido di Ringer per 6–10 giorni e quindi fissati in Bouin picrico; le sezioni sono state colorate col metodo argentico del Bodian.

Ho così potuto anch'io constatare come isolando precocemente il presunto territorio nervoso dell'allungato (stadio di tappo vitellino grande) si può ottenere solo un differenziamento istologico specifico generale, rappresentato dalla produzione di cellule nervose tutte simili, provviste di prolungamenti e in cui si manifesta la formazione neurofibrillare, mentre se l'isolamento è effettuato più tardivamente si ottiene un differenziamento istologico specifico particolare (usando la terminologia di Stefanelli), poichè nei frammenti si identificano cellule nervose di vario tipo e tra le altre appaiono evidenti le cellule di Mauthner, sebbene con alterazioni formali più o meno notevoli.

Ma dove mi voglio particolarmente soffermare in questa Nota, ed è la parte personale di queste ricerche, è nei riguardi del differenziamento morfologico poichè alcuni dei miei espianti, per peculiari condizioni di sviluppo, sono apparsi particolarmente dimostrativi.

Già Stefanelli aveva notato, sia nei trapianti come negli espianti, come i frammenti più piccoli si sviluppano come masserelle piene con le cellule disposte alla superficie e la sostanza bianca al centro, mentre i

(3) Ringrazio il prof. Alberto Stefanelli per la guida e l'aiuto datomi nello svolgimento di queste ricerche.

frammenti più cospicui si sviluppano a forma di semplice tubo con le pareti più o meno spesse o con una disposizione morfologica ricordante in modo più o meno completo la struttura dell'allungato. Queste differenze di struttura vennero attribuite dall'autore a differenze quantitative del materiale isolato e allo stadio della operazione, ma se questo fattore era presumibile non vi era per gli espianti un chiaro esempio come quello che ora espongo. Ricordo come Holtfreter ('33) (4) abbia studiate delle condizioni estrinseche nella morfogenesi del tubo neurale degli Anfibî. Anch'egli otteneva in alcuni casi lo sviluppo a forma di vescicole cave e in altri a masserelle piene con le cellule addensate alla superficie e interpretò questo differente sviluppo in dipendenza della presenza o meno di

Fig. 1. – Ricostruzione e sezioni secondo i piani indicati *a*, *b*, *c* dell'espianto 4 ER3 (*Rana esculenta*) eseguito allo stadio di tappo vitellino piccolo. Notare la tendenza a svilupparsi a tubo nella parte ove il materiale è più abbondante; nelle sezioni si vede come le cellule che nella parte stretta e piena sono rivolte verso la superficie, nella parte tubolare migrano a limitare la cavità interna.

cellule di mesenchima alla periferia del frammento che agirebbero quindi in modo direttivo sul suo sviluppo.

Il fattore « quantità di materiale » invocato da Stefanelli appare assai più verosimile per la maggiore semplicità causale; un mio caso (4ER3) ne dà una chiara dimostrazione. In questo caso l'espianto ha assunto una forma piriforme con un'estremità più assottigliata ed una più rigonfia (fig. 1). *Non si notano attorno al frammento cellule di mesenchima.* Dalle sezioni trasverse è risultato che le cellule nella parte ristretta (*a*) hanno una distribuzione periferica come negli espianti piccoli, mentre nella parte media (*b*) le cellule hanno la tendenza a migrare verso una zona di infossamento paragonabile ad una doccia neurale, sino a limitare completamente la cavità centrale nella parte più allargata che ha assunto una forma tubo-

(4) « Arch. f. Entw. mec. », *123*, pp. 619–775.

lare (*c*). Appare chiaro in questo caso come lo sviluppo pieno o a tubo sia in dipendenza della quantità del materiale e della possibilità del frammento di ripiegarsi a doccia e quindi saldarsi a tubo ripetendo le fasi della normale ontogenesi e neurogenesi. Nella parte ristretta di questo caso, come negli espianti piccoli, si manifestano dei fattori inibitori dello sviluppo corrispondenti alle concezioni svolte da Cotronei sui fattori spaziali. Così mentre gli espianti piccoli provenienti sia da gastrule precoci come da stadî successivi si sviluppano come masserelle piene perchè, anche se è acquisito intrinsecamente un potenziale morfogenetico superiore, esso non può attuarsi per deficenza di materiale, i frammenti espiantati di sufficiente grandezza possono raggiungere un grado di complicazione morfologica maggiore e diversa secondo lo stadio in cui si è eseguito l'isolamento. Infatti mentre gli espianti fatti allo stadio di tappo vitellino grande si differenziano sino a costituire una formazione che ricorda un tubo neurale, i frammenti espiantati successivamente a questo stadio si sviluppano in forma vescicolare e con le pareti che assumono la configurazione della regione rombencefalica, secondo il normale destino della zona.

È interessante notare come anche negli espianti si verifichi il fenomeno già osservato da Stefanelli [5] nei trapianti: che cioè anche asportando il materiale da un solo lato, il frammento si sviluppa e si regola con la produzione di una parte controlaterale, in genere meno estesa, per cui il frammento assume spesso una forma asimmetrica.

Biofisica. — *Sulla interazione tra semi vegetali in germinazione* [1]. Nota I di F. Bellinzaghi, presentata [2] dal Socio P. Rondoni.

Nel corso di esperienze sulla germinazione e crescita di vegetali da noi intraprese per uno studio comparativo sull'azione biologica di vari fattori di natura elettromagnetica abbiamo notato che durante i primi momenti della germinazione si manifesta tra i semi una reciproca influenza stimolatrice che noi abbiamo denominato genericamente « interazione ».

In particolare la ipotesi di una interazione esercitantesi tra semi posti in notevole numero sullo stesso terreno venne da noi formulata come unica spiegazione del riscontro di una maggiore velocità di germinazione dei semi centrali in confronto di quelli periferici.

Diamo qui pertanto notizia dei dati sinora ricavati su tale argomento.

(5) Per questa e le altre citazioni di Stefanelli vedi: « Acta Acc. Pont. », pp. 135–140, 1945; « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », XX, f. 1–3, 1945; *Hystoria Naturalis*, 1946, f. 3; « Atti Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, pp. 1113 1116. 1946. La Memoria in esteso sui trapianti è in corso di stampa all'Accademia dei Lincei.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Biologia e Zoologia generale della Facoltà medica della Università di Milano.

(2) Nella seduta del 14 dicembre 1946.

Il terreno di semina da noi usato è costituito da quadrati di carta assorbente di cm. 10 × 10, inumiditi con cc. 5 H_2O dist. su cui vengono posti, a distanza di mm. 8 l'un dall'altro, 100 semi di piccole dimensioni (mm. 1–1,5 diametro).

Una capsula Petri di cm. 15 diametro accoglie il terreno coi semi ed il tempo occorrente per disporli sulla carta assorbente non supera i 10 minuti.

Con i semi di Cavolo (*Brassica oleracea*), da noi sinora usati, valutiamo dopo 48 ore dalla semina (massimo di germinabilità a 24°) il numero totale di individui che hanno emessa la radichetta: N_{48} ed il numero relativo di semi germinati nei 5 quadrati che compongono l'area di semina (fig. 1).

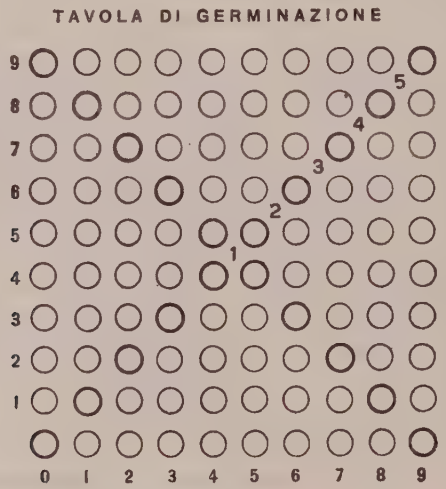


fig. 1.

Abbiamo raccolto in una Tabella i risultati di un lotto di 20 semine scelte a caso fra una cinquantina di esperienze eseguite alla temperatura media di 24° ed in normali condizioni di Laboratorio.

Oltre alla prima colonna, coi numeri d'ordine delle esperienze, sono segnati: il numero dei semi germinati nei tre più interni quadrati: 1+2+3= I, che contano complessivamente 36 semi; il numero dei semi germinati nel quadrato 4 = M che conta 28 semi ed infine il numero dei semi germinati nel quadrato periferico 5 = E, che conta 36 semi.

Già ad un primo esame dei dati raccolti in Tabella è possibile notare la differente velocità di germinazione dei semi interni in confronto di quelli periferici.

Mentre, infatti, nei quadrati I sono germinati complessivamente 254 semi, pari ad una germinazione media $M_I = 12{,}70$ ed a $N^I_{48} = 35{,}27$, nel quadrato periferico E solo 229 semi hanno emessa la radichetta, pari ad una germinazione media $M_E = 11{,}45$ ed a $N^E_{48} = 31{,}80$.

La differenza tra le due germinazioni, esprimibile mediante lo scarto tra il numero medio dei semi germinati in I ed in E: $M_I - M_E =$

= 12,70 — 11,45 = 1,25 non consente una sicura prova della effettiva diversa germinabilità tra i semi centrali ed i semi periferici sulla cui certa conferma deve poggiare la ipotesi della interazione che si esercita tra i semi.

TABELLA.

Numero di semi germinati alla 48ª ora dalla semina di Brassica oleracea. Temp. = 24°.

I *ed* E *di 36 semi,* M *di 28 semi.*

n.	I	M	E
1	12	7	7
2	11	14	11
3	14	12	11
4	12	12	15
5	15	10	14
6	12	11	17
7	12	14	10
8	11	9	13
9	12	13	10
10	18	10	12
11	12	9	10
12	16	10	16
13	13	9	13
14	15	10	9
15	9	8	13
16	8	6	10
17	15	5	12
18	11	14	11
19	10	13	8
20	16	9	7
Totali	254	205	229
Medie	12,70	10,25	11,45
Perc: N_{48} . . .	35,27	36,60	31,80

Abbiamo però a disposizione due argomenti che ci consentono di accettare con molta probabilità tale ipotesi.

Il primo ci è offerto dalla presenza fra i semi I ed E di altri semi M che, supponendo il raggio d'azione delle forze d'interazione efficace sino a distanza $\sqrt{2}$ (considerando unitaria la distanza tra i semi = 8 mm.) devono venir considerati semi « interni » salvo analizzare, in seguito più da vicino, la questione di una azione a maggior distanza di $\sqrt{2}$ definendo i semi M: medi.

Abbiamo perciò coi semi M la possibilità di confrontare direttamente la germinabilità di semi appartenenti allo stesso universo (Interno) e nelle medesime condizioni di esperimento, calcolandone, quindi, lo scarto relativo.

Praticamente essendo i semi M in numero inferiore (28) a quelli dei quadrati I (36) occorre trasformare i dati di M mediante il rapporto $I/M = 36/28 = 1{,}285$ (oppure trasformare i dati di I mediante il rapporto 0,777).

Si ottiene in tal modo:

$$M_{M \times 1{,}285} = 10{,}25 \times 1{,}285 = 13{,}17 .$$

È possibile così confrontare tale media rapportata a 36 semi alla media dei semi germinati nei quadrati I:

$$M_I - M_{M \times 1{,}285} | = 0{,}47 | .$$

Ricordando che lo scarto $M_I - M_E$ è circa tre volte maggiore (1,25) di quest'ultimo, possiamo con molta probabilità stabilire l'appartenenza dei semi I ed E a due universi con differenti velocità di germinazione.

Il secondo argomento a nostra disposizione per la conferma della ipotesi emessa di una maggiore velocità di germinazione dei semi centrali rispetto ai periferici ci è fornita dalla analisi statistica dei dati tabellari.

Mediante le preposizioni della Teoria dei piccoli gruppi e basandoci essenzialmente sulla funzione t di « Student » è possibile ricavare che lo scarto tra le medie di germinazione dei semi interni e dei semi periferici è fortemente significativo per far definitivamente accettare la predetta ipotesi. Si ottiene, infatti, dai calcoli relativi $P = 0{,}999$ essendo $t = 4{,}809$.

Abbiamo eseguito in seguito una serie di esperienze per poter confermare i precedenti risultati ed iniziare lo studio del meccanismo d'azione del fenomeno d'interazione.

È però necessario esporre, prima, le premesse teoriche che ci hanno concesso di elaborare il piano dettagliato di ricerca. Esaminando la disposizione dei semi posti l'un vicino all'altro a germinare e supponendo che ogni seme interagisca coi semi circostanti con intensità unitaria, siamo portati a supporre che con l'aumentare della distanza tra i semi tale intensità di « interazione » decresca secondo una determinata legge.

Ammettendo, ora, per quanto trovato sperimentalmente che l'effetto della interazione sia accelerante i processi di germinazione, possiamo assegnare ad ogni seme posto sul terreno un determinato valore di stimolazione a seconda della sua posizione rispetto ad altri semi.

In particolare supponendo ancora che la forza d'interazione si comporti scalarmente possiamo facilmente arguire che i semi del quadrato periferico E ricevano una minor stimolazione di quella che ricevono i semi dei quadrati interni I e che perciò i primi sono caratterizzati da una minore velocità di germinazione dei secondi.

È per le considerazioni che precedono che abbiamo eseguito una prima esperienza ponendo a germinare con le modalità consuete 72 semi di *Brassica oleracea* per terreno, disposti a formare i tre quadrati interni ed il quadrato periferico escludendo, pertanto i semi intermedi, la cui presenza diminuirebbe la diversità di germinazione dei semi interni e periferici.

Sono stati seminati complessivamente 1440 semi ed i risultati ottenuti sono qui riportati valutando il numero di semi germinati complessivamente alla 48ª ora, alla temperatura media di 24°.

	Semi int. I.	Semi per. E.
Totali	339	282
Medie	16,95	14,10
Perc. N_{48}	45,69	39,16

Anche ad un superficiale esame di questi dati si può trarre il convincimento che la velocità di germinazione dei semi dei quadrati interni I è superiore a quella del quadrato periferico E. Infatti ad una differenza totale tra i semi germinati in I ed in E di 43 semi, fanno riscontro una differenza tra le medie $M_I - M_E = 2,85$ ed una differenza tra le percentuali $N^I_{48} - N^E_{48} = 6,53$.

Lo studio statistico della significatività di tali scarti ci permette di trarre la certezza della differente velocità di germinazione dei due universi e quindi ci dà la possibilità di una sicura dimostrazione della effettiva presenza tra i semi in germinazione di una interazione che in questo caso è stimolante ed accelerante i processi biologici del primo atto della vita vegetale. Dai dati raccolti si ha, infatti, per le notazioni della Teoria dei piccoli gruppi esposta più sopra: $t = 9,07$; $P = 0,999$.

L'elevato valore di $P = 0,999$ permette quindi di confermare con certezza l'ipotesi formulata in principio sulla interazione tra i semi in germinazione.

Biofisica. — *Sulla interazione tra semi vegetali in germinazione*[1]. – II. *Interazione ed energia di posizione.* Nota di F. Bellinzaghi, presentata[2] dal Socio P. Rondoni.

Abbiamo esposto nella precedente Nota un fenomeno manifestantesi in semi vegetali (*Brassica oleracea*), posti a germinare in notevole numero sullo stesso terreno, caratterizzato dalla loro interazione durante i primi momenti della germinazione, ed avente come resultato un abbreviamento del tempo di emissione della radice rispetto ai semi isolati.

Si sono pertanto iniziate ricerche allo scopo di studiare il meccanismo d'azione e la natura di questo fenomeno.

La disposizione dei semi sul terreno che in numero di 100 formano un quadrato di mm. 72 di lato, essendo posti a mm. 8 l'un dall'altro, rende agevole lo studio analitico del problema partendo dalle seguenti premesse:

Si considera come unitaria la distanza tra i semi: $d_u = 8$ mm. Pure unitaria viene considerata la interazione che ad un seme compete quando è posto in vicinanza ad altro seme a distanza $d_u = 8$ mm.

Si riduce pertanto il problema allo studio della funzione:

$$J = f(P) \tag{1}$$

dove con J si indica l'intensità dell'energia d'interazione (Interazione) che un seme P riceve per opera dei semi circostanti.

Ogni seme P_o può venir rappresentato mediante le coordinate X_o, Y_o riferite ad un sistema cartesiano ancorato ad un vertice del quadrato formato dai cento semi.

Così può dirsi per l'interazione propria d'un seme: per la (1) questa è funzione di P e quindi:

$$J = f(P_{X_o Y_o}) = J_{X_o Y_o}. \tag{2}$$

Ogni seme interagisce con i rimanenti 99 ricevendone una stimolazione che supponiamo inversamente proporzionale al quadrato della distanza.

Analiticamente l'interazione tra i semi P_o e P_1 può venir così rappresentata:

$$J_{P_o - P_1} = \frac{1}{\sqrt{(X_o - X_1)^2 + (Y_o - Y_1)^2}^2} = \frac{1}{(X_o - X_1)^2 + (Y_o - Y_1)^2} \tag{3}$$

dove con: $\sqrt{(X_o - X_1)^2 + (Y_o - Y_1)^2}$ si indica la distanza $P_o - P_1$ essendo come premesso:

$$P_{o+1} - P_o = 1 \quad , \quad J_{P_{o+1}} - J_{P_o} = \frac{1}{1^2} = 1 .$$

(1) Lavoro eseguito nella Sezione biofisica dell'Istituto di Patologia Generale della Università di Milano.

(2) Nella seduta dell'11 gennaio 1947.

Possiamo genericamente rappresentare l'interazione che un seme $P_{X_0 Y_0}$ subisce da uno dei restanti 99 semi mediante la seguente espressione:

$$(4) \qquad J_{P_0-P} = \frac{1}{(X_0 - X)^2 + (Y_0 - Y)^2} .$$

La interazione totale che il seme $P_{X_0 Y_0}$ riceve dai rimanenti 99 semi può esser perciò rappresentata dalla seguente relazione:

$$(5) \qquad J_{P_0} = \sum_{0,0}^{r_0, s_0} {}_{r,s} \frac{1}{X_r^2 + Y_s^2} + \sum_{0,0}^{9-r_0, 9-s_0} {}_{r,s} \frac{1}{X_r^2 + Y_s^2}$$

che sviluppata dà per ognuno dei cento semi un determinato valore di interazione.

È in tal modo possibile ricavare il valore di J per tre semi caratteristici:

il seme di vertice $P_{0,0}$

il seme periferico $P_{0,Y}$ o $P_{X,0}$

il seme interno $P_{X,Y}$.

Si ottiene pertanto dalla (5):

$$J_{0,0} = 4{,}57$$
$$J_{0,Y} = 5{,}76$$
$$J_{X,Y} = 9{,}27 .$$

Questi valori mostrano chiaramente come il seme interno riceva una stimolazione notevolmente superiore a quella dei semi di vertice e periferico.

Proseguendo nello studio analitico è interessante ricavare il valore di interazione medio dei cento semi: J_M.

Dalla (5) si può calcolare per tutti i cento semi l'interazione totale che può esprimersi mediante la relazione seguente:

$$(6) \qquad J_{100} = \sum_{0,0}^{9,9} {}_{r,s} \left(\sum_{0,0}^{r_0, s_0} {}_{r,s} \frac{1}{X_r^2 + Y_s^2} + \sum_{0,0}^{9-r_0, 9-s_0} {}_{r,s} \frac{1}{X_r^2 + Y_s^2} \right)$$

si ha perciò:

$$(7) \qquad J_M = \frac{1}{100} J_{100}$$

e con sufficiente approssimazione:

$$(8) \qquad J_M = \frac{1}{100} (4 J_{00} + 32 J_{0Y} + 64 J_{XY})$$

$$= \frac{1}{100} (4 \cdot 4{,}57 + 32 \cdot 5{,}76 + 64 \cdot 9{,}27) = 5{,}958 .$$

Possiamo così concludere che cento semi posti a germinare sullo stesso terreno, nelle note condizioni, interagiscono tra di loro con una $J_M = 5.958$; il che equivale a dire che gli stessi cento semi corrispondono per ciò che riguarda l'interazione a due semi posti a distanza di mm. 3,2 l'un dall'altro.

Infatti, per quanto premesso, dev'essere $J = \frac{1}{d^2}$ da cui si ricava $d = 0{,}409$ e ricordando che $d_u = 8$ mm. si ottiene alfine $d = 3{,}2$ mm.

Quest'ultimo risultato: $J_M = 5{,}958$ ci dà l'indicazione per un primo controllo della validità della ipotesi emessa sul meccanismo d'azione dell'energia d'interazione.

Esponiamo il procedimento da noi usato:

Essendo la velocità di germinazione (G) proporzionale alla intensità d'interazione ed avendo constatato sperimentalmente che la funzione relativa: $G = f(J)$ è continua e crescente entro i normali limiti d'esperienza, dovrà senz'altro valere la seguente diseguaglianza:

$$G_{J_1} < G_{J_2} < G_{J_3} \quad \text{dove} \quad J_1 < J_2 < J_3$$

ed essendo ancora $J = f\left(\frac{I}{d^2}\right)$ dovrà parimenti valere la seguente diseguaglianza:

$$(9) \qquad {}^2N_{48}^{d_1} > {}^2N_{48}^{d_2} > {}^2N_{48}^{d_3} \quad \text{dove} \quad d_1 < d_2 < d_3$$

dove con ${}^2N_{48}^{d}$ si rappresenta il numero di semi germinati (d. p. p. a G) su cento alla 48ª ora dalla semina in capsule contenenti due semi a distanza d l'un dall'altro (ove d è espresso in millimetri).

Ricordando ora che per la (8) è

$$(10) \qquad {}^{100}N_{48}^{8} = {}^2N_{48}^{3{,}2}$$

l'ultima diseguaglianza precedentemente scritta può così venir modificata, ponendo

$$d_1 = 1 \qquad d_2 = 3{,}2 \qquad d_3 = 5 \qquad d_4 = \infty$$

$$ {}^2N_{48}^{1} > {}^2N_{48}^{3{,}2} > {}^2N_{48}^{5} > {}^2N_{48}^{\infty}$$

ossia:

$$ {}^2N_{48}^{1} > {}^{100}N_{48}^{8} > {}^2N_{48}^{5} > {}^2N_{48}^{\infty}.$$

abbiamo eseguito per la valutazione di ${}^2N_{48}^{d}$ un primo lotto di saggio ponendo due semi a distanza di mm.: 1 , 5 , ∞ in capsule di 9 cm. diam. su carta assorbente con 2 cc. H_2O dist. Per la valutazione di ${}^{100}N_{48}^{8}$ abbiamo usato la consueta tecnica. Ecco i dati relativi ad un lotto di complessivi 4.000 semi:

$$ {}^2N_{48}^{1} = 41 \qquad {}^2N_{48}^{5} = 37{,}1 \qquad {}^2N_{48}^{\infty} = 30.8 \qquad {}^{100}N_{48}^{8} = 38{,}2 .$$

Come si vede è senz'altro possibile con questi dati confermare la diseguaglianza (9).

Si ha infatti:

$$ {}^2N_{48}^{1} > {}^{100}N_{48}^{8} > {}^2N_{48}^{5} > {}^2N_{48}^{\infty}$$

$$41 > 38{,}2 > 37{,}1 > 30{,}8 .$$

Si può perciò concludere che con molta probabilità è valida la relazione (10) dandoci una prima conferma delle ipotesi formulate sul meccanismo d'azione della energia d'interazione.

Biologia. — *Malformazioni cefaliche in embrioni di Anfibi, con particolare riguardo ad esperienze di röntgen–irradiazione*[1]. Nota di T. Perri, presentata[2] dal Corrisp. G. Cotronei.

Nel corso di precedenti ricerche[3] sugli effetti dei raggi X su embrioni di Anfibi, osservai alcune interessanti malformazioni cefaliche, che ritengo opportuno riferire qui a parte, perchè insieme con la suscettibilità differenziale ai raggi X (scopo principale di quelle esperienze) richiedono l'esame di altri fattori, cioè delle condizioni spaziali di Cotronei, come dirò tra poco esponendo i risultati raggiunti.

Un'importante questione è da tener presente. Numerosissime ricerche avevano fatto concludere, pur con qualche dissenso, che gli effetti su uova ed embrioni dei vari agenti perturbatori dello sviluppo non erano specifici. Particolarmente il Newman (1908) insistette su questo concetto, osservando che svariatissime sostanze chimiche, ibridazioni eterospecifiche, basse temperature, conducono ad uguali risultati di mostruosità. Cotronei notò trattarsi di una legge generale dello sviluppo, poichè anche il radio produce simili malformazioni. È da osservare che ciò non rende inutile estendere queste ricerche a nuove specie, tanto più che sono poche quelle comparativamente cimentate con svariati agenti sperimentali, con la mente vigile sia alle somiglianze che alle differenze: si pensi, ad esempio, che il radio ed i raggi X hanno un'azione a distanza di tempo che non si verifica in altri casi. In tal modo la conoscenza dell'intero problema non potrà che avvantaggiarsene.

In questo lavoro, che mi riprometto di completare quanto più mi sarà possibile, mi riferisco per *Bufo viridis* ad esperienze di röntgen–irradiazione e di ibridazioni *B. viridis* ♀ × *B. vulgaris* ♂; e per *B. vulgaris* ad esperienze di röntgen–irradiazione, di ibridazioni *B. vulgaris* ♀ × *B. viridis* ♂, di temperature elevate e vicine alle letali, e tengo inoltre presenti le esperienze di Cotronei[4] sull'azione del LiCl nella stessa specie.

Esperienze su Bufo viridis. – Irradiando con raggi X[5] embrioni di *B. viridis* allo stadio di bottone codale (come già dissi nella mia Nota

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata dell'Università di Roma.

(2) Nella seduta dell'8 febbraio 1947.

(3) « Acta », vol. VIII, 1945; vol. IX, 1946.

(4) Questi « Rendiconti », vol. XXIV, 1° sem., 1915; vol. XXIV, 2° sem., 1915; vol. XXVIII, 2° sem., 1919, p. 206 e p. 511; vol. XXX, 1° sem., 1921; vol. XXX, 2° sem., 1921; *Ric. di Morf.*, vol. II, 1921; « Riv. di Biol. », vol. III, 1921; « Arch. Ital., de Biol. », vol. LXXI, 1921; Questi « Rendiconti », vol. XXXI, 1° sem., 1922, p. 433 e p. 473.

(5) Tecnica d'irradiazione, sia per *B. viridis* che per *B. vulgaris*: tubo Original Müller: tensione di 40.000 volt; intensità di 3 milliampère; senza alcun filtro; distanza embrioni–anticatodo di cm. 21,5; gli embrioni erano tenuti in una vaschetta di vetro con uno strato di acqua comune alto mm. 4.

del 1946) o di neurula, si ottiene spesso la formazione di due profonde fessure, che dalla regione boccale giungono alla cavità olfattoria.

Irradiando in detti stadi (quelli più giovani non li ho ancora esaminati) con opportune dosi di raggi, da 30 a 60 minuti primi, frequentemente si osserva dapprima un lieve solco che dalla fossetta olfattoria va fino alla regione della futura bocca. Osservando in tempi successivi questi casi, si nota che il solco va generalmente approfondendosi fino a formare una stretta fessura; contemporaneamente si ha, come per l'azione del LiCl su *B. vulgaris* (Cotronei), la migrazione in avanti ed in alto del vestibolo boccale. Il solco, e successiva fessura, possono essere uni o bilaterali; solo qualche volta ho visto regredire il processo già avviato. Nei casi tipici (v. fig. 1 *a*) la parte compresa tra le due fessure si stende in avanti ed assume l'aspetto di un rostro. Questo si continua con il resto della testa in corrispondenza degli abbozzi olfattori; nel suo interno si differenziano formazioni cartilaginee; alla sua estremità libera vi sono elementi del vestibolo boccale in notevole atrofia: è una formazione ben diversa dalle « proboscidi » ottenute in *B. vulgaris*. Il differenziamento delle altre parti, sia cefaliche che del rimanente organismo, è in rapporto con la quantità somministrata di raggi, i cui effetti, com'era da attendersi, sono presenti.

Una simile formazione a rostro era stata già riscontrata dal Montalenti [6] in ibridi *B. viridis* ♀ × *B. vulgaris* ♂; recentemente [7] in ricerche sugli stessi ibridi ne osservai anch'io vari casi. La somiglianza è molto spinta: solo da notare che a volte negli ibridi le due fessure giungono più indietro, sino ad oltrepassare benchè di poco la zona olfattoria, nel rostro viene così a trovarsi una parte dell'encefalo anteriore.

Qual'è il significato di tale malformazione ? Io credo che occorra riferirsi al solco oro–nasale già descritto [8] sia in Anfibi che in Amnioti come una formazione transitoria nello sviluppo. Interpreto cioè che detta malformazione significhi il diventare più evidente e persistente di una condizione che nello sviluppo è transitoria; la causa immediata è l'inibizione dovuta ai raggi X, rispettivamente all'ibridazione eterospecifica. Si conoscono già da tempo malformazioni interpretate appunto come il fissarsi di condizioni che sono normali in altre specie o in un dato momento dello sviluppo.

Esperienze su Bufo vulgaris. – In questa specie, pur avendo irradiato in tutti gli stadi, da pochi blastomeri a larva, e con varie quantità di raggi, non ho mai osservato una struttura a rostro come in *B. viridis*, nè mi risulta che vi sia stata descritta in altre esperienze.

In *B. vulgaris*, irradiando in stadi giovani fino a tappo vitellino, ho invece ottenuto reperti che si ricollegano con quelli al litio. O. Hertwig, (1911), trattando con radio alcuni stadi giovanissimi di *Rana*, notò che il

(6) « Physiol. Zöol. », vol. VI, 1933.

(7) Questi « Rendiconti », vol. I, serie VIII, 1946.

(8) V. ad esempio: K. Peter in O. Hertwig, *Hand. d. Entwickelungslehre*, vol. II, p. 11, Jena, 1906; e E. Matthes in *Hand. d. vergl. Anatomie*, vol. II, Berlin, 1934.

loro comportamento era simile a quello ottenuto con altri sali, anche di litio. Cotronei, nel 1921, quando le conoscenze sull'azione dei vari agenti perturbatori dello sviluppo avevano fatto notevolissimi progressi, potè adeguatamente comparare i risultati ottenuti (anche con il radio) concludendo che «i più svariati agenti sperimentali possono convergere nei medesimi effetti morfogenetici» e riconobbe in questo, come ho già detto, una legge generale dello sviluppo. Pasquini (9), studiando l'azione del radio su embrioni di *Rana esculenta*, ha particolarmente insistito sull'importanza dello stadio d'irradiazione nel determinarsi di alterazioni morfogenetiche; venendo così ad estendere al radio quanto già Cotronei aveva posto in risalto per l'azione dei vari sali sullo sviluppo.

Mi pare tuttavia che i risultati ch'io ho ottenuto presentino un certo interesse, anche perchè gli effetti dei raggi X su questa specie furono

a) *b*)

Fig. 1 – *a*) *Bufo viridis* trattato con raggi X allo stadio di bottone codale.
b) Testa di *Bufo vulgaris* trattato con raggi X allo stadio di gastrula.

poco studiati. Ho esaminato microscopicamente 9 casi con evidenti malformazioni e tenuti in vita 11–15 giorni; altri andarono perduti prima che li fissassi. Le malformazioni sono costituite da inibizione dell'encefalo precordale; con abbozzi olfattori spesso fusi; con vestibolo boccale inibito sino a formazione di proboscide (v. fig. 1 *b*); con frequente anoftalmia (5 casi) con residui di solo pigmento, anche quando gli abbozzi olfattori sono separati e discretamente sviluppati, oppure monoftalmia asimmetrica, oppure fusione degli abbozzi; le otocisti sono sempre presenti e distanziate come nel normale; corda normale; differenziamento intestinale quasi sempre assai scarso.

Il Cotronei (dal 1915 in poi) si è ampiamente occupato dall'azione del LiCl su *Bufo vulgaris*, dimostrando che ne risulta un'inibizione dell'encefalo precordale; conseguentemente si stabiliscono deficienze spaziali che influiscono inibendo lo sviluppo degli altri organi precordali, onde la loro inibizione di sviluppo; il grado delle lesioni diminuisce dall'avanti all'indietro, epperciò più colpiti sono il vestibolo boccale e gli abbozzi olfattori. Nei

(9) «Arch. Zool. Ital.», vol. XVI–I, 1930, p. 501.

miei casi, già *a priori* era da attendersi una sovrapposizione delle conseguenze delle deficienze spaziali, per l'inibizione di sviluppo del cervello a causa dell'irradiazione, con gli effetti che sono più particolari a detta irradiazione. Il coesistere dell'anoftalmia con abbozzi olfattori discretamente sviluppati non è in contradizione con i reperti di Cotronei; ma è in accordo con il fatto che nella röntgen–irradiazione gli abbozzi ottici di *B. vulgaris* si mostrano molto sensibili, più che in *Rana esculenta*. Ciò risulta da un complesso di mie rieerche d'irradiazione, nelle due specie, di embrioni e di larve; di trapianti da embrione irradiato su normale; e, con maggiore evidenza, da larva irradiata su normale, che per *Rana esculenta* consigliai alla sig.na N. Frontali [10] e per *B. vulgaris* a F. Chelli, ambedue di questo Istituto.

L'avvicinamento e fusione degli abbozzi olfattori e degli ottici dipende certamente, come appunto dimostrò Cotronei nelle larve al litio, dalla mancanza delle parti normalmente intermedie.

Effetto particolare ai raggi X, e che non si riscontra nelle larve al litio (Cotronei, Guareschi), è l'aver trovato nell'encefalo piccole zone di necrosi: con tutta probabilità, e in accordo con i risultati di precedenti autori, l'azione dei raggi X si è manifestata dapprima con fenomeni inibitori dello sviluppo e, a distanza di tempo, con fatti necrotici [11]. Lo scarso differenziamento della massa intestinale è parimenti una conseguenza dell'irradiazione.

Ho già detto essere mia intenzione comparare varie condizioni sperimentali. Eseguendo l'ibridazione *B. vulgaris* ♀ × *B. viridis* ♂ (potei per ora eseguirla una volta sola) ottenni, su moltissimi embrioni ibridi a sviluppo regolare, vari casi di malformazioni. Queste consistono in inibizione dello encefalo, specie nella sua parte precordale; avvicinamento e fusione degli abbozzi olfattori; riduzione del vestibolo boccale sino a formazione di proboscide; avvicinamento e fusione degli abbozzi ottici, accanto a casi di anoftalmia (con residui di solo pigmento) e di monoftalmia asimmetrica; le otocisti sono sempre meglio conservate ma talora spostate ventralmente e saldate sulla linea mediana. In alcuni casi di forte inibizione anche la corda è inibita fino ad essere mancante del tutto o in vari tratti; anche il midollo spinale può essere inibito; la massa intestinale è sempre pochissimo differenziata.

(10) Questi « Rendiconti », vol. I, serie VIII, 1946.

(11) Mentre nelle esperienze sopradette trattando stadi molto giovani con dosi relativamente piccole di raggi X si sono avuti fatti d'inibizione; invece, sperimentando in stadi più avanzati e con dosi relativamente maggiori, si hanno, com'era da attendersi per i risultati di precedenti autori, fatti necrotici di notevole intensità. Infatti, in *Rana esculenta*, trapiantando la parte anteriore della testa di embrione, trattato con opportune dosi di raggi X allo stadio di neurula, su embrione normale; ho notato che gran parte dell'encefalo, specie la parte anteriore, va distrutta mentre gli abbozzi olfattori e gli ottici essendo più resistenti si differenziano, e per le condizioni spaziali poste in rilievo da Cotronei vengono tra loro a contatto.

Come si vede, anche in queste ibridazioni si ripetono condizioni molto simili che nelle larve al litio e nelle irradiazioni. Alcuni punti possono sembrare contradittori, ma non lo sono. Nelle ricerche di Cotronei le lesioni interessano solo la parte precordale della larva; ma egli ha esaminato, come esplicitamente dice più volte, le larve che come limite erano giunte a consumare tutto il loro tuorlo, tralasciando quindi gli embrioni morti assai prima; e certamente è qui da ricercarsi (e questa è l'opinione che il prof. Cotronei mi ha personalmente espresso) il motivo delle differenze con i risultati ottenuti da Lehman, che sperimentando con il LiCl su embrioni di Anfibi ottenne inibizione della corda. Anche nei miei casi di ibridazione trattasi di embrioni che erano ben lontani dall'aver consumato tutto il loro tuorlo, che anzi rimase in notevolissima quantità; erano in condizione da non poter proseguire nello sviluppo embrionale.

Ricordo infine di aver iniziate ricerche tenendo embrioni giovanissimi di *B. vulgaris* a temperature elevate e prossime alle letali. Molti casi che si annunziavano interessanti putroppo morirono prima che potessi analizzarli sufficientemente. Ho ottenuto per ora alcuni casi d'inibizione dello encefalo precordale e conseguente fusione degli abbozzi olfattori; e un caso con notevole inibizione dell'encefalo precordale, con vestibolo boccale inibito e formazione di breve proboscide, assenza di abbozzi olfattori ed ottici; le lesioni sono limitate alla parte precordale della larva. Appaiono già notevolissime le somiglianze con le larve al litio.

Mi limito a far risaltare solo alcuni punti.

In *B. viridis* si è ottenuta una formazione a rostro sia in casi d'irradiazione che di ibridazione eterospecifica. In *B. vulgaris* i diversi agenti inibitori dello sviluppo che ho cimentato, hanno condotto a risultati fondamentalmente simili tra loro, e a quelli ottenuti con il litio nella stessa specie (Cotronei); pur con differenze che saranno meglio valutate in seguito. Da notare che in *B. vulgaris* non si è mai ottenuta una formazione a rostro come in *viridis*: ciò mostra l'influenza sul risultato finale di complesse caratteristiche legate ad una determinata forma.

Un'altra questione va segnalata. Negli ibridi tra *viridis* e *vulgaris*, si hanno le alterazioni del *viridis* quando l'uovo è di *viridis*, e quelle più proprie al *vulgaris* quando l'uovo è di *vulgaris*. Questo punto mi sembra meritevole di particolari indagini, tenendo presenti i casi ben noti in genetica di trasmissione di alcuni caratteri solo attraverso l'uovo, rispettivamente lo spermio.

Conclusioni:

Sperimentando con agenti perturbatori dello sviluppo (raggi X, ibridazione eterospecifica):

1° in *Bufo viridis* si è ottenuta una formazione a rostro determinata dal costituirsi di due profonde scissure oro–nasali;

2° in *Bufo vulgaris* si sono ottenuti reperti di inibizioni che ricordano quelli ottenuti con il litio nella stessa specie (Cotronei).

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente comunica che hanno ringraziato per la nomina a membri dell'Accademia i Soci Nazionali: Paolo Dore, Gino Loria, Giovanni Negri, Modesto Panetti, Alberto Pelloux, Umberto Pierantoni, Luigi Rolla e i Soci Corrispondenti: Edoardo Amaldi, Michele Cipolla, Giulio Natta, Ettore Onorato, Carlo Perrier, Giovanni Sansone, Mario Tenani, Alessandro Trotter.

Il Presidente annunzia la morte avvenuta a Parigi il 19 dicembre dell'illustre fisico Paolo Langevin che era Socio straniero della nostra Accademia dal settembre 1921. Il Langevin lasciò l'impronta del suo ingegno acuto e chiarissimo in molti campi della fisica. Fondamentali le sue ricerche sul magnetismo. Portò importanti contributi alla teoria della relatività, e prima di Einstein aveva intuito la equivalenza tra massa ed energia. Una applicazione degli ultrasuoni alla ricerca dei sommergibili accrebbe la sua fama durante la prima guerra mondiale. Il Langevin, per la sua mentalità, per i suoi metodi di lavoro, apparteneva alla scuola della Fisica classica, ma con la sua opera di ricercatore e di insegnante preparò il terreno allo sviluppo della fisica atomica.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente comunica che la Commissione incaricata di organizzare il convegno sugli *Ultravirus* si è riunita ed ha deciso che la discussione sull'argomento abbia luogo all'Accademia venerdì 9 maggio. Per la parte biologico-patologica sono stati prescelti quali relatori i Soci Rondoni e Puntoni e per la parte fisico-chimica il prof. Gino Bozza del Politecnico di Milano.

Riferisce quindi che sabato 10 maggio il Socio Rondoni terrà una conferenza sul tema: « Nuovi agenti curativi: chemioterapia e antibiotici ».

Il Presidente dà quindi lettura di un ordine del giorno dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna relativo al preteso divieto per l'Italia, in sede di trattato di pace, di qualsiasi studio o realizzazione aventi attinenza con l'energia atomica.

Il Presidente comunica alla Classe che il sopra citato ordine del giorno, approvato dall'Accademia di Bologna nella seduta del 26 gennaio 1947, comunicatogli dal Presidente dell'Accademia stessa con lettera del giorno successivo, l'aveva dolorosamente colpito, giacchè sembrava inammissibile che si potesse proibire ogni ricerca di fisica nucleare in Italia, che allo sviluppo di tali studi ha dato così valido incremento. Ha voluto pertanto assicurarsi quali siano effettivamente le clausole del trattato di pace che riguardano l'energia atomica e gli è stato possibile venire a conoscenza del testo dell'art. 51 del trattato stesso, che tratta dell'argomento. Dà quindi lettura di tale articolo e constatato che, fortunatamente, le restrizioni non colpiscono la ricerca scientifica pura, ritiene ormai inutile che l'Accademia dei Lincei si associ all'ordine

del giorno dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, e propone che ne sia data comunicazione alla predetta Accademia trasmettendole in pari tempo copia del testo del sopra citato art. 51.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note i Soci: Abetti, Bompiani, Cotronei, Krall, Picone, Puntoni, Rolla, Signorini e Vernoni.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

AMERIO A., « Nuovo metodo per misurare la velocità della luce ».

KRALL G., « Statica dei mezzi elastici cosidetti « viscosi » e sue applicazioni ».

KRALL G., « Sulla formazione delle nebulose extra galattiche ».

BAIADA E., « Le approssimazioni nella risoluzione delle equazioni differenziali ordinarie. Nota I: Teorema d'esistenza » (pres. dal Corrisp. G. SANSONE).

BAIADA E., « Le approssimazioni nella risoluzione delle equazioni differenziali ordinarie. Nota II: Applicazioni » (pres. dal Corrisp. G. SANSONE).

BIOCCA E. e NOBREGA P., « Conservazioni sull'immunità nella toxoplasmos » (pres. dal Corrisp. V. PUNTONI).

BIRINDELLI C., « Nuova trattazione di problemi al contorno di una striscia per l'equazione di Laplace in due variabili » (pres. dal Socio M. PICONE).

BONETTI E. e SCAPELLATO L., « Le variazioni del tasso ematico di acido piruvico nella febbre » (pres. dal Corrisp. G. VERNONI).

FERRARI C., « Sulla teoria delle schiere di profili alari » (pres. dal Socio M. PANETTI).

GROSSETTI E., « Sull'assorbimento delle onde ultrasonore da parte di miscugli di liquidi viscosi ». Nota II (pres. dal Socio A. CARRELLI).

IANDELLI A., « Le leghe fra preseodimio e indio » (pres. dal Socio L. ROLLA).

MARCHESONI V., « Aspetti ecologici e fitogeografici della vegetazione algologica delle regioni desertiche libiche » (pres. dal Socio G. GOLA).

MAZZA L., « Un metodo di lettura rapido e preciso degli spettri mediante l'associazione simultanea e coincidente di scale uniformi a grande numero di tratti » (pres. dal Socio L. ROLLA).

MONTEROSSO B., « Note araneologiche – XXIV – Nuovi dati e considerazioni sulla partenogenesi naturale degli Araneidi » (pres. dal Socio A. RUSSO).

MORETTI G., « Turbolenza nelle scie piane » (pres. dal Socio M. PANETTI).

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Accademico presenta alla Classe le pubblicazioni pervenute in omaggio all'Accademia, tra le quali un opuscolo per il Cinquantennio

della laurea di A. Ghigi, un esemplare della pubblicazione del Politecnico di Milano per l'inaugurazione dell'anno accademico 1946–47, e un esemplare della pubblicazione «Conferenza per la radio e la radar–navigazione» del Ministero dell'Aeronautica.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta dell'8 febbraio 1947

GHIGI ALESSANDRO. — *Nel cinquantennio della laurea 1896–1946*. Bologna, Tip. Compositori, 1946. Pp. 26, in 8°.

MINISTERO DELL'AERONAUTICA. — *Conferenza per la radio e la radar–navigazione.* Roma – aprile 1946). Roma, Stabilimento fotomeccanico, 1946. Pp. 148, in 4°, con figg. e tavv.

POLITECNICO DI MILANO. — *Inaugurazione dell'anno accademico 1946–47*. Milano, Stamp. Tamburini, 1946. Pp. 29, in 8°.

U. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta dell'8 marzo 1947

Presidenza del Socio G. CASTELNUOVO

NOTE DI SOCI

Astronomia. — *Sulla formazione delle Galassie.* Nota [1] del Corrisp. G. KRALL.

In una suggestiva Nota su questi «Rendiconti» [2] il prof. Armellini ha riagitato il problema, invero notevole, inerente alla formazione delle nebulose extragalattiche, brevemente delle Galassie; si vuol alludere a quegli ammassi stellari aventi forma pressochè lenticolare, ultimi o quasi ultimi aspetti della evoluzione di una nube cosmica ellissoidica costituita da un gas estremamente rarefatto.

Il concetto che informa quella Nota è il seguente: un nucleo di condensazione sfugge alle leggi cinetiche e dinamiche cui sottostà una molecola di un gas; è soggetto ad una forza di cui le componenti secondo una terna x , y , z coincidente con gli assi dell'ellissoide, sono di tipo elastico (proporzionali alle coordinate).

Il moto secondo x , rispettivamente y , z sarebbe armonico ove la massa restasse costante. Ma, come la goccia d'acqua che si muove in un'atmosfera di vapore saturo aumenta la propria massa, così fa il nucleo di condensazione; le equazioni del moto si esprimono allora secondo quella *Lex Secunda* di Newton, che informa – o spirito profetico di quel grande – la dinamica relativistica e tanti attuali problemi del volo stratosferico et ultra,

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{\mathfrak{F}}$$

(1) Presentata nella seduta dell'8 febbraio 1947.

(2) G. ARMELLINI, *Sul II problema centrale della Cosmogonia*, questi «Rendiconti», fasc. V, 1946.

e non già nella forma, divenuta abituale, per i sistemi a masse costanti,

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\mathcal{F}}.$$

Per $m = m(t)$ crescente, risultano in linea qualitativa moti oscillatori smorzati, quindi la generale condensazione.

Ne segue che una iniziale anche trascurabile velocità di rotazione della nebulosa si rende, per la costanza del momento delle quantità di moto e per la diminuzione del momento d'inerzia, senz'altro sensibile. Allora le equazioni del moto della particella condensata si modificano, come si conviene, in presenza di assi rotanti.

Dette equazioni dànno una soluzione particolare, *che si presume stabile*, $r = \text{cost.}$ ($r =$ distanza dall'asse rotazione coincidente con l'asse minore dell'ellissoide), $\omega = \text{cost.}$ ed una oscillatoria, smorzata per $m = m(t)$ crescente, normale al piano equatoriale. L'ellissoide si schiaccia, si forma la Galassia.

Leggendo queste pagine il pensiero di un cultore di Meccanica non può non ricorrere, da un lato alla diversa spiegazione che del fenomeno fu data dal Poincarè nelle sue celebri *Leçons sur le Hypothèses cosmogoniques* (3), dall'altro, all'utilità che pur possono avere nella questione quelle nozioni di *invarianti adiabatici* e di *soluzioni stazionarie* così fecondamente introdotte dal Levi-Civita in Meccanica celeste (4).

Seguono allora alcune considerazioni che, or che il problema è riaperto, e così autorevolmente, mi sembra opportuno esporre. Del resto, il prendere il problema sotto punti di vista differenti è certamente consigliabile, poichè, in verità, quanto avviene in una nebulosa cosmica è bene schematizzare in vari modi e, per quanto si può, tra loro estremi.

§ 2. – Generalizzazione della spiegazione secondo Poincarè attraverso la nozione di invariante adiabatico e nell'ipotesi di una eventuale azione dissipativa a carattere viscoso. — L'ellissoide che limita la nube originaria sia a tre assi che penseremo coincidenti con una terna ortogonale x, y, z. Le forze di richiamo al centro O secondo x, y, z sono del tipo elastico $-\alpha^2 x$, $-\beta^2 y$, $-\gamma^2 z$. Agiscono eventualmente resistenze viscose $-2h_1\dot{x}$, $-2h_2\dot{y}$, $-2h_3\dot{z}$.

Le equazioni del moto di un punto di massa sono allora

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + 2h_1\dot{x} + \alpha^2 x = 0, \\ &\ddot{y} + 2h_2\dot{y} + \beta^2 y = 0, \\ &\ddot{z} + 2h_3\dot{z} + \gamma^2 z = 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Ora conviene qui premettere la nozione di invariante adiabatico.

(3) H. Poincarè, *Léçons sur les Hypothèses cosmogoniques*. Hermann, Paris 1913.

(4) T. Levi-Civita, *Applicazioni astronomiche degli invarianti adiabatici*. « Atti Congresso Int. dei Matematici », Bologna 1928; Zanichelli, Bologna 1930.

Consideriamo un generico sistema canonico,

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad , \quad \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}$$

a funzione caratteristica $\mathcal{H}(p, q \mid a)$ indipendente dal tempo e dipendente in modo adiabatico — da quanti si vogliono parametri a lentamente variabili.

Supponiamo che, oltre all'integrale dell'energia

$$\mathcal{H} = \mathcal{E}$$

il sistema ammetta, quando le a si suppongano rigorosamente costanti, $n-1$ integrali quadratici tipici dei sistemi a variabili separabili, $F_l = c_l$, $(l = 1, 2, \cdots, n-1;)$.

Orbene, se si pone $\mathcal{H} = F_0$, $\mathcal{E} = c_0$ e le linee

$$F_l = c_l \qquad (l = 0, 1, 2, \cdots, n-1;)$$

risultano chiuse per le $q_1, q_2, \cdots, q_n$ considerate comunque variabili, le aree da esse racchiuse sono invarianti (adiabatici) rispetto alle a.

Il teorema, dovuto a Sommerfeld–Burgers, è stato generalizzato al caso dell'esistenza di integrali in involuzione da T. Levi–Civita.

Le variabili x, y, z risultano separate nel sistema (1). Per $h = 0$ si hanno allora senz'altro i classici *invarianti adiabatici assoluti* del Sommerfeld [5] sopracitati,

$$(2) \qquad A^2\alpha = \text{cost.} \quad , \quad B^2\beta = \text{cost.} \quad , \quad C^2\gamma = \text{cost.}$$

A, B, C essendo le massime ampiezze iniziali.

Per $h \neq 0$ si hanno invece soltanto *invarianti adiabatici relativi* che secondo la teoria generale del Geppert [6] si scrivono

$$(2a) \qquad A^2\left(1-\frac{h_1^2}{\alpha^2}\right)\cdot\alpha = \text{cost.} \quad , \quad B^2\left(1-\frac{h_2^2}{\beta^2}\right)\cdot\beta = \text{cost.} \quad , \quad C^2\left(1-\frac{h_3^2}{\gamma^2}\right)\cdot\gamma = \text{cost.}$$

Il *relativo* essendo inteso nel senso che si richiede per il sussistere delle (2a) una variazione lenta dei parametri per la quale $h_1^2 : \alpha^2$, $h_2^2 : \beta^2$, $h_3^2 : \gamma^2$ restino costanti. In linea di apprezzamento, per dissipazioni proporzionali alla frequenza, questa ipotesi è accettabile. In caso diverso, non resta che rifarsi alle (2). Si noti che gli *invarianti adiabatici* (2a) *dell'oscillatore smorzato*, non dovrebbero sussistere *a priori* secondo il teorema di Gibbs Hertz [7]; da ciò il loro carattere *relativo*.

(5) T. LEVI-CIVITA, *Sugli Invarianti adiabatici.* « Atti Congresso Int. dei Fisici », Como 1927; Zanichelli, Bologna 1928.

(6) H. GEPPERT, *Sugli invarianti adiabatici di un generico sistema differenziale.* Note I, II, III in questi « Rendiconti », 2° sem. 1928.

(7) Op. cit. in (5).

Ora si ha classicamente [8], se a, b, c sono i semiassi, ove si ponga,

$$s = \frac{a^2}{b^2} \quad , \quad t = \frac{a^2}{c^2}$$

$$(3) \qquad \alpha^2 = 2\pi\mu \int_0^\infty \frac{du}{(1+u)\Delta} \quad , \quad \beta^2 = 2\pi\mu s \int_0^\infty \frac{du}{(1+su)\Delta} \quad ,$$

$$\gamma^2 = 2\pi\mu t \int_0^\infty \frac{du}{(1+tu)\Delta}$$

con

$$\Delta = \sqrt{(1+u)(1+su)(1+tu)}$$

e μ densità specifica.

Dalle (3) segue che, se per una causa imprecisata l'ellissoide si schiaccia e quindi s e t decrescono, α, β, γ crescono ed α cresce più rapidamente di β e γ. In conformità risulta che, per le (2) o (2 *a*), A, B, C calano ed A cala più sensibilmente di B e C. Ciò che vale per un punto particolare vale per ogni punto della nebulosa; l'ellissoide continua a schiacciarsi; si genera la forma lenticolare galattica.

Nessun dubbio che sotto la assai generale nozione di trasformazione adiabatica dei parametri del sistema, si nasconde in ogni caso una degradazione dell'energia meccanica del sistema.

3. – Applicazione della nozione di soluzione stazionaria secondo Levi-Civita [9]. — Nella nube cosmica non tutti gli urti avvengono come tra le molecole di un gas; non tutti gli urti sono perciò perfettamente elastici. Si può pensare ad una nube di corpi celesti addirittura. Ne consegue che la energia totale $\mathcal{E}$ si dissipa, lentamente ma inevitabilmente. Le azioni sono *interne*, quindi, se inizialmente il momento della quantità di moto $\vec{\mathcal{K}}$ è $\neq 0$, si avrà l'invariante $\vec{\mathcal{K}} = \text{cost}$. Per $\mathcal{E}$ si dovrà cercare il minimo condizionato con $\vec{\mathcal{K}} = \text{cost}$. rispetto a tutti i parametri che si possono pensare concorrenti, le variabili canoniche in particolare. Tale ricerca è facilitata dalla nozione di soluzione stazionaria secondo T. Levi-Civita.

Farò vedere che una Galassia è la soluzione stazionaria per una nebulosa cosmica. Ma premettiamo, secondo il classico trattato di T. Levi-Civita ed U. Amaldi, una osservazione intorno alle soluzioni stazionarie.

Di un sistema differenziale ordinario

$$(4) \qquad \dot{x}_i = X_i(x \mid t) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n;)$$

sia data una relazione invariante $f(x \mid t) = 0$ vale a dire, con significato ben noto, una relazione in termini finiti fra le x e t verificata da tutte le soluzioni del sistema che inizialmente la soddisfano.

(8) Cfr. op. cit. in (3) p. 55.

(9) G. Krall, cfr. questi « Rendiconti », fasc. 3, 5, 1932; fasc. 12, 1934.

Ciò posto, si associ alla $f = 0$ la relazione simbolica

$$\delta f = 0 \tag{5}$$

che si ottiene eguagliando a zero la variazione di f corrispondente a variazioni infinitesime δx_i delle x_i, tali però che le $x_i + \delta x_i$ risultino ancora soluzioni dell'originario sistema.

Si dimostra, allora, che le equazioni equivalenti alla (5), precisamente le

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \tag{5 a}$$

unitamente alla $f = 0$, sempre che non risultino incompatibili, costituiscono un sistema di relazioni invarianti.

Se in particolare la $f = 0$ è un integrale effettivo, le (5 *a*) costituiscono un sistema invariante da sole o unitamente alla $f = 0$ suddetta.

Il caso meccanicamente più interessante è quello in cui, trattandosi di un sistema canonico a funzione caratteristica indipendente dal tempo, si rende stazionario addirittura l'integrale dell'energia, in via assoluta o subordinatamente ad uno o più integrali o relazioni invarianti. Le soluzioni che verificano questi sistemi di relazioni invarianti prendono il nome di soluzioni stazionarie, che diconsi alla Routh quando gli integrali su accennati risultino dalla presenza di coordinate cicliche od ignorabili, alla Levi-Civita nelle condizioni più generali.

Ciò posto, conviene passare alla ricerca del minimo condizionato di $\mathcal{E}$.

Tale minimo va inteso non soltanto di fronte a tutte le possibili determinazioni dei vari parametri che figurano nelle equazioni del problema e nell'assegnato momento risultante (costanti delle aree, momenti delle quantità di moto ecc.), ma anche di fronte ad ogni altra soluzione del problema stesso. Ciò richiede che sia incondizionatamente, se sfruttiamo l'integrale dell'energia $\mathcal{H} = \mathcal{E}$,

$$\frac{\partial\left(\mathcal{H} + \sum_1^3{}_i \omega_i K_i\right)}{\partial \zeta} = 0 . \tag{6}$$

In queste equazioni, ben manifeste condizioni di estremo, le $\omega_i\,(i = 1, 2, 3)$ designano tre moltiplicatori lagrangiani, K_i le componenti del vettore momento delle quantità di moto, ζ infine rappresenta una generica delle incognite del sistema differenziale (coppie canoniche) rispettivamente quei parametri che si presumono variabili.

A questo punto si rilevi che, premessa l'esistenza di azioni dissipative, la ricerca del moto finale è fatta tra le soluzioni stazionarie di equazioni dinamiche in cui dette azioni non figurano (non sono anzi in nessun modo precisate). Sono queste soluzioni stazionarie tali anche per il sistema differenziale effettivo, noto solo nei termini che preciseremo fra un momento?

Orbene, alla domanda si può rispondere in senso affermativo [10]. All'uopo riconsideriamo il sistema differenziale normale (4), che riscriviamo

$$\dot{x}_i = X_i(x \mid t) \tag{7}$$

e che penseremo rappresentativo della nube cosmica priva di azioni dissipative.

Sia

$$\dot{x}_i = X_i(x \mid t) + X'_i(x \mid t) \tag{8}$$

il sistema differenziale che sintetizza il moto in presenza delle azioni suddette, contemplate nella x'_i, e che ci limitiamo a precisare nei termini seguenti.

Siano $x_i = \bar{x}_i$ le soluzioni stazionarie di (7); per esse risulta

$$X'_i(\bar{x} \mid t) = 0 \tag{9}$$

cioè a dire, sussiste l'ovvia condizione che le azioni dissipative si annullano per le $x_i = \bar{x}_i$. Se valgono tali condizioni, le soluzioni di (7) saranno allora soluzioni anche di (8). Ma per noi si richiede che esse risultino soluzioni stazionarie nel senso che l'energia totale del sistema abbia un estremo, proprio per le $\bar{x}$.

Orbene, basta supporre che le azioni X′ ammettano solo per valori prossimi alle $\bar{x}$ – per le quali si annullano – una rappresentazione compendiosa con la funzione dissipativa del Rayleigh perchè il carattere di estremo che compete alle $\bar{x}$ per le $X' = 0$ si mantenga effettivamente, per un celebre teorema sulla stabilità in presenza di azioni dissipative dovute a Lord Kelvin, anche con l'intervento di queste. Si può procedere anche per vie più generali ma non è il caso di insistere [11].

Nebulosa costituita da N+1 corpi. – Forma canonica del Poincarè per le equazioni del moto. — Nel caso di mutue attrazioni newtoniane il potenziale del campo dipende notoriamente dalle sole differenze,

$$x_i = \xi_i - \xi_0 \quad , \quad y_i = \eta_i - \eta_0 \quad , \quad z_i = \zeta_i - \zeta_0$$

fra le coordinate assolute del generico punto P_i e di uno prefissato P_0 (cosidetto corpo centrale). Ciò porta spontaneamente ad assumere come parametri lagrangiani del sistema le $3n$ coordinate relative di n punti rispetto a quello centrale P_0 e le coordinate assolute di quest'ultimo.

Così procedendo si perviene, ove si designino con p_i, q_i, r_i gli impulsi

$$p_i = m_i \dot{\xi}_i \quad , \quad q_i = m_i \dot{\eta}_i \quad , \quad r_i = m_i \dot{\zeta}_i$$

(10) G. Krall, cfr. « Rend. Acc. d'Italia », fasc. 11, 2 Note. 1940.
(11) Cfr. cit. (10), 2ª Nota.

alla funzione caratteristica classica, dovuta a Poincarè [12]

$$(10) \qquad \mathcal{H} = \frac{1}{2}\sum_i \frac{p_i^2 + q_i^2 + r_i^2}{m_i} + \frac{1}{2m_0}\left\{\left(\sum_1^n {}_i\, p_i\right)^2 + \left(\sum_1^n {}_i\, q_i\right)^2 + \left(\sum_1^n {}_i\, r_i\right)^2\right\} - \mathfrak{U}$$

la quale, risultando esplicitamente indipendente dal tempo t, eguagliata ad una costante $\mathcal{E}$, porge l'integrale dell'energia, cioè l'energia $\mathcal{E}$ del moto orbitale.

Resta a valutare l'espressione del momento totale delle quantità di moto.

Per quanto concerne il moto orbitale, si hanno le componenti del vettore $\vec{\mathcal{K}}$,

$$(11) \qquad K_1 = \sum_1^n {}_i\,(y_i r_i - z_i q_i) \quad , \quad K_2 = \sum_1^n {}_i\,(z_i p_i - x_i r_i) \quad ,$$

$$K_3 = \sum_1^n {}_i\,(x_i q_i - y_i p_i)$$

e, in particolare, quando, l'asse z sia orientato in modo che riesca $K_2 = K_3 = 0$ (per il che basta portarlo a coincidere con $\vec{\mathcal{K}}$), risulterà nelle nuove coordinate, senza mutar scrittura,

$$(11\,a) \qquad K_1 = K_2 = 0 \quad , \quad K_3 = \sum_1^n {}_i\,(x_i q_i - y_i p_i) .$$

Ciò posto, soffermiamoci sul gruppo di equazioni che risultano dall'identificare le ζ con le variabili canoniche (x_i, p_i) ; (y_i, q_i) ; (z_i, r_i). Otteniamo

$$(12) \qquad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = -\omega y_i \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = \omega x_i \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r_i} = 0$$

$$(12\,a) \qquad \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x_i} + \omega q_i = 0 \quad , \quad \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y_i} - \omega p_i = 0 \quad , \quad \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z_i} = 0 .$$

Ora troviamo, in base alle equazioni canoniche

$$\dot{x}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{y}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad , \quad \dot{z}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r_i}$$

in luogo delle (12)

$$\dot{x}_i = -\omega y_i \quad , \quad \dot{y}_i = \omega x_i \quad , \quad z_i = \text{cost.}$$

L'interpretazione ne è immediata; tutti i punti P_i ruotano intorno a P_0 con la medesima velocità angolare in piani invariabili normali a $\vec{\mathcal{K}}$. Questi piani coincidono con un unico, passante per il baricentro G del sistema.

(12) Cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica Razionale*, vol. II, pp. 386-389, Bologna, Zanichelli, 1927.

Invero, le

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \chi_i} = 0$$

del gruppo (12 *a*) non possono essere soddisfatte che a patto sieno tutte eguali le $\chi_i = \text{cost.}$. Se così non fosse, la componente secondo χ dell'attrazione $\left(\text{precisamente la } \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \chi_i}\right)$ non potrebbe annullarsi per ogni punto, indistintamente. E così appare la tendenza alla forma lenticolare dell'originaria nube (N molto grande) di punti materiali.

Astronomia. — *Moto dei satelliti intorno al Sole.* – Parte I. *Moti diretti o retrogradi.* Nota [1] del Socio G. Silva.

1. Un satellite descrive rispetto al Sole, per effetto del suo moto ellittico intorno al pianeta a cui appartiene e del moto ellittico di questo pianeta intorno al Sole, una traiettoria, che, in causa dell'inclinazione reciproca fra i piani delle due orbite, è una linea sghemba, lo studio della quale è reso estremamente complicato dalla necessità di passare attraverso le due equazioni trascendenti di Keplero per avere le coordinate di un generico punto Q di essa, occupato dal satellite al tempo t, parametro obbligatorio per detto studio. In una mia recente Memoria [2], che ricorderò d'ora in avanti con la sigla Mem. I, ho considerato tre tipi caratteristici di tale traiettoria: un tipo [*a*], nel quale essa rimane concava rispetto al Sole per tutta una rivoluzione sinodica del satellite, un tipo cioè nel quale, in un intorno di ogni punto Q occupato dal satellite durante una sua rivoluzione sinodica, la linea stessa si svolge dalla stessa parte del Sole S rispetto al suo piano rettificante in Q; un tipo [*b*], nel quale la linea, concava verso il Sole quando il satellite è in opposizione a questo, rispetto al pianeta, diviene convessa intorno all'epoca della congiunzione, e nel quale inoltre il moto del satellite attorno al Sole è sempre diretto; infine un tipo [*c*], nel quale la proiezione della traiettoria sul piano

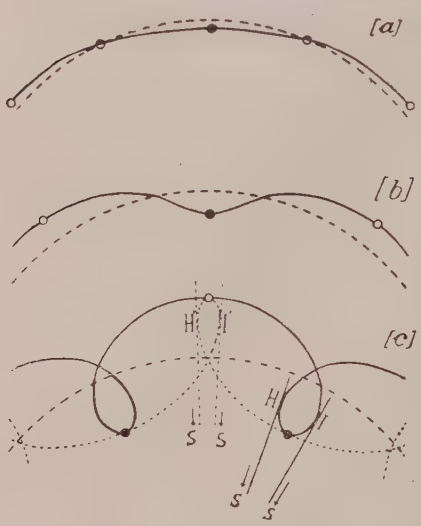


Fig. 1.

(1) Presentata nella seduta dell'8 marzo 1947.

(2) G. Silva, *Sulla traiettoria dei satelliti rispetto al Sole.* Pubbl. n. 86 dell'Oss. astr. di Padova (dalle «Mem. della S.A.I.», vol. XVIII, 2, 1946).

dell'orbita del pianeta presenta, ad ogni rivoluzione sinodica, due punti di stazionarietà H, I, o H', I', fra i quali il moto diviene retrogrado, ciò che dà origine, di regola, ad un cappio. Nella fig. 1 sono indicati i tre tipi per il caso più semplice di orbite circolari e complanari; il tipo [*c*] tracciato con linea punteggiata si riferisce a un satellite che ruota intorno al pianeta con moto retrogrado.

Indicando, rispettivamente per il pianeta e per il satellite, con a ed α i semiassi maggiori delle orbite, con e ed ε le eccentricità di queste, con n e ν i moti medî diurni dei due astri, con i l'inclinazione reciproca dei piani delle due orbite, ho dimostrato nella Mem. I che le diseguaglianze seguenti (3)

$$(1) \qquad \frac{n^2}{\nu^2} < \frac{\alpha^2}{a^2}\,\frac{(1-e)(1-\varepsilon)}{(1+e)(1+\varepsilon)}\cos^2 i$$

$$(2) \qquad \frac{n^2}{\nu^2} > \frac{\alpha^2}{a^2}\,\frac{(1+e)(1+\varepsilon)}{(1-e)(1-\varepsilon)}$$

$$(3) \qquad \frac{n^2}{\nu^2} < \frac{\alpha}{a}\,\frac{(1-e)^2}{(1+\varepsilon)^2}\,\frac{a(1-e)|\cos i| - \alpha(1+\varepsilon)}{a(1-e) - \alpha(1+\varepsilon)|\cos i|}$$

$$(4) \qquad \frac{n^2}{\nu^2} > \frac{\alpha}{a}\,\frac{(1+e)^2}{(1-\varepsilon)^2}$$

sono condizioni necessarie perchè, rispettivamente, qualunque siano le orientazioni delle linee degli apsidi delle due orbite rispetto alla linea dei nodi, la traiettoria: 1° sia sempre del tipo [*c*], 2° non sia mai del tipo [*c*], 3° non sia mai del tipo [*a*], 4° sia sempre del tipo [*a*].

Ragionamenti di carattere intuitivo fanno ritenere che le predette condizioni siano anche sufficienti; ma non è facile riconoscere se e per quali limitazioni esse lo sono effettivamente. Pertanto nella Mem. I ho ritenuto preferibile aggiungere la dimostrazione della sufficienza semplificando alquanto l'enunciato del problema.

Qui indicherò la maniera, teoricamente semplice, ma troppo complicata invero nella sua pratica applicazione, per risolvere detto problema nella sua massima generalità e aggiungerò qualche indicazione complementare per chi volesse continuare tali ricerche. Inoltre, mentre nella seconda parte di questa Nota farò vedere con un esempio particolare la necessità della riserva sopra enunciata, dimostrerò nella parte terza che essa non può aver luogo quando le eccentricità sono sufficientemente piccole.

(3) Il valore assoluto o il quadrato di cos i, non indicati nelle formole della Mem. I per avere allora supposto $i < 90°$, sono stati qui introdotti per poter rinunciare a tale limitazione. Il numeratore della terza frazione al secondo membro della (3) può risultare negativo per i molto prossimo a 90°; in tale caso eccezionale, in cui la (3) non può essere soddisfatta, la corrispondente diseguaglianza (6) della Mem. I, solo formalmente diversa dalla (3), ma nella quale la detta frazione appare rovesciata, deve essere invertita di senso.

2. Per definire l'equazione della traiettoria ricorriamo a due sistemi di coordinate polari che abbiano l'origine rispettivamente nei centri S e P del Sole e del pianeta, ed abbiano entrambi l'asse polare di direzione e verso eguali a quelli della linea dei nodi, rivolta al nodo ascendente, e il semipiano polare origine coincidente con il piano dell'orbita del pianeta, orientato nel verso del moto che il pianeta ha al detto nodo ascendente.

Indichiamo rispettivamente, per il pianeta e per il satellite, con r e ρ i raggi vettori, con w ed ω le distanze del perielio e del periastro dal nodo, con v e φ le anomalie vere a un generico tempo t, contato a partire da un passaggio del satellite al periastro, con u e υ le anomalie eccentriche; contiamo poi l'inclinazione i da 0° a 90° se il moto del satellite è diretto e da 90° a 180° se invece esso è retrogrado; infine chiamiamo t_0 il particolare valore del tempo t corrispondente al passaggio del pianeta al perielio.

Le coordinate polari del pianeta nel primo dei due sistemi dianzi definiti e quelle del satellite nel secondo sistema, relative al tempo t, sono rispettivamente: r, $w+v$, 0; ρ, $\omega+\varphi$, i. Passando alle corrispondenti coordinate cartesiane nei due sistemi ortogonali che hanno l'asse x coincidente con l'asse polare, l'asse y nel semipiano polare e l'asse z orientato per modo che il moto del pianeta apparisca diretto, si conclude che le coordinate del satellite nel sistema cartesiano che ha l'origine nel Sole sono

$$(5)\qquad \begin{cases} x = \rho\cos(\omega+\varphi) + r\cos(w+v) \\ y = \rho\operatorname{sen}(\omega+\varphi)\cos i + r\operatorname{sen}(w+v) \\ z = \rho\operatorname{sen}(\omega+\varphi)\operatorname{sen} i\,. \end{cases}$$

Le consuete relazioni che legano il raggio vettore e l'anomalia vera di un punto dell'orbita ellittica all'anomalia eccentrica, e le due equazioni di Keplero

$$(6)\qquad u - e\operatorname{sen} u = n(t-t_0)\quad,\quad \upsilon - \varepsilon\operatorname{sen}\upsilon = \nu t$$

permettono il calcolo, mediante le (5), delle suddette coordinate.

Quando poi si vogliano ricavare le loro derivate prime e seconde, potremo ricorrere agli integrali primi delle aree, che dànno

$$(7)\qquad r^2\frac{dv}{dt} = na^2\sqrt{1-e^2}\quad,\quad \rho^2\frac{d\varphi}{dt} = \nu\alpha^2\sqrt{1-\varepsilon^2}\,,$$

e alle consuete equazioni

$$(8)\qquad r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}\quad,\quad \rho = \frac{\alpha(1-\varepsilon)}{1+\varepsilon\cos\varphi}\,,$$

che permettono di mantenere le variabili v e φ. Oppure, sviluppando prima nelle (5) le espressioni trigonometriche di $w+v$ e $\omega+\varphi$, potremo anzitutto esprimere le dette coordinate a mezzo delle anomalie eccentriche, ricorrendo alle relazioni

$$(9)\qquad \begin{cases} r\cos v = a(\cos u - e)\quad,\quad \rho\cos\varphi = \alpha(\cos\upsilon - \varepsilon)\,, \\ r\operatorname{sen} v = a\sqrt{1-e^2}\operatorname{sen} u\quad,\quad \rho\operatorname{sen}\varphi = \alpha\sqrt{1-\varepsilon^2}\operatorname{sen}\upsilon\,, \end{cases}$$

e potremo poi mantenere queste variabili u e v, ricavandone le derivate rapporto al tempo a mezzo delle equazioni di Keplero (6).

3. La distinzione fra il tipo [*c*] e gli altri due tipi è affidata alla proiezione della traiettoria sul piano dell'orbita del pianeta e al presentarsi o al non presentarsi di un moto retrogrado del raggio SQ_1 che unisce il Sole alla proiezione Q_1 del satellite (4).

Notiamo anzitutto che, almeno nel caso in cui l'orbita del pianeta è molto allungata, il moto retrogrado può presentarsi senza il cappio che potrebbe sembrare caratteristico del tipo [*c*]. La fig. 2, che vale per un'orbita del pianeta di eccentricità 0,9, per un'orbita circolare del satellite con raggio $\alpha = a/25$, e per un rapporto dei moti medî diurni $n/\nu = 0{,}1$, ne dà un esempio.

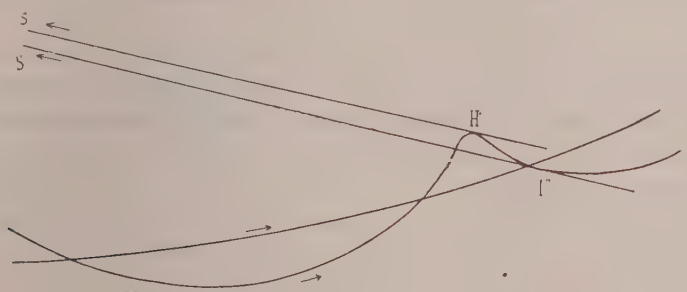


Fig. 2.

Ricordiamo poi dalla Mem. I che i due parametri w, ω, che caratterizzano la posizione reciproca delle due orbite, e il tempo t_0, che, (analogamente alla v_c di detta Mem. I) caratterizza le successive posizioni reciproche del pianeta e del satellite sulle loro orbite ad ogni rivoluzione sinodica, devono ritenersi variabili da una rivoluzione all'altra e suscettibili di assumere qualsiasi valore compreso fra zero e 2π per w ed ω, e fra zero e $2\pi/n$, durata di una rivoluzione del pianeta, per t_0. Ricordiamo anche che, definito un punto O_1 prossimo al Sole, per modo che i segmenti orientati PQ_1, SO_1 siano equipollenti, le diseguaglianze (1) e (2) sono condizioni non soltanto necessarie, ma anche sufficienti perchè, qualunque siano i valori di w, ω, t_0, esistano in tutte le rivoluzioni sinodiche del satellite, o non esistano in nessuna di esse, dei punti Q_1 tali che un osservatore fermo in O_1, veda il satellite attraversare tali posizioni Q_1 di moto retrogrado.

Per riferirci ad un osservatore fisso in S, come vuole il problema nella sua massima generalità, occorre osservare che le componenti della velocità della proiezione Q_1 del satellite sugli assi x, y, sono espresse da x', y', gli apici denotando derivate rispetto al tempo, e che i coseni direttori della normale ad SQ_1, orientata nel verso diretto, sono proporzionali a $-y$ ed x.

(4) Nella Mem. I il punto Q_1 fu indicato con Q'.

Pertanto la velocità trasversa alla direzione SQ_1 avrà senso diretto o senso retrogrado a seconda che l'espressione

$$G = xy' - yx' \tag{10}$$

è positiva o negativa.

Il calcolo diretto di questa espressione, punto per punto, risolve il problema. Ma sarebbe certo preferibile giungere ad una soluzione generale che dia condizioni analoghe alla (1) e alla (2).

A questo scopo, immaginiamo di determinare il minimo G_m di G al variare del tempo t; tale minimo G_m sarà funzione dei parametri w, ω, t_0 e, al variare di essi, assumerà un valore minimo $G_{m\cdot m}$ minore di qualsiasi valore G, ed un valore massimo $G_{m\cdot M}$, maggiore di ogni altro minimo G_m. Le condizioni necessarie e sufficienti perchè la traiettoria sia sempre del tipo [c], o non lo sia mai, devono dunque essere rispettivamente

$$(1') \quad G_{m\cdot M} < 0\,, \quad (2') \quad G_{m\cdot m} > 0\,.$$

La (1') dovrebbe coincidere con la (1) e la (2') con la (2), almeno quando si trascuri il rapporto α/a di fronte all'unità, poichè ciò equivarrebbe a riportare l'osservatore dal punto S al punto O_1 per il quale le condizioni (1) e (2) sono necessarie e sufficienti.

Per il calcolo di $G_{m\cdot M}$ e $G_{m\cdot m}$ osserviamo che devono essere soddisfatte le condizioni

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial G}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dt} = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial w} = 0 \quad , \quad \frac{\partial G}{\partial \omega} = 0 \quad , \quad \frac{\partial G}{\partial t_0} = -\frac{\partial G}{\partial v}\frac{dv}{dt} = 0\,.$$

Dal confronto dell'ultima con la prima segue che le predette condizioni equivalgono alle seguenti

$$(11) \qquad \frac{\partial G}{\partial v} = 0 \quad , \quad \frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0 \quad , \quad \frac{\partial G}{\partial w} = 0 \quad , \quad \frac{\partial G}{\partial \omega} = 0\,,$$

e ciò mostra che, al posto delle incognite t, t_0, possono essere considerate le incognite v, φ, in quanto G dipende soltanto dalle coordinate x, y, date dalle (5), e dalle loro derivate rispetto al tempo, ottenute facendo uso delle (7) ed (8), e nè le une, nè le altre contengono esplicitamente t e t_0. Lo stesso può dirsi se, in luogo delle anomalie vere v, φ, si fa uso delle eccentriche u, υ.

Delle soluzioni delle (11) dovremo prendere in considerazione quelle soltanto per cui G è minimo rispetto al tempo, così che esse dovranno soddisfare alla condizione

$$(12) \qquad \frac{d^2 G}{dt^2} = \frac{\partial^2 G}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 G}{\partial v\,\partial \varphi}\frac{dv}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 > 0$$

e converrà poi riconoscere praticamente, tra le varie soluzioni G_m soddisfacenti alle equazioni (11) e alla condizione precedente, le due espressioni

estreme $G_{m\cdot m}$ e $G_{m\cdot M}$. Ragioni di simmetria dimostrano che nelle circostanze particolari dei § 4 e 5 della Mem. I, che conducono alle (1) e (2), le (11) sono soddisfatte; e le considerazioni di carattere cinematico esposte in detti § 4 e 5, che possono parzialmente sostituire la considerazione analitica delle derivate seconde, avvalorano la convinzione che alle circostanze suddette corrispondano effettivamente il minimo $G_{m\cdot m}$ e il massimo $G_{m\cdot M}$ dei minimi G_m; il che significherebbe che le (1) e (2) risolvono il problema nella sua massima generalità quanto alla distinzione del tipo [*c*] dagli altri due.

Meccanica. — *Statica dei mezzi elastici cosidetti «viscosi»*. Nota I [1] del Corrisp. G. KRALL.

1. PREMESSE E GENERALITÀ. – Nella ordinaria statica dei corpi elastici si può ben dire che, per definizione, la variabile tempo non interviene. Tra carichi e deformazioni sussiste una dipendenza biunivoca nella quale è inclusa la condizione – che sola allude tacitamente al tempo – riguardante la *lenta applicazione* di detti carichi così da non destare fenomeni dinamici e, anch'essi sensibili, quelli di isteresi.

Naturalmente si tratta di una schematizzazione che, valida nella stragrande maggioranza dei casi, può non completamente rispondere in taluni altri. Ciò è noto agli sperimentatori sin dalle prime sistematiche indagini sui materiali da costruzione. *I fenomeni di isteresi* cui si è alluso sono un esempio ben noto in cui, anche evitando ogni fenomeno dinamico, la statica classica non è più sufficiente e occorre considerare la variabile tempo. Il materiale *ricorda* i carichi o le deformazioni passate, quindi la deformazione attuale dipende dai valori presenti e passati del cimento.

Analiticamente si esprime la memoria con una sola funzione

$$\Phi(t, \tau)$$

dell'istante t in cui si misura un certo *effetto;* (*deformazione*, *spostamento*) e dell'istante τ in cui l'azione è avvenuta. Detta funzione, chiamata dal Volterra [2] *nucleo ereditario*, determina il ricordo al tempo t dell'azione $F = 1$ durata un tempo 1 nell'intorno dell'istante τ.

Se l'azione fosse stata $= F$ e durata un tempuscolo $\Delta\tau$, intorno sufficentemente piccolo di τ, il ricordo, che potrebbe manifestarsi ad esempio come spostamento, sarebbe

$$F(\tau) \cdot \Phi(t, \tau) \cdot d\tau .$$

(1) Presentata nella seduta dell'8 febbraio 1947.

(2) V. VOLTERRA, *Leçons sur les Fonctions des lignes*. Gauthier Villars. Paris 1913; *Saggi scientifici*, p. 189, Zanichelli Bologna 1920; *Leçons sur les équations intégrales*. Gauthier Villars. Paris 1916.

Quindi, se $F(\tau)$ agisce nel tempo $-\infty \leq \tau \leq t$ secondo una legge ben determinata $F = F(\tau)$, all'istante t lascierà un ricordo, nel caso specifico uno spostamento $w(t)$, dato da

$$\int_{-\infty}^{t} F(\tau)\,\Phi(t,\tau)\,d\tau$$

e lo spostamento effettivo nell'istante t sarà somma di detto ricordo al valore attuale $kF(t)$, k essendo una costante,

$$w(t) = kF(t) + \int_{\infty}^{t} F(\tau)\,\Phi(t,\tau)\,d\tau .$$

Notevoli sono i nuclei funzioni della sola differenza $(t-\tau)$, chiamati dal Volterra del *ciçlo chiuso* per alcune salienti proprietà che giustificano la locuzione. Una proprietà particolare fondamentale; ad *azioni periodiche corrispondono effetti periodici*, ciò che *a priori* non si può certo affermare. A questo punto giova fare una osservazione. La memoria, cioè il nucleo ereditario Φ che sia del ciclo chiuso non dipende dal tempo ma solo da $(t-\tau)$, cioè un materiale che abbia un nucleo ereditario siffatto ha *memoria invariante*, che rimane cioè la stessa sia che il materiale abbia 5 o 10 anni ad esempio.

Ma alcuni materiali da costruzione, i calcestruzzi giovani ad es. ed in particolare, non hanno affatto memoria invariante. Un caso particolare ma notevole, direi leggermente triviale, è rappresentato da un nucleo del tipo, valido per azioni lentissimamente variabili,

$$\Phi = ae^{-\beta\tau} \tag{1}$$

con τ contato a partire dall'istante $\tau = 0$ in cui il materiale è ritenuto idoneo ad esser materiale da costruzione (potrebbe essere ad esempio 28 giorni dopo l'*impasto* per un calcestruzzo). Tale istante $\tau = 0$ chiameremo per brevità, della raggiunta maturità del materiale. Il ricordo non dipende dunque nè dall'istante t in cui si fa la misura nè dalla differenza $(t-\tau)$, l'effetto dell'azione ricevuta al tempo τ rimane indelebile nel tempo, è il caso dei *corpi plastici* (che per dirla alla buona, hanno una memoria d'acciaio) a plasticità decrescente con il tempo perchè evidentemente secondo la (1) l'impronta (poichè induriscono quasi come lo stucco, senza variare però il modulo d'elasticità), della stessa azione riesce minore al tempo τ_2 che non al tempo τ_1 se $\tau_2 > \tau_1$.

Orbene, mi propongo di far vedere che questo particolarissimo nucleo ha una cospicua importanza per i calcestruzzi giovani, da 0 a 4–5 anni di età. Ciò mi venne fatto di osservare studiando le sistematiche esperienze di Wytneÿ sul comportamento di questo materiale, sotto l'azione di sollecitazione costanti nel tempo applicate a varie età.

Le conseguenze che si traggono sono non prive di interesse dal punto di vista statico.

Troveremo infatti, con riguardo agli archi da ponte ad esempio, che

a) la caduta di spinta conseguente al *ritiro* viene ridotta fortemente da un coefficente funzione decrescente del tempo da applicare ai valori abituali;

b) vanno modificate le regole per l'introduzione a titolo correttivo di *divari prestabiliti* tra l'asse di un arco e la sua linea delle pressioni, divari che, per il lento cedere del materiale, possono aumentare tanto da portar a risultati opposti alle intenzioni del progettista.

Risulta inoltre che,

c) vanno considerati non gravi – come si crede – i cedimenti dei vincoli nelle strutture *giovani* purchè avvengano in un periodo di tempo dell'ordine di quello che esaurisce la viscosità (qualche anno);

d) si disperdono distorsioni sistematiche di ogni genere, pur ad arte applicate. Sieno esse intese nel senso classico del Volterra (ottenute quindi con introduzione od asportazione di un cuneo e successiva saldatura delle facce messe a contatto o rimaste libere) per i sistemi non semplicemente connessi o di quello, studiato da v. Kármán, Föppl, Danusso [3] e Colonnetti [4], secondo cui un locale superamento del limite di elasticità induce, per la persistenza delle deformazioni plastiche, uno stato di *autotensione* o *coazione elastica* in un sistema indipendentemente dalla connessione quindi anche in un sistema aciclico.

e) è confermata la opportunità, segnalata con i fatti dall'Hennebique, di timpanare gli archi molto arditi. Tale regola si traduce assai elegantemente nel richiedere elevati *moltiplicatori critici* dei carichi agenti per tutti i sistemi costruiti con materiali viscosi e soggetti a sforzi assiali. Rileverò che alcuni dei risultati qui conseguiti, particolarizzati agli archi in cemento armato concordano sostanzialmente con quelli ottenuti dal Dischinger in una Memoria sulla viscosità e sui carichi critici negli archi da ponte a 3, 2, 1 o senza cerniere.

Le vie qui perseguite sono però assai diverse (equazioni integrali secondo Volterra e Fredholm) e consentono di comprendere, e per un sistema generale, non solo tutta la problematica statico elastica legata alla viscosità ma di arrivare a formole definitive, pronte per il numero e di facile istituzione in ogni circostanza.

2. ESPERIENZE DI WYTNEY [5]. CONCLUSIONI. – NOZIONE DI MODULO D'ELASTICITÀ VIRTUALE DI UN CALCESTRUZZO. – Queste esperienze hanno portato a riconoscere che, se un calcestruzzo giunto a maturità all'istante $\tau = 0$, contato poniamo dal 28mo giorno dall'impasto, è sollecitato dal tempo $\tau = 0$ al tempo $\tau = t$ con *azioni costanti*, le deformazioni in detto istante t

(3) A. DANUSSO, *Le autotensioni*. « Rend. Sem. Mat. d. Politecnico di Milano », 1934.

(4) G. COLONNETTI, *Scienza delle Costruzioni*. Cap. XXVI e sg. – Einaudi Torino, 1941.

(5) C. S. WITHNEY, « I. Amer. Concrete Institute », Marzo 1932; cfr. J. MELAN, *Das plastische Verhalten des Betons*. Beton und Eisen, p. 320 (1932).

non sono quelle che competono al modulo di elasticità effettivo E_0 in quell'istante, ma ad un modulo virtuale E_v dato da

$$E_v = \frac{E_0}{1 + \alpha\,(1 - e^{-\beta t})}. \tag{2}$$

Se i carichi, anzichè applicati all'istante $\tau = 0$ vengono applicati all'istante $\tau = \tau > t$, le deformazioni devono essere calcolate, sempre secondo le citate esperienze, in base ad un modulo virtuale E_v dato da

$$E_v = \frac{E_0}{1 + \alpha\,(e^{-\beta\tau_1} - e^{-\beta t})}. \tag{2a}$$

La costante α ha un significato evidente: determina il rapporto tra deformazione viscosa prodotta da un carico costante da $\tau = 0$ a $\tau = t \to \infty$ (praticamente 4 o 5 anni) e la deformazione elastica. La costante dimensionale β vale pressapoco

$$\beta = (1 \text{ anno})^{-1} \quad , \quad \alpha \cong 3$$

sicchè si può scrivere, *misurando il tempo in anni*, $e^{-\beta\tau} = e^{-\tau}$. Ciò faremo a partire dalla formola (4 *a*).

Lo spostamento effettivo è quindi, in luogo di quello normale w_0,

$$w = w_0 \{ 1 + \alpha\,(e^{-\beta\tau_1} - e^{-\beta t}) \}. \tag{3}$$

3. Nucleo ereditario conforme alle esperienze di Wytney. Equazioni per la statica. – Quando P sia funzione di τ si ha, sommando il ricordo all'effetto istantaneo $k\,P(t) = w_0$,

$$w = k\,P(t) + k\alpha\beta \int_0^t e^{-\beta\tau}\,P(\tau)\,d\tau. \tag{4}$$

Con ciò resta dimostrata, ove si ponga $\alpha\beta = a$, la leggittimità di applicare la definizione (1) al nucleo ereditario per il giovane calcestruzzo.

In seguito noi sceglieremo l'unità di tempo in modo che sia $\beta = 1$ (per il calcestruzzo, l'unità è $\sim$ 1 anno).

La (4) diviene allora

$$w(t) = k\,P(t) + k\alpha \int_0^t e^{-\tau}\,P(\tau)\,d\tau. \tag{4a}$$

Conviene ormai precisare la correlazione stabilita attraverso la costante k tra i carichi che abbiamo sinteticamente chiamati con P, e gli spostamenti w, che non è sempre così semplice come nel caso considerato. Ciò riesce nel modo più espressivo ed utile attraverso la nozione di *funzione di influenza* per un sistema elastico.

4. Funzione di Green o di influenza, statica dei sistemi elastici, secondo la teoria delle equazioni integrali [6]. – Fissiamo l'attenzione

(6) G. Krall, *Meccanica tecnica delle Vibrazioni*. Vol. I, Cap. VI, Zanichelli, Bologna 1940; Intorno alle *Condizioni di Stabilità dell'equilibrio elastico*. «Rend. Acc. Lincei»,

ad esempio su di un'asta appoggiata agli estremi e definiamone la corrispondente (cosidetta) funzione di influenza.

Contata una coordinata x lungo l'asse a partire da un estremo definisca una sua determinazione $x = \xi$ il punto di applicazione di un carico trasversale $P = 1$; la determinazione $x = x$ il punto dove si misura lo spostamento.

Detto spostamento è evidentemente una funzione $G(x, \xi)$ di x e di ξ. È questa la funzione di influenza o funzione di Green.

Se in luogo del carico $P = 1$ in ξ si avesse una successione di carichi P_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$ in $\xi = \xi_i$ $i = 1, 2, \cdots, n$, lo spostamento in x sarà

$$w(x) = \sum_j G(x, \xi_j) P_j .$$

Se ai carichi concentrati si sostituisce una distribuzione di carico continua $p = p(\xi)$, sarà evidentemente $p(\xi)\, d\xi$ il carichetto insistente in ξ e lo spostamento in x prodotto dalla successione continua di detti carichi sarà

$$w(x) = \int_0^L G(x, \xi)\, p(\xi)\, d\xi \tag{5}$$

5. EQUAZIONI DELL'ELASTOSTATICA PER MATERIALI VISCOSI. – Per quanto riguarda l'applicazione dell'equazione (5) al caso dei sistemi eseguiti con materiale viscoso (calcestruzzi giovani) non vi sono difficoltà; basta aggiungere allo spostamento elastico all'istante t

$$\int_0^L G \cdot p(\xi, t)\, d\xi$$

lo spostamento ereditario valutato semplicemente, poichè ogni componente della deformazione ha, *per ipotesi*, lo stesso nucleo, sulla storia di $w = w(\tau)$ nell'intervallo $0 \leq \tau \leq t$, secondo l'espressione.

$$\int_0^t \Phi(\tau) \int_0^L G p(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau .$$

Si ha allora in un luogo di (5)

$$w(x, t) = \int_0^L G(x, \xi)\, p(\xi, t)\, d\xi + \int_0^t \Phi(\tau) \int_0^L G(x, \xi)\, p(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau . \tag{6}$$

Questa equazione sintetizza l'elastostatica dei sistemi di materiale viscoso. Le applicazioni concrete, con particolare riguardo alle strutture presso-inflesse, formano oggetto di una Nota II.

pp. 744–749 (1926); *Un metodo generale di valutazione approssimata dei carichi critici*. « Rend. Acc. Lincei », pp. 745–748 (1930).

Fisica.. — *Nuovo metodo per misurare la velocità della luce.* Nota [1] del Corrisp. A. Amerio.

1. Si abbiano due stazioni A e B di cui sia ben nota la distanza (circa km. 1); esse siano così costituite (fig. 1): In ciascuna una sorgente intensa di luce S_1 o S_2 dirette l'una verso l'altra; una lastra di vetro v_1 e v_2 a facce piane e parallele, inclinate a 45° sui raggi di luce; sul cammino di questi in ogni stazione due nicol incrociati N_1, N_1', N_2', N_2 fra i quali sia posta una cellula di Kerr il cui asse sia a 45° rispetto ai piani delle sezioni principali dei nicol; i nicol esterni N_1 ed N_2 siano paralleli fra di loro e perciò siano

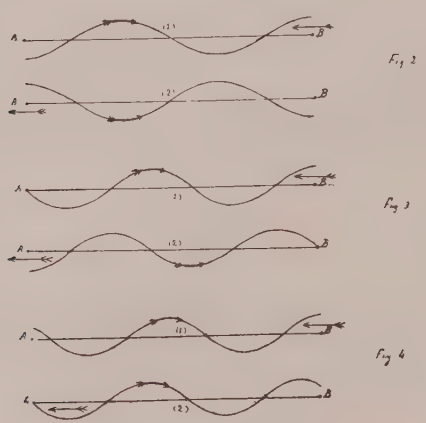


Fig. 2

Fig. 3

Fig. 4

tali anche i due interni N_1', N_2'. Di fronte ad ogni lastra di vetro una cellula fotoelettrica c_1 o c_2 e relativo galvanometro.

Il dispositivo sia infine completato, rompendo la perfetta simmetria, da un intenso fascio di onde elettriche lanciate parallelamente ai fasci di luce nella direzione da A verso B e in ogni stazione esse vengano ricevute ed amplificate in modo da stabilire fra le armature della cellula di Kerr campi elettrici tali che, per intervalli determinati opportunamente della fase di massima intensità, esse diventino attive. I circuiti siano tali da produrre nel fascio lo stesso spostamento di fase in entrambe le stazioni. Le radio onde siano a periodi regolari e mantenute ogni volta rigorosamente costanti mediante lamine di quarzo piezoelettrico.

(1) Presentata nella seduta dell'8 febbraio 1947.

2. Se la luce che è diretta da una stazione all'altra giunge alla cellula di Kerr della propria stazione mentre essa è attiva, cioè durante la fase di massima tensione delle radio onde, l'attraversa e se poi giunge all'altra stazione pure durante la fase massima, *passa*, e giunge in parte all'altra sorgente, in parte si rende visibile per riflessione sulla lastra di vetro, *altrimenti non passa.*

Ora, finchè la luce è diretta da A verso B, cioè nel senso stesso delle onde elettriche, passa attraverso la cellula K_1 durante la fase di massima tensione e poichè giunge all'altra stazione accompagnandosi con le onde elettriche nella stessa fase con cui è passata, avendo la stessa velocità, trova la cellula di Kerr K_2 in fase attiva e *passa.*

Ciò avverrà qualunque sia la lunghezza delle radio onde, quindi la luce passa sempre in modo intermittente da A verso B, penetrando per A, periodicamente, durante le fasi di massima intensità.

Vediamo se lo stesso si può dire della luce che va da B verso A.

Secondo la teoria della relatività la velocità della luce non si compone con la velocità della terra, quindi qualunque sia l'orientamento delle due stazioni la durata dei due tragitti AB e BA è la stessa.

Secondo la teoria classica invece si dovrebbe avere un tempo diverso; ma se si orienta la linea AB delle due stazioni secondo un meridiano, oppure se qualunque sia l'orientamento, ricorriamo a radio onde di lunghezza molto grande rispetto al cammino percorso dalla terra nel tempo che impiega la luce ad andare da una stazione all'altra, l'effetto dello spostamento della terra, sarà trascurabile. Per conseguenza limitiamoci, per ora, a considerare quanto avviene usando radio onde molto lunghe.

Sia T il periodo delle oscillazioni radio, t il tempo impiegato dalla luce a percorrere il tragitto AB o BA ed esaminiamo ciò che si prevede nei tre casi seguenti:

$a)$ $$t = n\,\frac{T}{2}$$

$b)$ $$t = (2n \pm 1)\,\frac{T}{4}$$

$c)$ $$t = (4n \pm 1)\,\frac{T}{8}\,.$$

Caso *a*) (fig. 2). — Nel tempo t che impiega la luce ad andare da una stazione all'altra, le radio onde compiono un numero intiero di mezze oscillazioni. Perciò nell'istante in cui la luce entra per A o per B in fase massima, anche nell'altra stazione la fase sarà massima e poichè durante il tragitto della luce le radio onde compiono un numero intiero di mezze oscillazioni, la luce che da B va verso A troverà in questa stazione la cellula in fase massima e *passerà*; per conseguenza in questo caso, la luce *passa in entrambi i sensi.*

Caso *b*). – Supponiamo ora (fig. 3) il secondo caso.

Poichè:

$$t = (2n \pm 1)\frac{T}{4}$$

tra A e B ci sarà sempre questa differenza di fase, quindi mentre in B si ha la fase $\frac{T}{4}$ per cui la luce entra, (fig. 3 (1)) in A si ha la fase

$$\frac{T}{4} + (2n \pm 1)\frac{T}{4} = \begin{cases} (n+1)\frac{T}{2} \\ n\frac{T}{2} \end{cases}$$

cioè A è in fase minima, ma quando vi giunge la luce, cioè dopo il tempo t, essa sarà in fase (fig. 3 (2))

$$\frac{T}{4} + (2n \pm 1)\frac{T}{4} + (2n \pm 1)\frac{T}{4} = (2n \pm 1)\frac{T}{2} + \frac{T}{4}$$

cioè la luce troverà A in fase massima e *passerà*.

Anche in questo caso essa passerà in entrambi i sensi.

Caso *c*). – Vediamo infine il terzo caso (fig. 4) nel quale

$$t = (4n \pm 1)\frac{T}{8}$$

Mentre in B si ha la fase $\frac{T}{4}$ per cui la luce entra, (fig. 4-(1)) in A si ha la fase

$$\frac{T}{4} + (4n \pm 1)\frac{T}{8}$$

e quando la luce giunge in A vi troverà la fase (fig. 4-(2))

$$\frac{T}{4} + (4n \pm 1)\frac{T}{8} + (4n \pm 1)\frac{T}{8} = \frac{T}{4} + (4n \pm 1)\frac{T}{4} = \begin{cases} (2n+1)\frac{T}{2} \\ 2n\frac{T}{2} \end{cases}$$

cioè troverà questa stazione in fase minima *e non passerà*.

In questo caso la luce *passerà dalla stazione* A *alla stazione* B *ma non inversamente*.

3. Quanto precede permette di misurare la velocità della luce conoscendo il periodo delle onde e la distanza AB = d.

Infatti la scomparsa della luce proveniente da B, si osserverà nella stazione A quando ci troveremo nel caso *c*) ossia per:

$$t = (4n \pm 1)\frac{T}{8}$$

e precisamente la prima scomparsa si avrà per $n = 0$, ossia

$$t = \frac{T}{8}$$

e poichè la velocità della luce è:

$$c = \frac{d}{t}, \quad \text{sarà} \quad c = 8\,\frac{d}{T}$$

e la lunghezza d'onda sarà:

$$\lambda = c\,T = 8\,d\,.$$

Ne viene che per osservare la prima scomparsa in A, per $d = 1$ Km. occorre avere onde di periodo $T = 26{,}7 \cdot 10^{-6}$ sec. cioè $\lambda = 8000$ m.

Le successive scomparse si otterranno dando a n i valori 1, 2, 3 ecc.

Alla serie di queste scomparse corrisponderanno i valori dei periodi e delle lunghezze d'onda segnati nel seguente specchietto:

scomparsa	t	c	$T \cdot 10^6$ sec.	λ
1°	$\frac{1}{8}\,T$	$8\,\frac{d}{T}$	26,7	8000 m.
2°	$\frac{3}{8}\,T$	$\frac{8}{3}\,\frac{d}{T}$	8,9	2667 m.
3°	$\frac{5}{8}\,T$	$\frac{8}{5}\,\frac{d}{T}$	5,34	1600 m.
4°	$\frac{7}{8}\,T$	$\frac{8}{7}\,\frac{d}{T}$	3,81	1143 m.
5°	$\frac{9}{8}\,T$	$\frac{8}{9}\,\frac{d}{T}$	2,97	889 m.
6°	$\frac{11}{8}\,T$	$\frac{8}{11}\,\frac{d}{T}$	2,43	727 m.
7°	$\frac{13}{8}\,T$	$\frac{8}{13}\,\frac{d}{T}$	2,05	615 m.
.....				
10°	$\frac{19}{8}\,T$	$\frac{8}{19}\,\frac{d}{T}$	1,41	421 m.
11°	$\frac{21}{8}\,T$	$\frac{8}{21}\,\frac{d}{T}$	1,27	381 m.

e così di seguito fino a che le onde siano lunghe rispetto allo spostamento che la Terra subisce nel tempo t nella direzione di propagazione della luce. Per esempio potremmo anche arrivare a $n = 20$ in cui avremo la quarantesima scomparsa per

$$t' = \frac{79}{8}\,T \qquad c = \frac{8}{79}\,\frac{d}{T} \qquad T = 3{,}38 \cdot 10^{-7} \qquad \lambda = 101 \text{ m.}$$

e la quarantunesima per

$$t'' = \frac{81}{8}\,T \qquad c = \frac{8}{81}\,\frac{d}{T} \qquad T = 3{,}29 \cdot 10^{-7} \qquad \lambda = 98{,}8 \text{ m.}$$

Questi intervalli tra due estinzioni sono separati da tratti nei quali la luce comparisce e presenta un massimo quando siano soddisfatte le condizioni *a*) e *b*). I massimi si presenteranno per i periodi delle radio onde e le lunghezze delle stesse secondo l'unito specchietto:

massimo	t	c	$T \cdot 10^6$	λ
1	$\frac{1}{4}$ T	$4\ \frac{d}{T}$	13 33	4000
2	$\frac{1}{2}$ T	$2\ \frac{d}{T}$	6,67	2000
3	$\frac{3}{4}$ T	$\frac{4}{3}\ \frac{d}{T}$	4,44	1333
4	T	$\frac{d}{T}$	3,33	1000
5	$\frac{5}{4}$ T	$\frac{4}{5}\ \frac{d}{T}$	2,66	800
6	$\frac{3}{2}$ T	$\frac{2}{3}\ \frac{d}{T}$	2,22	667
.....				
9	$\frac{9}{4}$ T	$\frac{4}{9}\ \frac{d}{T}$	1,48	444
10	$\frac{5}{2}$ T	$\frac{2}{5}\ \frac{d}{T}$	1,33	400
11	$\frac{11}{4}$ T	$\frac{4}{11}\ \frac{d}{T}$	1,21	364
.....				
39	$\frac{39}{4}$ T	$\frac{4}{39}\ \frac{d}{T}$	0,342	102,5
40	10 T	$\frac{1}{10}\ \frac{d}{T}$	0,333	100
41	$\frac{41}{4}$ T	$\frac{4}{41}\ \frac{d}{T}$	0,325	97,5

Si ha quindi la possibilità di fare una numerosa serie di misure e perciò di scegliere quelle che più saranno convenienti. Si vede intanto che l'esattezza andrà aumentando col crescere della frequenza delle radio onde usate. Su questo punto ritornerò in altra mia, nella quale spiegherò particolari accorgimenti atti a raggiungere una grande esattezza nelle misure.

Da quanto precede risulta che la sorgente di luce A al fine immediato delle misure potrebbe essere tralasciata. Essa invece è utile per la precisione delle misure, come si vedrà nell'altra Nota.

Con onde lunghe circa m. 100, corrispondenti agli ultimi casi esaminati, si ha $\lambda = 12{,}5$ m. Siamo ancora nelle condizioni supposto che esse siano grandi rispetto all'eventuale spostamento della Terra nella durata del tragitto delle onde, che è di soli 10 cm.

Che se poi, come vuole la teoria della relatività, il moto della Terra non ha effetto sulla velocità della luce, si potrà ricorrere a onde anche

più corte e con ciò aumentare notevolmente la precisione della misura. Ma di questo caso tratterò in una prossima Nota.

Nel caso pratico non sarebbe facile far variare i periodi con continuità in modo da cogliere i successivi passaggi dalla trasmissione della luce all'intercettazione, come avviene col metodo della ruota dentata. Bisognerà accontentarsi di fare le osservazioni per qualche valore del periodo; però sarà possibile trovare per ognuna di queste, il corrispondente valore di n, perchè valori che differiscano da esso anche solo di un'unità, darebbero per la velocità della luce dei risultati troppo discordi dal vero.

Fisica. — *Sulla dipendenza del raggio nucleare dal peso atomico.* Nota di E. Amaldi e B. N. Cacciapuoti, presentata [1] dal Corrisp. E. Amaldi.

Recentemente abbiamo misurato, in collaborazione con D. Bocciarelli e G. C. Trabacchi [2], il raggio nucleare di 19 elementi di numero atomico variabile tra 4 e 83, e abbiamo cercato di rappresentare i nostri risultati sperimentali a mezzo di una espressione lineare nella radice cubica del numero atomico:

$$R = b + r_0 A^{1/3} . \tag{1}$$

I valori numerici delle costanti b e r_0, determinati per interpolazione grafica, attribuendo di proposito un maggior peso ai risultati relativi agli elementi di elevato numero atomico, sono

$$\begin{cases} b : \text{fra } 1{,}5 \times 10^{-13} \text{ e } 2{,}0 \times 10^{-13} \text{ cm.} \\ r_0 : \text{fra } 1{,}3 \times 10^{-13} \text{ e } 1{,}0 \times 10^{-13} \text{ cm.} \end{cases} \tag{2}$$

Non è forse inutile ripetere l'osservazione già fatta nel lavoro precedentemente citato, che il termine costante b rappresenta l'effetto superficiale del nucleo, ossia il contributo apportato al valore di R dal raggio di azione delle forze nucleari delle particelle superficiali; la definizione di raggio nucleare R a cui si riferiscono le nostre misure è infatti la seguente: R è la distanza dal centro del nucleo a cui un neutrone veloce comincia a risentire dell'azione di questo.

Tale definizione differisce per esempio da quella usata da varî autori [3] i quali, per confrontare le energie di legame delle coppie di isobari contigui speculari, definiscono il raggio nucleare come il raggio del volume entro cui sono distribuiti i protoni. Come è naturale attendersi in base alle due diverse definizioni, in tutti i casi in cui è stato possibile fare il confronto,

(1) Nella seduta dell'8 marzo 1947.

(2) E. Amaldi, D. Bocciarelli, B. N. Cacciapuoti, G. C. Trabacchi, «N. Cimento».

(3) H. A. Bethe, «Phys. Rev.», *54*, 436, 1938; E. P. Wigner, «Phys. Rev.», *56*, 519, 1939.

i valori che si possono dedurre delle considerazioni di questi autori risultano inferiori ai nostri per circa una unità in 10^{-13} cm.

Come abbiamo già fatto notare nel precedente lavoro, i valori di R da noi trovati, per quanto piuttosto accurati, non permettono di determinare con precisione i valori di b ed r_0, in quanto i singoli punti scartano sensibilmente dall'andamento rettilineo (1).

Ci è quindi sembrato opportuno riesaminare il problema applicando ai nostri dati alcune considerazioni simili ai criteri statistici che vengono impiegati per giudicare della « bontà di adattamento » (goodness of fit) di una curva teorica a un dato gruppo di dati sperimentali, pur tenendo presente il limitato valore che si deve attribuire in generale a tali procedimenti in corso di stampa.

Nella seconda colonna della tabella I sono riportati i valori di $R_i \pm \delta R_i$ per 17 elementi. Abbiamo infatti omesso il risultato relativo al C, perchè ottenuto con una disposizione lievemente diversa da quella impiegata negli altri casi, e quello relativo all'Au, perchè poco preciso a causa della limitata quantità di questo elemento impiegata nelle misure.

Nella terza colonna è riportato il rapporto dell'errore statistico allo scarto quadratico medio; l'errore δR_i dato nella seconda colonna è, in ciascun caso, il maggiore dei due. Rimandando al lavoro già citato per una dettagliata discussione del modo in cui sono stati calcolati i due suddetti errori, ci limitiamo qui a far notare che il fatto che tale rapporto risulti, in circa la metà dei casi, maggiore di 1 e in circa la metà dei casi minore di 1, è un buon indizio che nelle nostre misure l'errore principale sia quello puramente statistico. Ciò significa che la probabilità che il valore vero scarti di ΔR_i dal valore osservato può essere rappresentata da una legge di distribuzione normale (legge Gaussiana).

Una volta chiarito questo punto possiamo proporci il seguente problema: ammesso che gli scarti dei punti osservati dalla retta interpolatrice siano puramente casuali, vogliamo calcolare la probabilità di osservare una distribuzione di punti che scarti dalla retta interpolatrice di quanto o più dei punti osservati.

Con considerazioni elementari si riconosce che tale probabilità è data dalla espressione.

$$P = \int_{\sqrt{\chi^2}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \chi^{n-1} d\chi \Big/ \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \chi^{n-1} d\chi \tag{3}$$

dove

$$\chi^2 = \sum_1^n{}_i \left(\frac{\Delta R_i}{\delta R_i} \right)^2 \tag{4}$$

n è il numero dei punti misurati e utilizzati per il confronto con la retta interpolatrice (1) ossia nel nostro caso $n = 17$. ΔR_i sono gli scarti dei punti osservati dalla retta interpolatrice e i δR_i i corrispondenti errori sperimentali dati nella 2ª colonna della tabella I.

TABELLA I.

Elemento	$(R_i \pm \delta R_i) \cdot 10^{-13}$ cm.	Errore statistico / Scarto quadratico
4 Be	$3{,}22 \pm 0{,}074$	1,5
5 B	$4{,}30 \pm 0{,}24$	—
12 Mg	$5{,}40 \pm 0{,}13$	0,55
13 Al	$5{,}54 \pm 0{,}11$	0,63
16 S	$5{,}02 \pm 0{,}14$	2
26 Fe	$6{,}63 \pm 0{,}06$	1,2
28 Ni	$6{,}47 \pm 0{,}074$	1,5
29 Cu	$6{,}75 \pm 0{,}15$	0,3
30 Zn	$6{,}96 \pm 0{,}17$	3
34 Se	$7{,}31 \pm 0{,}20$	0,55
47 Ag	$7{,}81 \pm 1{,}09$	1,3
48 Cd	$8{,}23 \pm 0{,}07$	2,3
50 Sn	$8{,}50 \pm 0{,}085$	4
51 Sb	$8{,}33 \pm 0{,}096$	10
80 Hg	$9{,}50 \pm 0{,}16$	0,58
82 Pb	$9{,}60 \pm 0{,}071$	0,87
83 Bi	$9{,}08 \pm 0{,}097$	3,7

Si noti che la (3) risulta formalmente identica alla funzione P introdotta dal Pearson per la così detta «prova del χ^2»; nel nostro caso però la definizione di χ^2 differisce sensibilmente da quella data dal Pearson.

Fra tutte le rette del tipo (1) la più conveniente agli effetti del calcolo di P è evidentemente quella che rende minimo χ^2. In pratica data la definizione (4) di questa grandezza ciò equivale a determinare le costanti b ed r_0 della (1) a mezzo del metodo dei minimi quadrati tenendo conto della diversa precisione δR_i dei singoli punti.

In tal modo si trova

$$(5) \qquad \begin{cases} b = (0{,}696 \pm 0{,}082) \times 10^{-13} \text{ cm.} \\ r_0 = (1{,}52 \pm 0{,}02) \times 10^{-13} \text{ cm.} \end{cases}$$

ossia due valori notevolmente diversi dai valori (2) dedotti per interpolazione grafica dando intenzionalmente un maggior peso agli elementi pesanti che a quelli leggeri.

Il valore di χ^2 quale si deduce in base alla definizione (4) dai valori sperimentali della tabella (1) e dalla rappresentazione (1) e (5) è

$$\chi^2 \simeq 270$$

al quale, per $n = 17$, corrisponde un valore piccolissimo della funzione P definita dalla (3). Dalle tabelle del Pearson [4] si trova che per $n = 17$, P è inferiore a 10^{-6} già per $\chi^2 = 70$.

Si può quindi concludere che la rappresentazione (1) non è buona, nel senso che nell'ipotesi che gli errori siano puramente accidentali la distribuzione da noi trovata per gli scarti dei valori sperimentali dalla legge lineare (1) ha una probabilità di essere osservata piccolissima.

Come è ben noto, non è però lecito invertire tale conclusione e dire che dal fatto che P è piccolissima segue che gli scarti dei valori sperimentali dalla legge (1) debbono essere sistematici, in quanto il criterio di « bontà di adattamento » impiegato ha un significato solo nel caso di errori puramente accidentali.

A noi sembra però che il fatto che P sia risultata piccolissima, costituisca una notevole indicazione a favore di una dipendenza, più complicata della semplice legge (1), del raggio nucleare dal numero di particelle costituenti un nucleo.

Cristallochimica. — *Regola di Zambonini e condizioni di isomorfismo* [1]. Nota [2] del Corrisp. C. Perrier.

Circa un quarto di secolo fa F. Zambonini [3], il grande Maestro della Mineralogia italiana troppo immaturamente scomparso, dava una assai soddisfacente interpretazione della causa dell'isomorfismo tra albite ed anortite riconducendola ad una analogia nelle dimensioni atomiche tra Na e Ca, e tra Si ed Al: Zambonini calcolava in base alla supposizione che nel reticolo ci fossero gli atomi, ma nulla muta ammettendo che ci siano gli joni ($Na^{1+} = 0{,}98$ Å , $Ca^{2+} = 1{,}06$ Å , $Si^{4+} = 0{,}39$ Å , $Al^{3+} = 0{,}57$ Å).

L'interpretazione venne universalmente accettata e poichè già si sapeva che le sostanze isomorfe hanno analoghe dimensioni dei volumi molecolari, essa può estendersi, per ovvie considerazioni di carattere reticolare [4] (analogia nelle dimensioni delle celle elementari), oltre che ai casi delle sostituzioni coniugate (caso sopra indicato), anche a quello delle sostituzioni semplici (una sola specie atomica sostituita da una o più specie atomiche analoghe) come pure a quello con formazione di cristalli misti del II tipo (possibilità di posti vacanti). L'ipotesi di Zambonini fu ampiamente ed utilmente sfruttata da Bragg ed altri nelle loro ricerche sui silicati, da Goldschmidt nelle sue famose ricerche sulle leggi della distribuzione geochimica degli elementi, da Machatschki nella creazione delle formule cristallochimiche dei minerali, ed

(4) R. Pearson, *Tables for statisticians and biometricians*, Parte I.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Genova.

(2) Presentata nella seduta del 14 dicembre 1946.

(3) F. Zambonini, « Rend. Accad. Lincei » [5ª] XXXI (1922) 295.

(4) C. Perrier, *Corso di Mineralogia*. Bozzi, Genova, 1946.

è, spesso, nota come *regola di Zambonini*. In sostanza essa viene sempre impiegata da chiunque si occupi di questioni di isomorfismo, e certi autori americani la chiamano addirittura *legge di Zambonini*: ad ogni modo, comunque la si chiami, essa può esprimersi dicendo: *nella formazione di cristalli misti, in esteso rapporto, le dimensioni delle particelle sostituentisi sono molto simili.*

« Naturalmente, un atomo di Al può prendere il posto di un atomo di Si non soltanto per la piccola differenza che esiste fra i diametri atomici dei due elementi, ma anche per il fatto che l'Al presenta con il Si delle *relazioni interessanti* ». Se anche queste « relazioni interessanti » cui accenna Zambonini e che sono, poi, di carattere chimico, non si riconoscono affatto tra Mg^{2+} e Fe^{3+} nel caso del diopside ($CaMgSi_2O_6$) e dell'acmite ($NaFeSi_2O_6$), che egli porta come altro esempio della sua ipotesi, è indubbio che con le sue parole egli ammoniva, e giustamente, di non dare ad essa un significato troppo materiale. La possibilità di una sostituzione isomorfa deve, quindi, essere ricercata non solo nell'esistenza di analogie geometriche tra le particelle ma anche in qualche altra loro analogia.

Intanto, poichè come premessa per l'isomorfismo stanno le condizioni di omeomorfismo, queste costituiranno pure premessa per l'applicabilità della regola di Zambonini. Tali condizioni, come sono state formulate da Goldschmidt successivamente al lavoro di Zambonini, possono esprimersi così:

1° *Analogia di formula chimica bruta.*

2° *Analogia di struttura cristallina*, la quale, essendo determinata dalla condizione della corrispondenza dei numeri di coordinazione delle particelle nei due reticoli, include, implicitamente, le condizioni di una analogia nel rapporto dei raggi delle particelle dei complessi interessati e di una analogia delle loro azioni di polarizzazione (5). Come è noto, queste ultime possono essere tali da far variare il tipo di reticolo, come succede con il CaS (reticolo tipo NaCl) ed il CdS (tipo wurtzite), che pure hanno identico rapporto r_A/r_X, almeno quando si calcola con raggi jonici.

Ora le condizioni 1° e 2° possono benissimo verificarsi ma non per questo si può dire che siano anche verificate le condizioni che permettono l'applicabilità della regola di Zambonini.

Consideriamo il caso del PbS e del SrS: entrambi hanno lo stesso tipo di reticolo (NaCl) e, praticamente, le stesse distanze interleptoniche, che, in entrambi i casi si accordano meglio con somme di raggi jonici che con somme di raggi atomici: i rapporti dei raggi, sia jonici che atomici, sono abbastanza prossimi ed entrambi compatibili con la struttura da essi presentata. Se si tien conto che i raggi jonici del Pb e dello Sr sono quasi eguali, si dovrebbe dedurre che, essendo soddisfatte le condizioni di omeomorfismo, sarebbero realizzate anche le condizioni per l'applicabilità nella regola di Zambonini, e, quindi, le due sostanze dovrebbero essere isomorfe. Come è ben noto, questo non si verifica.

(5) C. PERRIER, *Corso di Mineralogia*. Cap. Cristallografia Chimica.

TABELLA.

	PbS				SrS			
r_{Pb}	1,72	$r_{Pb^{2+}}$	1,32		r_{Sr}	2,13	$r_{Sr^{2+}}$	1,27
r_S	1,06	$r_{S^{2-}}$	1,74		r_S	1,06	$r_{S^{2-}}$	1,74
	2,78		3,06			3,19		3,01
Pb—S	— 2,97		— 2,97		Sr—S	— 3,01		— 3,01
	— 0,19		+ 0,09			+ 0,18		0,00
r_A/r_X			0,759					0,730
r_g/r_p	0,61					0,50		

Ora ben diverso è lo stato dei leptoni nella galena e nel SrS: quì si tratta di un reticolo veramente e tipicamente jonico, mentre nel PbS la conducibilità metallica, quella termica, la sua opacità stanno a dimostrare che in esso i leptoni non sono sicuramente in uno stato jonico, ma in uno assai prossimo allo stato di atomi neutri.

In conseguenza si comprende subito perchè, pur essendo verificate le condizioni di omeomorfismo, i due corpi non possono dare cristalli misti, e, di conseguenza, perchè non possa applicarsi la regola di Zambonini, dovendosi una volta considerare raggi atomici ed una volta raggi jonici.

All'epoca in cui Zambonini esponeva il suo principio le nostre conoscenze sulla dinamica del reticolo cristallino cominciavano appena a profilarsi ad opera, specialmente, della geniale opera di Born ed allievi; però, attraverso i successivi magistrali lavori di Heitler e London e della scuola americana, fra i quali si possono ricordare quelli di Pauling, esse hanno raggiunto un grado abbastanza soddisfacente. Quello che noi possiamo, ora, affermare, sulla base delle nostre migliorate conoscenze della dinamica del reticolo cristallino, è che, se si vuole che un leptone possa venire sostituito isomorficamente con un altro, il campo di forze determinato dal leptone sostituente non deve essere sostanzialmente diverso, qualitativamente e quantitativamente, da quello determinato dal leptone sostituito.

Ma ciò costituisce, evidentemente, condizione di isomorfismo, e di queste condizioni la regola di Zambonini verrebbe a costituire una parte. In conseguenza, se noi teniamo conto che leptoni in analogo stato fisico determineranno anche analoghi campi di forza (analoghi tipi di legami), ed introduciamo queste considerazioni nelle condizioni di isomorfismo (oltre quelle dell'omeomorfismo) aggiungendo:

3° *Analogia dello stato fisico ed analogia delle azioni fisiche esercitate da parte dei leptoni corrispondentisi nei due reticoli.* – la regola di Zambonini verrebbe a costituire la quarta condizione dell'isomorfismo, e cioè

4° *Analogia nelle dimensioni delle particelle vicarianti.* – La 3ª corrisponderebbe alla conservazione del carattere qualitativo del campo di forza, la 4ª alla conservazione del carattere quantitativo.

Nel caso dei silicati naturali i leptoni sono, si può dire, sempre di natura jonica: lo stesso Si nei tetraedri $[SiO_4)]$ può considerarsi allo stato jonico e la sua sostituzione con l'Al^{3+} non determina variazioni qualitative nel campo di forza (essenzialmente coulombiano) da esso esercitato, mentre, d'altra parte, il rapporto dei raggi jonici dell'Al e dell'O è compatibile con una coordinazione tetraedrica per l'Al.

Ragionamenti analoghi valgono per tutti gli altri casi, ma è interessante osservare che con questi criteri la formazione di certi cristalli misti, come quelli tra $BaSO_4$ e $KClO_4$, che appare così strana da un punto di vista puramente chimico, risulti invece perfettamente comprensibile. Gli è che quello che interessa è il lato fisico della questione, quello chimico interessa solo indirettamente, nel senso di lasciare persistere o fare variare il carattere del campo per effetto della sostituzione, cioè nel senso di determinare una sostituzione di carattere isomorfico o di carattere morfotropico.

La condizione 3ª sopra indicata potrebbe apparire in contrasto con l'esistenza di cristalli misti di tipo II, dove si hanno sostituzioni: *leptoni* $\rightleftarrows$ *punti nodali vacanti*. La contraddizione è, in realtà, solo apparente: infatti già nel composto puro, quello con punti nodali vacanti, la distribuzione di questi è statistica, e ciò significa che le azioni esercitate dallo jone che occupa quel tale gruppo di nodi in questa maniera particolare sono perfettamente compatibili con le azioni esercitate su quei prodi dagli joni circostanti. Ora perchè si formino cristalli misti occorre che le azioni esercitate dallo jone vicariante siano simili a quelle dello jone sostituito, e ciò è precisamente quanto postula la condizione 3ª. Ogni contraddizione viene, quindi, a cadere.

Il concetto della persistenza del carattere del campo di forze attraverso la sostituzione ci permette, poi, di comprendere agevolmente perchè certi corpi anche con il crescere della temperatura non diano mai cristalli misti, mentre altri, che pur non ne danno, o quasi, alla temperatura ordinaria (e a temperature più basse la solubilità reciproca diminuirebbe ancora ulteriormente), a temperatura elevata mostrano magari solubilità completa, come succede tra NaCl e KCl a ca. 600°. Ciò può essere interpretato pensando che se i campi sono dello stesso tipo, per effetto delle variazioni nell'ampiezza di oscillazione, diversa nei due leptoni vicarianti, provocata da un aumento di temperatura, i gradienti di essi tendono a diventare, per una stessa distanza dal punto medio di oscillazione, più simili tra di loro per i due leptoni, tali quindi da non alterare le condizioni generali di equilibrio del sistema quando si opera la sostituzione. Una simile situazione non sarebbe mai raggiungibile se si hanno già (e se persistono) differenze qualitative dei campi di forze.

Un tale modo di spiegare le cose non pare, tuttavia ancora sufficente, in linea generale, perchè sembrerebbe attribuire l'effetto, sostanzialmente, solo ad una adeguata variazione relativa del campo coulombiano, cosa che porterebbe ad una variazione tale del raggio di uno degli joni, da renderlo

più simile a quello dell'altro. Ora questo non sempre si verifica e proprio non si verifica nel caso del Na e del K dove la differenza nei loro raggi a temperatura ordinaria ed a 600° è, praticamente, identica.

In tali casi, forse i più numerosi, la maggiore analogia delle azioni dei due joni deve, con ogni verosimiglianza almeno, essere ricercata nel fatto che, per uno di essi, il contributo apportato alla energia di reticolato da parte delle varie energie che ad essa concorrono, per esempio da parte della energia di van der Waals, cresca col crescere della temperatura, almeno relativamente, ed in modo tale da rendere più similare l'azione dei due joni, cosicchè questi potrebbero, allora, funzionare da vicarianti. In ogni caso, però, si tratterebbe sempre di variazioni di azioni di natura quantitativa e non qualitativa, ma se i limiti di applicazione della regola di Zambonini [condizione 4ª] vengono ampliati, non per questo cessa di essere valida la condizione 3ª.

Da quanto è stato detto mi pare che la regola di Zambonini risulti meglio caratterizzata e precisata, ed inoltre che, attraverso il concetto della persistenza del carattere *qualitativo* del campo, essa possa anche servire, in qualche caso almeno, già per prevedere fatti e non interpretarli solo a *posteriori*.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Algebra. — *Risoluzione apiristica dei sistemi di equazioni algebriche nei corpi finiti*. Nota di Giuseppe Mignosi, presentata [1] dal Corrisp. M. Cipolla.

Il procedimento ideato dal Cipolla [2] per la risoluzione apiristica delle equazioni di grado qualunque con una sola incognita in un corpo finito C, può essere esteso al caso dei sistemi di equazioni algebriche in C con un numero qualunque di incognite. L'estensione è subordinata ad opportuni ampliamenti delle nozioni di *sistema completo di dato grado* e di *numero n^ico* nel corpo C, ed è fondata sopra una formula interpolare propria per i corpi finiti, assai più vantaggiosa dell'ordinaria formula d'interpolazione di Lagrangia, che potrebbe essere adoperata allo stesso scopo [3].

Tale formula interpolare è intimamente connessa al teorema di Fermat per i corpi finiti, dal quale è dominato tutto il calcolo con i numeri dei detti corpi. Secondo questo teorema, com'è noto [4], ogni numero x di C verifica l'equazione

$$x^N = x,$$

(1) Nella seduta del 14 dicembre 1946.

(2) M. Cipolla, *Formule di risoluzione apiristica delle equazioni di grado qualunque in un corpo*. [« Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », to. 54, a. 1930].

(3) G. Scorza, *La risoluzione apiristica delle congruenze binomie e la formula d'interpolazione di* Lagrangia. [« Rendiconti R. Acc. dei Lincei », ser. 6ª, vol. III, 1926, pp. 390–394].

(4) G. Scorza, *Corpi numerici e Algebre*. [Principato, Messina, a. 1921].

dove N (potenza di un numero primo π) è l'ordine di C e se x non è lo zero di C, si ha sempre:

$$x^{N-1} = 1 .$$

Considerando un sistema di equazioni algebriche in C dei gradi rispettivi $m, \mu, \cdots$ complessivamente nelle incognite $x, y, \cdots$, si supponga di assumere in ciascuna di esse uno almeno dei coefficienti come parametro arbitrario in C, ritenendo numericamente assegnati in C i coefficienti rimanenti.

Se $p, q, \cdots$, sono tali parametri, ad ogni complesso di polinomi in C nelle indeterminate $p, q, \cdots$ che sia soluzione del sistema per ogni sistema di valori di $p, q, \cdots$ in C, per i quali il sistema dato ammetta in C tante soluzioni quant'è il prodotto $n = m\mu\cdots$ sarà detto da noi una *soluzione apiristica* del sistema.

La nozione di *soluzione apiristica* fu introdotta originariamente dal Cipolla [5] allo scopo di svincolare dal procedimento *empirico* dei tentativi, la risoluzione delle congruenze binomie secondo un modulo primo dispari.

Successivamente tale nozione è stata estesa per le congruenze dall'Amato [6] e dal Sansone [7] e per i corpi finiti dallo Scorza [8], dallo stesso Cipolla e da Gaspare Mignosi [9] per quel che riguarda le equazioni algebriche con una sola incognita.

L'estensione ai sistemi di equazioni algebriche che presentiamo in questa Nota, dove precisiamo anche qualche punto della teoria conosciuta sull'argomento offre il vantaggio di comprendere, in particolare, la risoluzione apiristica dei sistemi di congruenze condizionali con quante si vogliano incognite, secondo un modulo primo π, poichè è noto che gli ordinari interi relativi calcolati (mod π) costituiscono un corpo finito d'ordine π.

1. LE COPPIE n^{ICHE} DI UN CORPO RISPETTO A POLINOMI. – Per motivi di chiarezza e per evitare complicazioni simboliche superflue, limitiamoci a considerare un sistema di due equazioni algebriche con due incognite x, y dei gradi rispettivi m, μ nel complesso delle incognite, a coefficienti in un corpo C d'ordine N.

(5) M. CIPOLLA, *Sulla risoluzione delle congruenze binomie secondo un modulo primo.* [« Mathematische Annalen », Band. LXIII (1906), pp. 54–61].

(6) V. AMATO, *Sulla risoluzione apiristica, in un corpo quadratico, delle congruenze binomie secondo un ideale primo.* [« Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », to. XLII (1917), pp. 48–60]; *Sulla risoluzione apiristica, in un corpo quadratico, della congruenza binomia quadratica, e di una classe di congruenze binomie il cui modulo è un ideale primo di 2° grado* [loc. cit. pp. 339–351].

(7) G. SANSONE, *Nuove formule risolutive delle congruenze cubiche.* [« Rend. della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli », ser. 4ª, vol. XXXV (1929)].

(8) G. SCORZA, *La risoluzione apiristica delle congruenze binomie e la formula d'interpolazione di Lagrange.* [« Rend. della R. Accademia nazionale dei Lincei », ser. 6ª, vol. III (1906), pp. 390–394].

(9) G. MIGNOSI, *Risoluzione apiristica dell'equazione generale cubica in un corpo finito.* [« Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », to. LIII (1929), pp. 411–427].

Esclusa per il sistema la soluzione: $(x = 0\,,\ y = 0)$, immaginiamo risolute le equazioni del sistema rispetto ai termini $p\,,\ q$ indipendenti da x ed y così che il sistema abbia la forma

$$(1) \qquad \begin{cases} f(x\,,y) = p \\ g(x\,,y) = q \end{cases}$$

ed assumiamo i detti termini p e q come parametri non nulli e arbitrarî in C, mentre i rimanenti coefficienti dei polinomi $f(x\,,y)$ e $g(x\,,y)$ siano da ritenere numericamente assegnati in C.

I gradi dei polinomi (non nulli) f e g relativi ad x e ad y non superano m in $f(x\,,y)$ e μ in $g(x\,,y)$ e per il teorema di Fermat si può supporre

$$m < \mathrm{N} - 1 \quad , \quad \mu < \mathrm{N} - 1$$

e quindi:

$$(2) \qquad n < \mathrm{N}^2 - 1\,,$$

avendo posto $n = m\,\mu$.

Una coppia ordinata $(p_i\,,q_i)$ di valori non nulli in C dei parametri $p\,,q$ in corrispondenza alla quale il sistema (1) ammetta n soluzioni $(x\,,y)$ distinte, ciascuna ad elementi $x\,,y$ non entrambi nulli, sarà detta da noi una *coppia n^{ica} di* C *rispetto* alla *coppia di polinomi* f e g.

E *risolvere apiristicamente* il sitema (1) significa costruire una coppia ordinata di polinomi

$$(3) \qquad \mathrm{A}(p\,,q) \quad , \quad \mathrm{B}(p\,,q)$$

nelle indeterminate $p\,,q$ a coefficienti in C, la quale sia una soluzione del sistema (1) tutte le volte che $(p\,,q)$ sia una coppia n^{ica} rispetto ad f e g.

Tutto ciò in perfetta analogia e in estensione della terminologia adoperata per il caso di una sola equazione con una sola incognita.

2. Al fine di costruire i polinomi apiristici (3), nella coppia di funzioni $f(x\,,y)\,,g(x\,,y)$ facciamo percorrere ad $(x\,,y)$ le $\mathrm{N}^2 - 1$ disposizioni binarie con eventuali ripetizioni degli N numeri del corpo C, escludendo la coppia nulla (0 , 0) e delle corrispondenti coppie di valori di $f(x\,,y)$ e $g(x\,,y)$ riteniamo, ove esistano, solamente quelle formate da numeri *non nulli e che si presentano n volte*.

Se in tal modo si suppone di ottenere

$$\begin{cases} f(r_1\,,s_1) = f(r_1'\,,s_1') = \cdots = f(r_1^{(n-1)}\,,s_1^{(n-1)}) = p_1 \\ g(r_1\,,s_1) = g(r_1'\,,s_1') = \cdots = g(r_1^{(n-1)}\,,s_1^{(n-1)}) = q_1\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(r_2\,,s_2) = f(r_2'\,,s_2') = \cdots = f(r_2^{(n-1)}\,,s_2^{(n-1)}) = p_2 \\ g(r_2\,,s_2) = g(r_2'\,,s_2') = \cdots = g(r_2^{(n-1)}\,,s_2^{(n-1)}) = q_2\,, \end{cases}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{cases} f(r_\nu\,,s_\nu) = f(r_\nu'\,,s_\nu') = \cdots = f(r_\nu^{(n-1)}\,,s_\nu^{(n-1)}) = p_\nu \\ g(r_\nu\,,s_\nu) = g(r_\nu'\,,s_\nu') = \cdots = g(r_\nu^{(n-1)}\,,s_\nu^{(n-1)}) = q_\nu \end{cases}$$

le coppie distinte di numeri non nulli di C:

$$(4) \qquad (p_1, q_1) \ , \ (p_2, q_2), \cdots, (p_\nu, q_\nu)$$

sono evidentemente tutte e sole le coppie *niche* di C rispetto ai polinomi f e g.

Le coppie del quadro dei ν sistemi

$$(5) \qquad \begin{cases} (r_1, s_1) \ , \ (r_1', s_1'), \cdots, (r_1^{(n-1)}, s_1^{(n-1)}) \\ (r_2, s_2) \ , \ (r_2', s_2'), \cdots, (r_2^{(n-1)}, s_2^{(n-1)}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (r_\nu, s_\nu) \ , \ (r_\nu', s_\nu'), \cdots, (r_\nu^{(n-1)}, s_\nu^{(n-1)}), \end{cases}$$

essendo distinte, sono in numero di νn e poichè il numero totale delle coppie di numeri non entrambi nulli di C è $N^2 - 1$, così si ha la limitazione

$$\nu n \leqq N^2 - 1$$

donde segue

$$\nu \leqq \frac{N^2 - 1}{n},$$

cioè, che il numero ν delle coppie *niche* di C rispetto ad f e g non supera il massimo intero contenuto nel rapporto $(N^2 - 1)/n$ che a causa della (2) è maggiore di 1.

Può però accadere che sia $\nu = 0$, ossia che non esistano nel corpo C coppie *niche* rispetto ad f e g o, in altri termini, che non esistano in C, coppie di numeri non nulli p, q tali che il sistema (1) di equazioni ammetta n soluzioni distinte.

3. SISTEMI COMPLETI DI GRADO n. – Da ciascuno dei ν sistemi (5) scegliamo ad arbitrio una coppia così da ottenere ogni volta un sistema di ν coppie, come per esempio

$$(6) \qquad (r_1, s_1) \ , \ (r_2, s_2), \cdots, (r_\nu, s_\nu)$$

di numeri non entrambi nulli di C. Se ν non è nullo, di tali sistemi ne esistono n^ν e a ciascuno di essi sarà dato, per estensione, il nome di *sistema completo di coppie di grado n* di C *rispetto* ad f e g.

Un sistema completo di grado n di C rispetto ad f e g, come il sistema (6), ha la proprietà che *le coppie di valori assunti dalla coppia di polinomi* $f(x, y)$, $g(x, y)$ *per ciascuna coppia* (6) *sono tutte e soltanto le coppie niche di* C *rispetto ad* f e g; cioè si ha:

$$\begin{cases} f(r_1, s_1) = p_1 \\ g(r_1, s_1) = q_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} f(r_2, s_2) = p_2 \\ g(r_2, s_2) = q_2 \end{cases}, \cdots, \begin{cases} f(r_\nu, s_\nu) = p_\nu \\ g(r_\nu, s_\nu) = q_\nu \end{cases}.$$

Naturalmente, se $\nu = 0$ non esistono in C coppie *niche* e quindi neanche sistemi completi di grado n rispetto ad f e g; ma se $\nu > 0$, esistono ν coppie *niche* ed n^ν sistemi completi di grado n rispetto ad f e g e le une e gli altri possono essere calcolati col procedimento indicato.

4. Costruzione di soluzioni apiristiche per i sistemi di equazioni algebriche. – Determinate le coppie n^{iche} (4) ed un sistema completo (6) del corpo C rispetto ad f e g, la questione di costruire una soluzione apiristica del sistema (1) si riduce ad un problema d'interpolazione, e questo nel corpo finito C dell'ordine N è risoluto dal sistema di formule interpolari:

$$(7)\qquad \begin{cases} A(p,q) = \sum_{i,1}^{\nu} r_i \left[1-(p-p_i)^{N-1}\right]\left[1-(q-q_i)^{N-1}\right] \\ B(p,q) = \sum_{i,1}^{\nu} s_i \left[1-(p-p_i)^{N-1}\right]\left[1-(q-q_i)^{N-1}\right] \end{cases}$$

cioè a dire: *la coppia ordinata* $A(p,q)$, $B(p,q)$ *di polinomi nelle indeterminate* p, q *definiti dalle posizioni* (7) *costituisce una soluzione apiristica del sistema di equazioni* (1).

Infatti, se (p,q) è una coppia n^{ica} di C rispetto ad f e g, deve (p,q) coincidere con una ed una sola delle coppie (4), poniamo (p_l, q_l); allora i termini delle sommatorie delle due formule (7), nelle quali sia fatto $p = p_l$ e $q = q_l$, corrispondenti al valore $i = l$ dell'indice i, in virtù del teorema di Fermat in C, si riducono rispettivamente ad r_l ed s_l, mentre i termini corrispondenti ai valori di $i \neq l$, sono, in virtù dello stesso teorema, tutti nulli, così che si ha:

$$A(p_l, q_l) = r_l \quad , \quad B(p_l, q_l) = s_l$$

e la coppia (r_l, s_l) è una soluzione del sistema (1), dove sia posto $p = p_l$ e $q = q_l$.

Dunque: *il problema della risoluzione apiristica del sistema* (1) *di equazioni algebriche nel corpo finito* C *d'ordine* N *è risoluto dal sistema di formule* (7), *dove* (p_i, q_i) $(i = 1, 2, \cdots, \nu)$ *sono le coppie* n^{iche} *ed* (r_i, s_i) $(i = 1, 2, \cdots, \nu)$ *un sistema qualunque di coppie di grado n di* C *rispetto ad* f *e* g.

5. Caratterizzazione delle coppie n^{iche}. – È da rilevare che la coppia di polinomi apiristici definiti dalle formule (7) può servire anche a caratterizzare completamente le coppie n^{iche} di C rispetto ad f e g.

Invero, in base alle (7) e in virtù del teorema di Fermat si riconosce subito che:

Affinchè una coppia (p,q) *di numeri di* C *sia* n^{ica} *rispetto ad* f *e* g *occorre e basta che, essendo* $A(p,q)$ *e* $B(p,q)$ *definiti dalle* (7), *sia verificata una almeno delle due condizioni:*

$$A^{N-1}(p,q) = 1 \quad , \quad B^{N-1}(p,q) = 1.$$

6. Calcolo dei coefficienti dei polinomi apiristici. – Passiamo ora al calcolo dei coefficienti dei due polinomi apiristici $A(p,q)$ e $B(p,q)$ rispetto alle indeterminate p e q.

Tenuto presente che nel corpo C d'ordine N, essendo $p_i \neq 0$ e $p \neq 0$, si ha:

$$\binom{N-1}{h} = (-1)^h \quad , \quad p^{N-1} = p_i^{N-1} = 1 \quad \text{e quindi} \quad p_i^{N-h-1} = \frac{1}{p_i^h},$$

si ottiene successivamente

$$1 - (p - p_i)^{N-1} = 1 - \sum_{h,0}^{N-1} (-1)^h \binom{N-1}{h} p^{N-h-1} p_i^h = - \sum_{h,0}^{N-2} \frac{p^h}{p_i^h},$$

quindi:

$$1 - (p - p_i)^{N-1} = - \sum_{k,0}^{N-2} \frac{p^h}{p_i^h}$$

ed analogamente:

$$1 - (q - q_i)^{N-1} = - \sum_{k,0}^{N-2} \frac{q^k}{q_i^k}.$$

Se ne deduce per la prima delle (7):

$$A(p, q) = \sum_{i,1}^{\nu} r_i \sum_{h,0}^{N-2} \frac{p^h}{p_i^h} \sum_{k,0}^{N-2} \frac{q^k}{q_i^k} = \sum_{h,k}^{0,N-2} p^h q^k \sum_{i,1}^{\nu} \frac{r_i}{p_i^h q_i^k},$$

ossia

$$A(p, q) = \sum_{h,k}^{0,N-2} A_{hk} p^h q^k, \tag{10}$$

avendo posto:

$$A_{hk} = \sum_{i,1}^{\nu} \frac{r_i}{p_i^h q_i^k}. \tag{11}$$

Se si vuole, poichè $p_i = f(r_i, s_i)$ e $q_i = g(r_i, s_i)$, si può anche scrivere:

$$A_{hk} = \sum_{i,1}^{\nu} r_i f^{N-h-1}(r_i, s_i) g^{N-k-1}(r_i, s_i). \tag{11'}$$

Allo stesso modo per la seconda delle (7) si ottiene:

$$B(p, q) = \sum_{h,k}^{0,N-2} B_{hk} p^h q^k \tag{12}$$

con

$$B_{hk} = \sum_{i,1}^{\nu} \frac{s_i}{p_i^h q_i^k} \tag{13}$$

oppure:

$$B_{hk} = \sum_{i,1}^{\nu} s_i f^{N-h-1}(r_i, s_i) g^{N-k-1}(r_i, s_i) \tag{13'}$$

Una volta determinati preventivamente un sistema completo (6) di coppie di grado n e il sistema (ove esista) delle coppie *niche* (4), le formule (11) e (11') e (13) e (13') sono sufficienti nei casi numerici a calcolare i coefficienti A_{hk} e B_{hk} della coppia apiristica $A(p, q)$ e $B(p, q)$ espressa dalle [10] e [12].

7. Dal punto di vista teorico riuscirebbe interessante che i coefficienti numerici assegnati dei polinomi $f(x, y)$ e $g(x, y)$ intervenissero esplicita-

mente nelle espressioni (11′) e (13′) dei coefficienti A_{hk} e B_{hk} dei polinomi $A(p, q)$ e $B(p, q)$.

Ciò è possibile, ma evidentemente le espressioni stesse perdono la loro semplicità.

Supponiamo che $f(x, y)$ e $g(x, y)$ siano polinomi omogenei di gradi positivi: m, μ e precisamente:

$$f(x, y) = x^m + a_1 x^{m-1} y + \cdots + a_{m-1} x y^{m-1} + a_m y^m$$
$$g(x, y) = x^\mu + b_1 x^{\mu-1} y + \cdots + b_{\mu-1} x y^{\mu-1} + b_\mu y^\mu$$

dove le a e le b sono numericamente assegnati nel corpo C.

In caso diverso $f(x, y)$ e $g(x, y)$ potrebbero spezzarsi nella somma di parti omogenee di gradi decrescenti sino al primo.

Per $x \neq 0$, $y \neq 0$ ed $f(x, y) \neq 0$ si ha, con le notazioni precedenti:

$$f^{N-h-1}(x, y) = \sum \frac{(N-h-1)!}{t_0!\, t_1! \cdots t_m!}\, a_1^{t_1} a_2^{t_2} \cdots a_m^{t_m}\, x^{mt_0+(m-1)t_1+\cdots+t_{m-1}}\, y^{t_1+2t_2+\cdots+mt_m}$$

il sommatorio essendo esteso alle soluzioni $(t_0, t_1, \cdots, t_m)$ intere non negative dell'equazione

$$t_0 + t_1 + t_2 + \cdots + t_m = N - h - 1. \tag{14}$$

Fissato nella successione $0, 1, 2, \cdots, N-2$ l'intero j, di tali soluzioni si considerino solo quelle soddisfacenti alla congruenza:

$$mh + t_1 + 2t_2 + \cdots + mt_m \equiv j \pmod{N-1} \tag{15}$$

Risultando allora

$$\begin{aligned} &mt_0 + (m-1)t_1 + \cdots + t_{m-1} \equiv -j \\ &t_1 + 2t_2 + \cdots + mt_m \equiv j - mh \end{aligned} \pmod{N-1}$$

i termini del precedente sommatorio corrispondenti a tali soluzioni avranno il fattore comune $x^{-j} y^{j-mh}$ e la loro somma è data dal prodotto

$$A_j^{(h)} x^{-j} y^{j-mh},$$

avendo posto:

$$A_j^{(h)} = \sum \frac{(N-h-1)!}{t_0!\, t_1! \cdots t_m!}\, a_1^{t_1} a_2^{t_2} \cdots a_m^{t_m} \tag{16}$$

in cui il sommatorio è esteso alle soluzioni intere non negative della (14) soddisfacenti alla (15).

Facendo ora variare j da 0 ad $N-2$ e sommando si ottiene:

$$f^{N-h-1}(x, y) = \sum_{j=0}^{N-2} A_j^{(h)} x^{N-j-1} y^{j-mh}$$

ed egualmente:

$$g^{N-k-1}(x, y) = \sum_{l=0}^{N-2} B_l^{(k)} x^{N-l-1} y^{l-\mu k}$$

con

$$(17) \qquad B_l^{(k)} = \sum \frac{(N-k-1)!}{\tau_1!\,\tau_2!\cdots\tau_\mu!}\, b_1^{\tau_1} b_2^{\tau_2} b_\mu^{\tau_\mu}$$

nella quale il sommatorio è esteso alle soluzioni intere non negative $\tau_0, \tau_1, \cdots, \tau_\mu$ dell'equazione

$$\tau_0 + \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_\mu = N - k - 1$$

che soddisfino la congruenza

$$\mu k + \tau_1 + 2\tau_2 + \cdots + \mu\tau_\mu \equiv l \pmod{N-1}.$$

Quindi si ha:

$$f^{N-h-1}(x,y)\, g^{N-k-1}(x,y) = \sum_{j,l}^{0,N-2} A_j^{(h)} B_l^{(k)} x^{N-j-l-1} y^{j+l-mh-\mu k}$$

Supponendo per ragioni di simmetria che gli elementi della coppia (r_i, s_i) del sistema completo (6) non siano nulli, questo risultato è applicabile per $x = r_i$, $y = s_i$ $(i = 1, 2, \cdots, \nu)$, per cui si ha:

$$r_i f^{k-h-1}(r_i, s_i)\, g^{N-k-1}(r_i, s_i) = \sum_{j,l}^{0,N-2} A_j^{(h)} B_l^{(k)} r_i^{N-j-l} s_i^{j+l-mh-\mu k}$$

ed

$$s_i f^{k-h-1}(r_i, s_i)\, g^{N-k-1}(r_i, s_i) = \sum_{j,l}^{0,N-2} A_j^{(h)} B_l^{(k)} r_i^{N-j-l-1} s_j^{j+l+1-ml-\mu k}$$

Infine, sommando rispetto ad i da 1 a ν, si ottiene, in base alla (11′) e (13′):

$$(18) \qquad A_{hk} = \sum_{j,l}^{0,N-2} A_j^{(h)} B_l^{(k)} \sigma_{jl} \quad , \quad B_{hk} = \sum_{j,l}^{0,N-2} A_j^{(h)} B_l^{(k)} \sigma_{jl+1}$$

avendo posto

$$\sigma_{jl} = \sum_{i,1}^{\nu} r_i^{N-j-l} s_i^{j+l-mh-\mu k}.$$

Tenute presenti la (16) e (17) con le quali $A_j^{(h)}$ e $B_l^{(k)}$ risultano numericamente determinati perchè espressi per mezzo dei coefficienti di f e g, le formule (18) permettono di concludere che i coefficienti cercati A_{hk} e B_{hk} dei polinomi apiristici $A(p, q)$, $B(p, q)$ sono combinazioni lineari delle somme σ_{jl} dei varî gradi degli elementi r_i, s_i $(i = 1, 2, \cdots, \nu)$ delle coppie di un sistema completo di grado n rispetto ad f e g.

Le formule alle quali si è pervenuti diverrebbero assai più complicate e soverchiamente prolisse volendo considerare il caso che f e g non siano omogenei. Esse hanno un interesse teorico e nei casi concreti è consigliabile servirsi delle formule (11′) e (13′) dopo di avere determinato un sistema completo di grado n, rispetto ad f e g, tanto più che questa determinazione preventiva è necessaria in ogni caso.

Analisi. — *Sopra un problema di T. Satô per l'equazione differenziale* $y''=f(x,y,y')$. Nota II di E. MAGENES, presentata[1] dal Corrisp. G. SANSONE.

1. Il teorema II della precedente Nota I[2] può essere esteso considerando funzioni $f(x,y,y')$ che soddisfano a condizioni meno restrittive di quelle ivi espresse, e più ampie anche di quelle poste da Satô nella Nota ivi considerata[3].

Si può infatti ottenere il seguente:

TEOREMA III. – *Sia* $f(x,y,y')$ *una funzione definita e continua nel campo* C: $x_0 \leq x \leq x_1$; $\sigma(x) \leq y \leq \tau(x)$; $|y'| < +\infty$, *dove* $\sigma(x)$ e $\tau(x)$ *sono due integrali dell'equazione differenziale*

$$(A) \qquad y'' = f(x,y,y')$$

uscenti dallo stesso punto (x_0, y_0) *definiti e continui nell'intervallo* (x_0, x_1) *e tali che per* $x_0 < x \leq x_1$ *sia* $\sigma(x) < \tau(x)$. *Si supponga inoltre che*: I) *esistano tre funzioni* $\psi_1(x), \gamma(y), \bar{\varphi}(y')$ *di cui le prime due siano non negative e integrabili rispettivamente sugli intervalli* (x_0, x_1) *e* (l_1, l_2) *dove* l_1 *e* l_2 *sono due numeri tali che* $l_1 \leq \sigma(x) \leq \tau(x) \leq l_2$ *in tutto* (x_0, x_1) *e la terza sia sempre positiva, continua in* $(-\infty + \infty)$ *e tale che*

$$\int_0^{+\infty} \frac{u}{\bar{\varphi}(u)}\, du = +\infty \quad ; \quad \int_{-\infty}^{0} \frac{u}{\bar{\varphi}(u)}\, du = -\infty$$

in modo che in tutti i punti di C *sia* $|f(x,y,y')| \leq \gamma(y)\,\bar{\varphi}(y') + \psi_1(x)$, *intendendo che o sia* $\psi_1(x) = 0$ *in quasi-tutto* (x_0, x_1) *oppure esista una costante* $k > 0$ *tale che sia sempre* $|u| \leq k\,\bar{\varphi}(u)$; II) *in tutto* C *valga la disuguaglianza* $f(x, y_1, y_1') \leq f(x, y_2, y_2')$ *per* $y_1 \leq y_2$; $y_1' \leq y_2'$. *Sia data inoltre una funzione* $\varphi(x)$ *continua insieme con le derivate prima e seconda in* (x_0, x_1) *e soddisfacente alle condizioni*:

$$\varphi(x) < \sigma(x) \text{ per } x_0 \leq x < \bar{x} \quad ; \quad \varphi(\bar{x}) = \sigma(\bar{x})$$

$$\sigma(x) < \varphi(x) < \tau(x) \text{ per } \bar{x} < x < x_1 \quad ; \quad \varphi(x_1) = \sigma(x_1);$$

$$\varphi''(x) < f(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \text{ in } (\bar{x}, x_1).$$

Allora l'equazione differenziale (A) *ammette un e un solo integrale* $y = \bar{Y}(x)$ *in* (x_0, x_1), *uscente dal punto* (x_0, y_0) *e tangente in almeno un punto alla curva* $y = \varphi(x)$, *il quale soddisfa in tutto* (x_0, x_1) *alla condizione*: $\sigma(x) \leq \bar{Y}(x) \leq \tau(x)$.

(1) Nella seduta del 14 dicembre 1946.

(2) *Sopra un problema di T. Satô per l'equazione differenziale* $y'' = f(x,y,y')$. Questi « Rendiconti », p. 130.

(3) T. SATÔ, *Sur l'équation différentielle* $y'' = f(x,y,y')$. «Proc. of the Imperial Acad. of Japan», vol. XIII (1937) pp. 348–351.

Infatti se $\bar{y}(x)$ è una soluzione del problema considerato, in queste nuove ipotesi essa verifica un lemma stabilito dal Tonelli [4], ed è quindi in tutto (x_0, x_1) $|\bar{y}'(x)| \leq L$, dove L è un opportuno numero determinato in base al lemma suddetto e indipendente da $\bar{y}(x)$. Indicato con M_1 il massimo modulo di $f(x, y, y')$ nel campo: $x_0 \leq x \leq x_1$; $\sigma(x) \leq y \leq \tau(x)$; $|y'| \leq L$ e chiamato M_2 un numero positivo maggiore del massimo di $|\varphi''(x)|$ in (x_0, x_1) poniamo:

$$F(x, y, y') = -M_1 \text{ se } f(x, y, y') < -M_1 ;$$

$$F(x, y, y') = f(x, y, y') \text{ se } -M_1 \leq f(x, y, y') \leq M_1 + M_2 ;$$

$$F(x, y, y') = M_1 + M_2 \text{ se } f(x, y, y') > M_1 + M_2$$

La nuova funzione $F(x, y, y')$ soddisfa alle condizioni del n. 2 della Nota I e per essa esiste quindi un integrale $\bar{Y}(x)$ soddisfacente all'enunciato del teorema II; d'altra parte, sempre per il lemma del Tonelli, è $|\bar{Y}'(x)| \leq L$ in (x_0, x_1) e poichè $F(x, y, y')$ coincide con $f(x, y, y')$ in tutti i punti di C per cui sia $|y'| \leq L$, ne segue che $\bar{Y}(x)$ è pure soluzione dell'equazione (A) [5].

2. Faremo ora vedere brevemente come è possibile ottenere i risultati raggiunti nella Nota I riportando la dimostrazione al teorema del Satô, mediante un opportuno metodo di approssimazione della $f(x, y, y')$, che si giova di una classe di funzioni considerata dal Tonelli nello studio delle funzioni di due variabili a variazione limitata [6], e di cui il Cinquini ha fatto uso nella dimostrazione di un teorema esistenziale per l'equazione differenziale di ordine n [7].

Precisamente, supposte verificate le condizioni del n. 2 della Nota I, definita la funzione $f_0(x, y, y')$ come nel n. 2 *a*) della stessa Nota e posto per ogni intero positivo m, $h_m = \frac{1}{m}$, costruiamo, per $m = 1, 2, \cdots$, le funzioni $f_m(x, y, y')$, ponendo per ogni x di (x_0, x_1) e per y e y' qualunque:

$$f_m(x, y, y') = \frac{1}{4 h_m^2} \int_{-h_m}^{h_m} \int_{-h_m}^{h_m} f_0(x, y + z_0, y' + z_1)\, dz_0\, dz_1$$

(4) V. L. TONELLI, *Sull'equazione differenziale* $y'' = f(x, y, y')$. «Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa», serie II, vol. VIII (1939) pp. 75–88, p. 87.

(5) In modo analogo, all'ipotesi I del teorema III può essere sostituità un'altra ancor più generale, posta in rilievo per gli ordinari problemi ai limiti dal CINQUINI nella Nota: *Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali di ordine n.* («Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa», serie II, vol. IX (1940) pp. 61–77) (v. p. 74). Infatti, con lo stesso artificio indicato nel n. 1, si può ricondurre la dimostrazione al caso del teorema II della Nota I.

(6) V. L. TONELLI, *Sulla definizione di funzione di due variabili a variazione limitata.* « Rend. R. Accademia dei Lincei», vol. VII (1928) p. 357 e sg.

(7) V. luogo citato in (5) pp. 69–73.

Le funzioni $f_m(x, y, y')$ risultano continue in C_∞ e soddisfacenti alle disuguaglianze

$$|f_m(x, y, y')| \leq M(x)$$

$$|f_m(x, y_1, y_1') - f_m(x, y_2, y_2')| \leq \frac{1}{h_m} M(x) [|y_1 - y_2| + |y_1' - y_2'|]$$

dove (y_1, y_1') e (y_2, y_2') sono due coppie qualunque di numeri reali. Inoltre in virtù delle (9) della Nota I risulta pure in C_∞ e per ogni m,

$$f_m(x, y_1, y_1') \leq f_m(x, y_2, y_2') \quad \text{per} \quad y_1 \leq y_2 \; ; \; y_1' \leq y_2'$$

e per $m \to \infty$ $f_m(x, y, y')$ converge verso $f_0(x, y, y')$ in C_∞ e uniformemente in ogni sottocampo limitato e chiuso di C_∞.

Consideriamo allora le equazioni

$$(1) \qquad y'' = f_m(x, y, y') \qquad m = 1, 2 \ldots$$

Per risultati noti sugli ordinari problemi ai limiti, esiste, per ogni m, uno e un solo integrale $\sigma_m(x)$ della (1) che passa per i punti $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ e $P_1 \equiv (x_1, \sigma(x_1))$. È possibile allora [8] estrarre dalla successione $\{\sigma_m(x)\}$ una successione $\{\sigma_k(x)\}$ convergente uniformemente per $k \to \infty$ a un integrale dell'equazione $y'' = f_0(x, y, y')$ passante per P_0 e P_1 il quale in virtù delle (9) della Nota I e del citato teorema di unicità di Scorza-Dragoni coincide con $\sigma(x)$.

Analogamente, dalla successione $\{f_k(x, y, y')\}$ corrispondente alla $\{\sigma_k(x)\}$ possiamo estrarre una successione $\{f_i(x, y, y')\}$ in modo che i corrispondenti integrali $\tau_i(x)$ passanti per P_0 e per $P_2 \equiv (x_1, \tau(x_1))$ convergano uniformemente verso $\tau(x)$. Fissato allora un $\rho > 0$ e minore del $\min_{(x_0, x-h)} (\sigma(x) - \varphi(x))$, del $\max_{(\bar{x}, x_1)} (\varphi(x) - \sigma(x))$ e del $\min_{(x_0, x_1)} (\tau(x) - \varphi(x))$, determiniamo un indice i_1 in modo che per $i \geq i_1$ risulti $|\sigma(x) - \sigma_i(x)| \leq \rho$, $|\tau(x) - \tau_i(x)| \leq \rho$. Si ha pure che $f_i(x, y, y')$ converge uniformemente verso $f_0(x, y, y')$ per $i \to \infty$ nel campo: $x_0 \leq x \leq x_1$; $|y| \leq K$; $|y'| \leq K$, con K scelto in modo che sia

$$|\varphi(x)| \leq K \quad \text{e} \quad |\varphi'(x)| \leq K \quad \text{in} \quad (x_0, x_1).$$

Di qui, e dalle (11) della Nota I segue che è possibile determinare un opportuno $i_2 \geq i_1$ tale che per $i \geq i_2$ sia pure

$$(2) \qquad f_i(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \geq \varphi''(x) + \frac{\eta}{4} \quad \text{in} \quad (\bar{x} - h, x_1)$$

Allora dalla (2) e dalle altre proprietà delle $f_i(x, y, y')$, ragionando analogamente a quanto fa il Satô nel n. 2 del suo lavoro, si dimostra facilmente che la curva $y = \sigma_i(x)$ per $i \geq i_2$ incontra la $y = \varphi(x)$ oltre che nel

(8) V. S. CINQUINI, luogo citato in (5), pp. 69-73.

punto x_1 in un altro unico punto x_i in modo che risultano complessivamente soddisfatte le:

$$\sigma_i(x_0) = \tau_i(x_0) = y_0 \quad ; \quad \varphi(x) < \sigma_i(x) \text{ per } x_0 \leq x < x_i$$

$$(\bar{x} - h < x_i) \quad ; \quad \varphi(x_i) = \sigma_i(x_i) \quad ; \quad \sigma_i(x) < \varphi(x) < \tau_i(x) \text{ per } x_i < x < x_1 ;$$

$$\sigma_i(x_1) = \varphi(x_1)$$

e per $i \to \infty$, x_i converge a $\bar{x}$.

Ci siamo così riportati alle condizioni del n. 2 del lavoro del Satô [9] e quindi ciascuna delle $y'' = f_i(x, y, y')$ per $i \geq i_2$ ammette una e una sola soluzione $Y_i(x)$ uscente da P_0, tangente alla $y = \varphi(x)$ e soddisfacente alle:

$$\sigma_i(x) \leq Y_i(x) \leq \tau_i(x).$$

Di qui, applicando opportunamente noti ragionamenti [10], si ottiene la dimostrazione del teorema II.

Matematica. — *Le approssimazioni nella risoluzione delle equazioni differenziali ordinarie* [1]. – I. *Teorema d'esistenza.* Nota di E. BAJADA, presentata [2] dal Corrisp. G. SANSONE.

1. Consideriamo un'equazione differenziale ordinaria di forma normale:

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

dove la funzione a secondo membro sia definita nel campo:

$$C \equiv (x_0 - a \leq x \leq x_0 + a) \quad ; \quad y_0 - b \leq y \leq y_0 + b), \qquad (a > 0 \ , \ b > 0).$$

Per la costruzione di una soluzione dell'equazione (1) tale che per $x = x_0$ essa assuma il valore $y = y_0$, il Tonelli ha proposto [3] il seguente metodo di approssimazione:

Si consideri la successione di funzioni $y_n(x)$, dipendenti dall'intero n definite nel modo seguente sull'intervallo $(x_0, x_0 + \delta)$:

$$y_n(x) = y_0, \quad \text{per} \quad x_0 \leq x \leq x_0 + \frac{\delta}{n},$$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x - \frac{\delta}{n}} f[x, y_n(x)]\, dx \quad \text{per} \quad x_0 + \frac{\delta}{n} \leq x \leq x_0 + 2\frac{\delta}{n}$$

(9) Veramente, le condizioni presenti sono ancora leggermente più generali di quelle enunciate dal Satô; ma la dimostrazione del Satô può ripetersi agevolmente, tenendo presente le opportune modifiche suggerite dalla dimostrazione del n. 2 della Nota I. Notiamo anche che nella stessa dimostrazione del n. 2 della Nota del Satô è superflua la condizione $f(x, y, y') > 0$, benchè il Satô la enunci tra le ipotesi.

(10) V. S. CINQUINI, luogo citato in (5), pp. 72–73.

(1) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della Scuola Normale Superiore di Pisa.

(2) Nella seduta dell'8 febbraio 1947.

(3) L. TONELLI, *Sulle equazioni funzionali del tipo di Volterra.* « Bull. of the Calcutta Math. Soc. », 20 (1928) pp. 31–48. Oppure vedere: G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale.* Zanichelli, I° volume, pp. 42–45.

e in generale:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x-\frac{\delta}{n}} f[x, y_n(x)\,dx \quad \text{per} \quad x_0 + r\frac{\delta}{n} \leq x \leq x_0 + \frac{r+1}{n}\delta.$$

La costruzione di $y_n(x)$ si effettua mediante un numero finito di quadrature, ed essa viene definita per $x_0 \leq x \leq x_0 + \delta$, dove δ è il minore [4] dei due numeri a e $\frac{b}{M+1}$, ed M sia l'estremo superiore dei valori di $|f(x,y)|$ nel campo C.

Ammettendo delle semplici ipotesi, per esempio la continuità di $f(x,y)$ rispetto a (x,y) nel campo C, si dimostra quasi immediatamente [5] che l'insieme delle funzioni $y_n(x)$ ammette almeno *una* funzione d'accumulazione $y(x)$ e questa risolve il problema posto.

Nel caso che la equazione (1) ammetta una sola soluzione soddisfacente alla data condizione iniziale, il procedimento esposto dà l'unica soluzione. Lo stesso potendosi dire per qualsiasi altro metodo d'approssimazioni successive.

Vi sono però delle equazioni del tipo della (1) che ammettono più di una e quindi infinite soluzioni soddisfacenti alla data condizione iniziale, che presentano, come si dice, il caso di Peano. È pertanto naturale porsi il seguente problema: « i vari metodi di risoluzione delle equazioni differenziali permettono di trovare *tutte* le soluzioni delle equazioni stesse ? ».

Questo problema, oltre al suo interesse intrinseco, porta, come faremo vedere, a delle conseguenze di notevole portata.

Al problema stesso si risponde con l'affermativa, per quanto riguarda il metodo d'approssimazione esposto, se, anzichè limitarsi alle approssimazioni di Tonelli, si generalizza opportunamente il procedimento.

2. Osserviamo anzitutto che nell'eseguire la costruzione delle funzioni $y_n(x)$ si possono lasciare molte arbitrarietà, senza alterare, sia l'essenza del procedimento, sia il carattere elementare delle considerazioni che permettono di provare l'esistenza della funzione d'accumulazione.

a) Anzichè porre:

$$y_n(x) = y_0, \quad \text{per} \quad x_0 \leq x \leq x_0 + \frac{\delta}{r},$$

si può porre:

$$y_n(x) = y_0 + \sigma\left(x, \frac{\delta}{n}\right), \quad \text{per} \quad x_0 \leq x,$$

(4) La definizione di δ non è posta nella maniera classica solo per comodità di esposizione, con ovvie considerazioni che ometteremo anzichè $\frac{b}{M+1}$ si può prendere $\frac{b}{M}$.

(5) Vedere G. SANSONE, loc. cit.

dove sottintendiamo che:

$$\sigma\left(x, \frac{\delta}{n}\right) = \sigma\left(x_0 + \frac{\delta}{n}, \frac{\delta}{n}\right), \quad \text{per} \quad x > x_0 + \frac{\delta}{n},$$

e $\sigma\left(x, \frac{\delta}{n}\right)$ sia una qualunque funzione [6] continua rispetto a x, equi-infinitesima per x tendente a x_0, qualunque, sia n intero.

b) Nel procedimento indicato nel n. 1, l'intervallo $(x_0, x_0 + \delta)$ veniva suddiviso in n parti eguali. Per poter sviluppare le considerazioni esistenziali circa la funzione d'accumulazione, così come qualunque altra per arrivare alle proprietà del procedimento stesso *non* è necessario che le parti siano eguali, ma basta che queste parti, in numero finito, siano tutte d'ampiezza inferiore di un numero prefissato arbitrariamente, per esempio $\frac{\delta}{n}$.

c) Nella costruzione della $y_n(x)$ sull'intervallo $\left(x_0 + r\frac{\delta}{n}, x_0 + (r+1)\frac{\delta}{n}\right)$, si può pensare la $f(x, y)$ non più esplicitamente dipendente da x (solo per quanto riguarda quest'intervallo) e porre per esempio:

$$y_n(x) = y_n\left(x_0 + r\frac{\delta}{n}\right) + \int_{x_0 + r\frac{\delta}{n}}^{x - \frac{\delta}{n}} f\left[x_0 + r\frac{\delta}{n}, y_n(x)\right] dx.$$

Analogamente, al posto di $y_n(x)$ sotto il segno di integrale, si può sostituire $y_n(\xi)$, dove $x_0 + r\frac{\delta}{n} \leq \xi \leq x_0 + (r+1)\frac{\delta}{n}$, nel caso che $\xi = x_0 + r\frac{\delta}{n}$ il metodo coincide con quello di Cauchy-Lipschitz [7]. Si può ancora mettere una qualunque altra funzione $\bar{y}_n(x)$, tale però che la successione $\{\bar{y}_n(x)\}$ abbia una funzione d'accumulazione coincidente con una funzione d'accumulazione della successione $\{y_n(x)\}$.

d) Indicato con $\varepsilon\left(x, \frac{\delta}{n}\right)$ una funzione continua in x, definita per $x_0 \leq x \leq x_0 + \delta$ ed equi-infinitesima con $\frac{\delta}{n}$ rispetto a x, al procedimento di Tonelli si può sostituire, a tutti gli effetti, il seguente:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x - \frac{\delta}{n}} f[x, y_n(x)]\, dx + \int_{x_0}^{x - \frac{\delta}{n}} \varepsilon\left(n, \frac{\delta}{n}\right) dx.$$

(6) Una cosa del tutto analoga avviene per il metodo di Picard. Vedere per esempio G. SANSONE, loc. cit., p. 9.

(7) Vedere per esempio G. SANSONE, loc. cit., 1° vol. pp. 33–42. Oppure: E. KAMKE, *Differentialgleichungen Reeller Funktionen*. Lepzig (1930) pp. 62–66.

In particolare per funzione $\varepsilon\left(x, \frac{\delta}{n}\right)$ si può prendere gli infinitesimi $N\frac{\delta}{n}$ oppure $-N\frac{\delta}{n}$, dove N sia un qualunque numero positivo prefissato.

3. Fra tutte le arbitrarietà proposte nel numero precedente, pur non togliendo l'importanza alle altre e per altre questioni, le più proficue per le considerazioni che seguiranno sono di gran lunga la prima e l'ultima. Perciò dimostriamo ora la verità dell'affermazione fatta in *d*) tralasciando quali ovvie le prove relative alle osservazioni fatte in *a*), *b*), e *c*).

Le funzioni $y_n(x)$ definite in *d*) sono evidentemente equilimitate e non escono dal campo di definizione della $f(x, y)$ se n è sufficientemente grande. Esse sono inoltre egualmente continue se supponiamo $f(x, y)$ continua rispetto a (x, y) sul campo C (o qualunque altra ipotesi che permetta d'assicurare che le approssimazioni di Tonelli sono egualmente continue).

In virtù del teorema di Ascoli, esisterà una funzione d'accumulazione $y(x)$ continua per la successione $\{y_n(x)\}$ delle funzioni $y(x)$.

La funzione $y(x)$ è soluzione della (1) e soddisfa alla data condizione iniziale. Infatti, dalla successione $\{y_n(x)\}$, se ne può estrarre un'altra $\{\bar{y}_n(x)\}$ che converge uniformemente alla $y(x)$ e siccome:

$$\bar{y}_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[x, \bar{y}_n(x)]\,dx - \int_{x-\frac{\delta}{n}}^{x} f[x, \bar{y}_n(x)]\,dx +$$

$$+ \int_{x_0}^{x} \varepsilon\left(n, \frac{\delta}{n}\right)dx - \int_{x-\frac{\delta}{n}}^{x} \varepsilon\left(n, \frac{\delta}{n}\right)dx,$$

avremo, passando al limite per n tendente all'infinito sotto il segno di integrale:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[x, y(x)]\,dx,$$

l'asserto essendo così dimostrato.

4. Facciamo vedere ora che il procedimento indicato nel n. 3, *a*) e *d*) permette di trovare *tutte* le soluzioni dell'equazione (1) con i dati iniziali scelti.

Sia infatti $\varphi(x)$ una soluzione dell'equazione (1), tale quindi che:

$$\varphi(x_0) = y_0,$$

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[x, \varphi(x)]\,dx, \quad \text{per} \quad x_0 \leq x \leq x_0 + \delta.$$

Poniamo:

$$(2)\quad \varepsilon\left(x,\frac{\delta}{n}\right)=\varphi'\left(x+\frac{\delta}{n}\right)-f\left[x+\frac{\delta}{n},\varphi(x)\right],\quad \text{per}\quad x_0\leq x\leq x_0+\delta-\frac{\delta}{n}\cdot$$

$$\varepsilon\left(x,\frac{\delta}{n}\right)=\varepsilon\left(x+\delta-\frac{\delta}{n},\frac{\delta}{n}\right)\quad \text{per}\quad x_0+\delta-\frac{\delta}{n}\leq x\leq x_0+\delta.$$

In forza della supposta continuità, rispetto ai suoi argomenti, della $f(x,y)$, la funzione $\varepsilon\left(x,\frac{\delta}{n}\right)$ così definita è continua rispetto a x ed è inoltre equi-infinitesima con $\frac{\delta}{n}$, rispetto ad x.

Poniamo ancora:

$$\sigma\left(x,\frac{\delta}{n}\right)=\varphi(x)-y_0,\quad \text{per}\quad x_0\leq x\leq x_0+\frac{\delta}{n},$$

$$\sigma\left(x,\frac{\delta}{n}\right)=\sigma\left(x_0+\frac{\delta}{n},\frac{\delta}{n}\right),\quad \text{per}\quad x_0+\frac{\delta}{n}\leq x\leq x_0+\delta.$$

Costruiamo allora, quali approssimazioni, le funzioni:

$$y_n(x)=y_0+\sigma\left(x,\frac{\delta}{n}\right)=\varphi(x),\quad \text{per}\quad x_0\leq x\leq x_0+\frac{\delta}{n},$$

e,

$$y_n(x)=y_0+\sigma\left(x,\frac{\delta}{n}\right)+\int_{x_0}^{x-\frac{\delta}{n}} f\left[x+\frac{\delta}{n},y_n(x)\right]dx+$$

$$+\int_{x_0}^{x-\frac{\delta}{n}}\varepsilon\left(x,\frac{\delta}{n}\right)dx,\quad \text{per}\quad x_0+\frac{\delta}{n}\leq x\leq x_0+\delta,$$

ossia ancora:

$$y_n(x)=\varphi\left(x_0+\frac{\delta}{n}\right)+\int_{x_0}^{x-\frac{\delta}{x}}\varphi'\left(x+\frac{\delta}{n}\right)dx-\int_{x_0}^{x-\frac{\delta}{n}} f\left[x+\frac{\delta}{n},\varphi(x)\right]dx+$$

$$+\int_{x_0}^{x-\frac{\delta}{n}} f\left[x+\frac{\delta}{n},y_n(x)\right]dx,$$

cioè:

$$y_n(x)=\varphi(x)+\int_{x_0}^{x-\frac{\delta}{n}}\left\{f\left[x+\frac{\delta}{n},y_n(x)\right]-f\left[x+\frac{\delta}{n},\varphi(x)\right]\right\}dx,$$

per $x_0+\frac{\delta}{n}\leq x\leq x_0+\delta-\frac{\delta}{n}$.

Siccome $y_n(x)$ e $\varphi(x)$ coincidono per $x_0\leq x\leq x_0+\frac{\delta}{n}$ esse coincidono allora anche per $x_0+\frac{\delta}{n}\leq x\leq x_0+2\frac{\delta}{n}$ e così via, cioè esse coincidono

ovunque, nell'intervallo $\left(x_0 , x_0 + \frac{n-1}{n}\delta\right)$. Le funzioni $y_n(x)$ formano un insieme di funzioni che ammettono $\varphi(x)$ come unica funzione d'accumulazione.

5. Dimostriamo ora che, se si scelgono opportunamente gli infinitesimi σ ed ε, si ottiene quale corrispondente funzione d'accumulazione l'integrale superiore [8] (o l'integrale inferiore) dell'equazione (1).

Avendo ammesso la funzione $f(x, y)$ continua in C, essa sarà limitata in valore assoluto ed inferiore a un numero positivo M e quindi, se $\varphi(x)$ indica una qualunque soluzione della (1) si ha per $x > x_0$

$$\varphi(x) \leq M(x - x_0) + y_0 , \tag{3}$$

$$\varphi(x) \geq -M(x - x_0) + y_0 , \tag{4}$$

$$\left|\varphi\left(x + \frac{\delta}{n}\right) - \varphi(x)\right| \leq M\frac{\delta}{n} . \tag{5}$$

Osserviamo che la (2), che dà l'espressione dell'infinitesimo ε, può prendere la forma:

$$\varepsilon\left(x , \frac{\delta}{n}\right) = f\left[x + \frac{\delta}{n} , \varphi\left(x + \frac{\delta}{n}\right)\right] - f\left[x + \frac{\delta}{n} , \varphi(x)\right] .$$

Indichiamo con $\bar{\varepsilon}\left(x , \frac{\delta}{n}\right)$ il massimo dell'espressione:

$$\left| f\left(x + \frac{\delta}{n} , y_1\right) - f\left(x + \frac{\delta}{n} , y_2\right)\right|$$

quando y_1 e y_2 siano due numeri qualsiasi compresi nell'intervallo $(y_0 - b , y_0 + b)$ e inoltre tali che:

$$|y_1 - y_2| \leq (4M + 3)\frac{\delta}{n} . \tag{6}$$

Avremo ovviamente:

$$\left|\varepsilon\left(x , \frac{\delta}{n}\right)\right| \leq \bar{\varepsilon}\left(x , \frac{\delta}{n}\right) .$$

L'integrale $\varphi(x)$, come abbiamo visto nel numero precedente, si può ottenere con il metodo d'approssimazione esposto in quel numero e relativo alle funzioni infinitesime σ ed ε ivi definite. Se costruiamo con il medesimo metodo le approssimazioni relative agli infinitesimi $\sigma = M\frac{\delta}{n}$ ed $\varepsilon = 2\bar{\varepsilon}\left(x , \frac{\delta}{n}\right)$, otterremo delle funzioni in un certo senso maggiori delle primitive appros-

(8) Per il significato di integrale superiore [inferiore] vedere per esempio G. SANSONE, loc, cit., vol II, pp. 76–77.

simazioni. Più precisamente, posto, seguendo le notazioni del numero precedente:

$$\varphi(x) = y_0 + \sigma\left(x, \frac{\delta}{n}\right) + \int_{x_0}^{x-\frac{\delta}{n}} f\left[x + \frac{\delta}{n}, \varphi(x)\right] dx + \int_{x_0}^{x-\frac{\delta}{n}} \varepsilon\left(x, \frac{\delta}{n}\right) dx,$$

ed:

$$y_n(x) = y_0 + M\frac{\delta}{n}, \quad \text{per} \quad x_0 \leq x \leq x_0 + \frac{\delta}{n},$$

$$y_n(x) = y_0 + M\frac{\delta}{n} + \int_{x_0}^{x-\frac{\delta}{n}} f\left[x + \frac{\delta}{n}, y_n(x)\right] dx +$$

$$+ \int_{x_0}^{x-\frac{\delta}{n}} 2\bar{\varepsilon}\left(x, \frac{\delta}{n}\right) dx, \quad \text{per} \quad x_0 + \frac{\delta}{n} \leq x \leq x_0 + \delta.$$

Avremo:

$$0 \leq y_n(x) - \varphi(x) \leq 2M\frac{\delta}{n}, \quad \text{per} \quad x_0 \leq x \leq x_0 + \frac{\delta}{n}.$$

$$y_n(x) - \varphi(x) =$$

$$= M\frac{\delta}{n} - \sigma\left(x, \frac{\delta}{n}\right) + \int_{x_0}^{x-\frac{\delta}{n}} \left\{ f\left[x + \frac{\delta}{n}, y_n(x)\right] - f\left[x + \frac{\delta}{n}, \varphi(x)\right] \right\} dx +$$

$$+ \int_{x_0}^{x-\frac{\delta}{n}} \left\{ 2\bar{\varepsilon}\left(x, \frac{\delta}{n}\right) - \varepsilon\left(x, \frac{\delta}{n}\right) \right\} dx, \quad \text{per} \quad x_0 + \frac{\delta}{n} \leq x \leq x_0 + \frac{2\delta}{n}.$$

Per le (3), (5) e (6) sarà allora $\left(\text{per } x_0 + \frac{\delta}{n} \leq x \leq x_0 + \frac{2\delta}{n}\right)$,

$$y_n(x) - \varphi(x) \geq 0.$$

Possiamo sempre supporre n sufficientemente grande in modo che $\bar{\varepsilon}\left(x, \frac{\delta}{n}\right) \leq 1$. Supponiamo allora che ci sia un punto ξ in cui:

$$y_n(\xi) - \varphi(\xi) = M\frac{\delta}{n} - \sigma\left(\xi, \frac{\delta}{n}\right) + \int_{x_0}^{\xi-\frac{\delta}{n}} \left\{ f\left[x + \frac{\delta}{n}, y_n(x)\right] - \right.$$

$$\left. - f\left[x + \frac{\delta}{n}, \varphi(x)\right] \right\} dx + \int_{x_0}^{\xi-\frac{\delta}{n}} \left\{ 2\bar{\varepsilon}\left(x, \frac{\delta}{n}\right) - \varepsilon\left(x, \frac{\delta}{n}\right) \right\} dx = 0$$

e sia $x_0 + r\frac{\delta}{n} \leq \xi \leq x_0 + (r+1)\frac{\delta}{n}$, sarà allora per $x_0 + r\frac{\delta}{n} \leq x \leq$ $\leq x_0 + (r+1)\frac{\delta}{n}$,

$$y_n(x) - \varphi(x) = M\frac{\delta}{n} - \left[\sigma\left(x, \frac{\delta}{n}\right) - \sigma\left(\xi, \frac{\delta}{n}\right)\right] - \sigma\left(\xi, \frac{\delta}{n}\right) +$$

$$+ \int_{x_0}^{\xi - \frac{\delta}{n}} \left\{ f\left[x + \frac{\delta}{n}, y_n(x)\right] - f\left[x + \frac{\delta}{n}, \varphi(x)\right] \right\} dx +$$

$$+ \int_{x_0}^{\xi - \frac{\delta}{n}} \left\{ 2\bar{\varepsilon}\left(x, \frac{\delta}{n}\right) - \varepsilon\left(x, \frac{\delta}{n}\right) \right\} dx + \int_{\xi - \frac{\delta}{n}}^{x - \frac{\delta}{n}} \left\{ f\left[x + \frac{\delta}{n}, y_n(x)\right] - \right.$$

$$\left. - f\left[x + \frac{\delta}{n}, \varphi(x)\right] \right\} dx + \int_{\xi - \frac{\delta}{n}}^{x - \frac{\delta}{n}} \left\{ 2\bar{\varepsilon}\left(x, \frac{\delta}{n}\right) - \varepsilon\left(x, \frac{\delta}{n}\right) \right\} dx,$$

e per l'uguaglianza scritta precedentemente e per la (5) sarà:

$$|y_n(x) - \varphi(x)| \leq 2M\frac{\delta}{n} + 2M\frac{\delta}{n} + 3\frac{\delta}{n} = (4M + 3)\frac{\delta}{n}.$$

Per $x_0 + (r+1)\frac{\delta}{n} \leq x \leq x_0 + (r+2)\frac{\delta}{n}$, sarà, in virtù delle conseguenze della (6) e analogamente a quanto fatto per $x_0 + \frac{\delta}{n} \leq x \leq x_0 + \frac{2\delta}{n}$;

$$y_n(x) - \varphi(x) \geq 0.$$

In conseguenza di questi ragionamenti possiamo concludere che se $y(x)$ indica una qualunque funzione d'accumulazione della successione $\{y_n(x)\}$ sarà:

$$y(x) \geq \varphi(x).$$

Siccome d'altra parte $\varphi(x)$ era un qualunque integrale dell'equazione (1), possiamo assicurare che, se indichiamo con $y_M(x)$ l'integrale superiore dell'equazione stessa, di cui contemporaneamente con un solo passaggio al limite si dimostra l'esistenza, la successione $y(x)$ ammette una funzione limite e si avrà:

$$\lim_{n \to \infty} y_n(x) = y_M(x).$$

Osserviamo ancora che, invece di porre $\sigma = M\frac{\delta}{n}$ si può porre $\sigma = M(x - x_0)$ ed inoltre che, se invece degli infinitesimi $M\frac{\delta}{n}$ e $2\bar{\varepsilon}\left(x\frac{\delta}{n}\right)$ si prendono altri due infinitesimi $\underline{\varepsilon}$ e $\underline{\sigma}$ tali che $\underline{\varepsilon} > 2\bar{\varepsilon}\left(x, \frac{\delta}{n}\right)$ e $\underline{\sigma} > M\frac{\delta}{n}$ ma sempre equi-infinitesimi nel senso sopradetto, si ottengono ancora delle funzioni che tendono uniformemente a $y_M(x)$.

Matematica. — *Nuova trattazione di problemi al contorno di una striscia per l'equazione di Laplace in due variabili* [1]. Nota di C. BIRINDELLI, presentata [2] dal Socio M. PICONE.

1. Sia assegnata nel piano la striscia piana T, illimitata nei due sensi, di lati le due rette $y = 0$, $y = a$, con $a > 0$.

Diremo che *una terna di funzioni* $\gamma_0(x)$, $\gamma(x)$, $f(x, y)$, *soddisfa la «condizione* (Ω) *rispetto ad una costante positiva* ω*» in* T, se sono soddisfatti i requisiti seguenti:

1°) essere $\gamma_0(x)$ e $\gamma(x)$ continue per ogni x ed $f(x, y)$ continua e localmente Ölderiana in T + FT, nonchè essere, uniformemente per gli y di $(0, a)$,

$$\lim_{|x|\to+\infty} \gamma_0(x)\cdot e^{-\omega\cdot|x|} = \lim_{|x|\to+\infty} \gamma(x)\cdot e^{-\omega\cdot|x|} = \lim_{|x|\to+\infty} f(x, y)\cdot e^{-\omega\cdot|x|} = 0;$$

2°) essere, per x arbitrario mantenuto costante, la $f(x, y)$ a variazione limitata rispetto ad y in $(0, a)$, con la variazione totale $V(x)$ tale che

$$\lim_{|x|\to+\infty} V(x)\cdot e^{-\omega\cdot|x|} = 0;$$

3°) essere infine convergenti i seguenti integrali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_0(s)\cdot e^{-\omega\cdot|s|}\cdot ds\,,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(s)\cdot e^{-\omega\cdot|s|}\cdot ds\,,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} ds \int_0^a f(s,t)\cdot e^{-\omega\cdot|s|}\cdot dt\,,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(s,y)\, e^{-\omega\cdot|s|}\, ds,$$

e, nell'ultimo, le due parti $\int_{-\infty}^{0} f(s, y)\cdot e^{\omega\cdot s}\cdot ds$, $\int_{0}^{+\infty} f(s, y)\cdot e^{-\omega\cdot s}\cdot ds$, siano funzioni di y in $(0, a)$ continue.

Scopo della presente Nota è di segnalare che i teoremi di esistenza e di unicità, da noi ottenuti in tre lavori in corso seguendo il metodo delle trasformate [3], relativi ai seguenti problemi al contorno per la striscia T e per l'equazione $\Delta_2 u(x, y) = f(x, y)$, dànno condizioni estremamente più generali di quelle trovate con altri metodi.

1° PROBLEMA, FONDAMENTALE. – Assegnate quattro costanti reali α_0, β_0, α, β, tutte diverse da 0, con $\alpha_0^2 + \beta_0^2 = 1$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, per cui sia, ad esempio, $\alpha_0\cdot\beta_0 < 0$, $\alpha\cdot\beta > 0$ (con che ci si può sempre ridurre al caso in cui sia

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto per le Applicazioni del Calcolo.

(2) Nella seduta dell'8 febbraio 1947.

(3) Cfr. M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore*, pp. 775–793, Ed. Rondinella, Napoli, 1940; come pure: *Problemi, risultati e discussioni* in « Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni », (vol. 3 della Serie V, 1942), nn. 122, 123.

$\alpha \cdot \beta_0 - \alpha_0 \cdot \beta > 0$), si vuol trovare una funzione $u(x, y)$ soddisfacente la equazione

$$\Delta_2 u = f(x, y)$$

in T — FT, con u e $\frac{\partial u}{\partial y}$ continue in T + FT, e $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ continue in T — FT, verificante le equazioni su FT

$$\left(\alpha_0 \cdot u + \beta_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \gamma_0(x) \quad , \quad \left(\alpha \cdot u + \beta \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=a} = \gamma(x),$$

oltre le ulteriori condizioni da imporsi ad $u(x, y)$ all'∞ (condizioni che si devono ricercare) in modo da assicurare l'unicità della soluzione.

2° PROBLEMA, PARTICOLARE. – Il caso in cui $\alpha_0 = 1$ e $\alpha = 1$, cosicchè $\beta_0 = \beta = 0$. È questo il problema di Dirichlet per la striscia T. Le condizioni sono le stesse del 1° problema con la sola modifica consistente nel fatto di imporre alla soluzione u di avere le $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ continue in T — FT e che la u, continua in T + FT, sia tale che

$$u(x, 0) = \gamma_0(x) \quad , \quad u(x, a) = \gamma(x).$$

3° PROBLEMA, PARTICOLARE. – Il caso in cui $\beta_0 = 1$, $\beta = -1$, cosicchè $\alpha_0 = \alpha = 0$. È questo il problema di Neumann per la striscia T. In tal caso oltre ad imporre ad u di essere continua assieme alla $\frac{\partial u}{\partial y}$ in T + FT e in modo tale che

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \gamma_0(x) \quad , \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=a} = -\gamma(x),$$

le condizioni ulteriori sono le stesse del 1° problema. Naturalmente le condizioni, da ricercare, pel comportamento di u all'∞ vanno ora intese nel senso di far sì che sia definita la u a meno di un termine lineare in x coi due coefficenti affatto arbitrari.

4° PROBLEMA, PARTICOLARE. – Il caso $\alpha_0 = 1$, $\beta = -1$, $\alpha = \beta_0 = 0$, vale a dire il problema misto Dirichlet–Neumann per la striscia T. Sono quì ovvie le modifiche da doversi fare per le condizioni relative al comportamento della u e delle sue derivate, e rileveremo solo l'essenziale

$$u(x, 0) = \gamma_0(x) \quad , \quad \left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right)_{y=a} = -\gamma(x).$$

5° PROBLEMA, PARTICOLARE. – Caso per cui sia $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 1$, e α e β entrambi diversi da 0. Si può supporre $\alpha \cdot \beta > 0$ (con α e β positivi e $\alpha^2 + \beta^2 = 1$), cosicchè $\alpha \cdot \beta_0 - \alpha_0 \cdot \beta > 0$.

6° PROBLEMA, PARTICOLARE. — Caso per cui sia $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$, e α e β entrambi diversi da 0. Si può supporre $\alpha \cdot \beta > 0$ (con α e β entrambi negativi e $\alpha^2 + \beta^2 = 1$), cosicchè $\alpha \cdot \beta_0 - \alpha_0 \cdot \beta > 0$.

In relazione col 1° problema, fondamentale, indichiamo con $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$, la successione delle soluzioni λ, positive crescenti (in infinità numerabile), della equazione

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{cotg}(\sqrt{\lambda}\cdot a) = \frac{\alpha\cdot\alpha_0 + \beta\cdot\beta_0\cdot\lambda}{(\alpha\cdot\beta_0 - \alpha_0\cdot\beta)\cdot\sqrt{\lambda}},$$

ove i numeri $\sqrt{\lambda_n}$ sono numeri via via crescenti e accostantisi sempre più, man mano che il loro numero d'ordine n cresce, ai corrispondenti numeri $\frac{n\cdot\pi}{a}$.

In relazione invece col 5° problema, particolare, indichiamo con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_n, \cdots$, la successione delle soluzioni λ, positive crescenti (sempre in infinità numerabile), della equazione

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{cotg}(\sqrt{\lambda}\cdot a) = \frac{\beta}{\alpha}\cdot\sqrt{\lambda},$$

ove i numeri $\sqrt{\lambda_n}$ sono numeri via via crescenti e accostantisi sempre più, man mano che il loro numero d'ordine n cresce, ai corrispondenti numeri $\frac{(n-1)\cdot\pi}{a}$, $n \geqq 1$.

In relazione infine col 6° problema, particolare, indichiamo con $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$, la successione delle soluzioni λ, positive crescenti (sempre in infinità numerabile), della equazione

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{cotg}(\sqrt{\lambda}\cdot a) = -\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda}},$$

ove i numeri $\sqrt{\lambda_n}$ sono numeri via via crescenti e accostantisi sempre più, man mano che il loro numero d'ordine n cresce, ai corrispondenti numeri $\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{a}$, $n \geqq 0$.

Enunciati dei teoremi di esistenza e di unicità.

2. Teorema di esistenza e di unicità pel 1° problema, fondamentale. – *Perchè una soluzione sia l'unica basta che per essa sia soddisfatta la condizione d'essere, uniformemente per gli y di* $(0, a)$,

$$\lim_{|x|\to+\infty} u(x,y)\cdot e^{-\sqrt{\lambda_0}\cdot|x|} = 0, \qquad \text{col } \lambda_0 \text{ che si ricava dalla (1).}$$

Se la terna assegnata di funzioni

$$\gamma_0(x) \quad , \quad \gamma(x) \quad , \quad f(x,y),$$

soddisfa la « condizione (Ω) *rispetto alla costante* $\sqrt{\lambda_0}$ *» in* T, *allora è assicurata l'esistenza della soluzione* $u(x,y)$ *soddisfacente la precedente condizione di unicità. Questa soluzione è data, in* T + FT, *dalla somma della serie, uniformemente convergente nei dominî limitati di* T + FT,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_0 \cdot \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_n}\cdot y\right) - \beta_0 \cdot \sqrt{\lambda_n}\cdot \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\cdot y\right)}{\sqrt{\lambda_n}\cdot\left[\left(\beta_0^2\cdot\lambda_n+\alpha_0^2\right)a+\frac{\beta_0^2\cdot\lambda_n-\alpha_0^2}{2\sqrt{\lambda_n}}\operatorname{sen}\left(2\sqrt{\lambda_n}\cdot a\right)+\alpha_0\cdot\beta_0\cdot\left(\cos\left(2\sqrt{\lambda_n}\cdot a\right)-1\right)\right]}$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sqrt{\lambda_n}\cdot\gamma_0(s)+\frac{1}{\beta}\left(\alpha_0\cdot\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_n}\cdot a\right)-\beta_0\sqrt{\lambda_n}\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\cdot a\right)\right)\cdot\gamma(s)\right.$$

$$\left.-\int_0^a\left\{\alpha_0\cdot\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_n}\cdot t\right)-\beta_0\cdot\sqrt{\lambda_n}\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\cdot t\right)\right\}\cdot f(s,t)\cdot dt\right]e^{-\sqrt{\lambda_n}\cdot|x-s|}\cdot ds,$$

ove le λ_n *sono quelle relative alla* (1).

Teorema di esistenza e di unicità pel 2° problema, particolare, (Problema di Dirichlet). – *Perchè una soluzione sia l'unica basta che per essa sia, uniformemente per gli* y *di* $(0, a)$,

$$\lim_{|x|\to+\infty} u(x,y)\cdot e^{-\frac{\pi}{a}|x|}=0.$$

Se la terna di funzioni $\gamma_0(x)$, $\gamma(x)$, $f(x,y)$, *soddisfa la «condizione* (Ω) *rispetto alla costante* $\frac{\pi}{a}$ *» in* T, *allora è assicurata l'esistenza della soluzione* $u(x,y)$ *soddisfacente la precedente condizione di unicità. Questa soluzione* $u(x,y)$ *è data lungo* $y=0$ *da* $\gamma_0(x)$ *e lungo* $y=a$ *da* $\gamma(x)$, *mentre in* T — FT *è data dalla somma della serie, uniformemente convergente nei dominî limitati interni a* T,

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{a}\left(\gamma_0(s)+(-1)^{n+1}\cdot\gamma(s)\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{n\pi}\cdot\int_0^a f(s,t)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{a}\right)\cdot dt\right]\cdot e^{-\frac{n\pi}{a}|x-s|}\cdot ds$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{a}\right)}{2a}\cdot\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\gamma_0(s)\cdot ds}{\cosh\left(\frac{\pi\cdot|x-s|}{a}\right)-\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)}+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\gamma(s)\cdot ds}{\cosh\left(\frac{\pi\cdot|x-s|}{a}\right)+\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)}\right]$$

$$+\frac{1}{4\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^a f(s,t)\cdot\log\frac{\cosh\left(\frac{\pi\cdot|x-s|}{a}\right)-\cos\left(\frac{\pi\cdot(y-t)}{a}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi\cdot|x-s|}{a}\right)-\cos\left(\frac{\pi\cdot(y+t)}{a}\right)}\cdot ds\cdot dt\ (4)$$

e la $u(x,y)$ *è continua in* T + FT.

(4) Per la espressione della funzione di Green per $f(x,y)$ e per la soluzione armonica convergente all'infinito vedi, rispettivamente, T. Boggio, *Sulla funzione di Green per una lastra indefinita.* « Rend. Ist. Lomb. », II, 42, (1909), pp. 611–624; come pure E. Perucca, G. Fubini, G. Vallauri, *Studio di un particolare condensatore elettrico.* « L'Elettrotecnica », 17 (1930, pp. 278–283; M. Picone, *Appunti di Analisi Superiore* , pp. 327–328, Rondinella, Ed., Napoli, 1940.

TEOREMA DI ESISTENZA RELATIVO AL 3° PROBLEMA, PARTICOLARE, (PROBLEMA DI NEUMANN). – *Se la terna di funzioni* $\gamma_0(x)$, $\gamma(x)$, $f(x,y)$, *soddisfa la «condizione* (Ω) *rispetto ad un positivo* $\delta < \frac{\pi}{a}$ *», in* T, *(basterebbe anzi la parte* 1^a*) della condizione* (Ω), *assieme alla sola condizione suppletiva* $\lim_{|x|\to+\infty} V(x)\cdot e^{-\frac{\pi}{a}|x|} = 0$, *uniformemente per gli* y *di* $(0,a)$, *supponendo* $f(x,y)$, *al solito, a variazione limitata rispetto a* y *in* $(0,a)$, *allora le soluzioni* $u(x,y)$, *che soddisfano il nostro problema di Neumann, con la condizione d'essere, uniformemente per gli* y *di* $(0,a)$,

$$\lim_{|x|\to+\infty} u(x,y)\cdot e^{-\frac{\pi}{a}|x|} = 0 \quad , \quad \lim_{|x|\to+\infty} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\cdot e^{-\frac{\pi}{a}|x|} = 0 ,$$

sono le somme, in T + FT, *delle seguenti serie (che differiscono tra loro di un arbitrario termine lineare in* x *e che risultano essere tutte continue in* T + FT, *perchè uniformemente convergenti nei dominî limitati di* T + FT),

$$u(x,y) = A + Bx + \frac{1}{a}\int_0^x \left[\gamma_0(s) + \gamma(s) + \int_0^a f(s,t)\,dt\right]\cdot(x-s)\cdot ds$$

$$- \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\gamma_0(s) + (-1)^n\cdot\gamma(s) + \int_0^a f(s,t)\cdot\cos\left(\frac{n\pi t}{a}\right)\cdot dt\right]\cdot e^{-\frac{n\pi}{a}|x-s|}\cdot ds$$

$$= A + Bx + \frac{1}{a}\int_0^x \left[\gamma_0(s) + \gamma(s) + \int_0^a f(s,t)\cdot dt\right]\cdot(x-s)\cdot ds$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma_0(s)\cdot\log\frac{2\cdot\left\{\cosh\left(\frac{\pi\cdot|x-s|}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\right\}}{e^{\frac{\pi\cdot|x-s|}{a}}}\cdot ds$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma(s)\cdot\log\frac{2\cdot\left\{\cosh\left(\frac{\pi\cdot|x-s|}{a}\right) + \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\right\}}{e^{\frac{\pi\cdot|x-s|}{a}}}\cdot ds$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^a f(s,t)\cdot\log\left\{\frac{2\cdot\left\{\cosh\left(\frac{\pi\cdot|x-s|}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi\cdot(y+t)}{a}\right)\right\}}{e^{\frac{\pi\cdot|x-s|}{a}}}\right.$$

$$\left.\cdot\frac{2\cdot\left\{\cosh\left(\frac{\pi\cdot|x-s|}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi\cdot(y-t)}{a}\right)\right\}}{e^{\frac{\pi\cdot|x-s|}{a}}}\right\}\cdot ds\cdot dt .$$

TEOREMA DI ESISTENZA E DI UNICITÀ RELATIVO AL 4° PROBLEMA, PARTICOLARE, (PROBLEMA MISTO DIRICHLET–NEUMANN). – *Perchè una soluzione sia l'unica basta che per essa sia, uniformemente per gli y di* $(0, a)$,

$$\lim_{|x|\to+\infty} u(x,y)\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{a}\cdot|x|} = 0 .$$

Se la terna di funzioni $\gamma_0(x)$, $\gamma(x)$, $f(x,y)$, *soddisfa la «condizione* (Ω) *rispetto alla costante* $\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{a}$ *» in* T, *allora è assicurata l'esistenza della soluzione* $u(x,y)$ *soddisfacente la precedente condizione di unicità. Questa soluzione* $u(x,y)$ *è data lungo* $y=0$ *da* $\gamma_0(x)$ *e lungo la parte restante di* T + FT *dalla somma della serie, ch'è uniformemente convergente nei dominî limitati di* T + FT *privi però di punti del lato* $y=0$, *(ma con* $u(x,y)$ *continua in* T + FT),

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{a}y\right]}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{a}\cdot\gamma_0(s)+(-1)^{n+1}\cdot\gamma(s)\right.$$

$$\left.-\int_0^a f(s,t)\cdot\operatorname{sen}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{a}t\right]\cdot dt\right]\cdot e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{a}\cdot|x-s|}\cdot ds$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}{2a}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma_0(s)\cdot\frac{\cosh\left(\frac{\pi\cdot|x-s|}{2a}\right)\cdot ds}{\cosh^2\left(\frac{\pi\cdot|x-s|}{2a}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}+\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma(s)\cdot\log\frac{\cosh\left(\frac{\pi\cdot|x-s|}{2a}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{2a}\right.}{\cosh\left(\frac{\pi\cdot|x-s|}{2a}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{2a}\right.}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^a f(s,t)\log\frac{\left[\cosh\left(\frac{\pi\cdot|x-s|}{2a}\right)+\cos\left(\frac{\pi\cdot(y+t)}{2a}\right)\right]\cdot\left[\cosh\left(\frac{\pi\cdot|x-s|}{2a}\right)-\cos\left(\frac{\pi\cdot(y-t)}{2a}\right)\right]}{\left[\cosh\left(\frac{\pi\cdot|x-s|}{2a}\right)-\cos\left(\frac{\pi\cdot(y+t)}{2a}\right)\right]\cdot\left[\cosh\left(\frac{\pi\cdot|x-s|}{2a}\right)+\cos\left(\frac{\pi\cdot(y-t)}{2a}\right)\right]}\cdot$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}{2a}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\gamma_0(s)\cdot ds}{\cosh\left(\frac{\pi\cdot|x-s|}{2a}\right)-\cos\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}-\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{a}\right)}{2a}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\gamma_0(s)\cdot ds}{\cosh\left(\frac{\pi\cdot|x-s|}{a}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{a}\right.}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma(s)\cdot\log\frac{\cosh\left(\frac{\pi\cdot|x-s|}{2a}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi\cdot|x-s|}{2a}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}\cdot ds$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^a f(s,t)\cdot\log\frac{\cosh\left(\frac{\pi\cdot|x-s|}{2a}\right)-\cos\left(\frac{\pi\cdot(y-t)}{2a}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi\cdot|x-s|}{2a}\right)-\cos\left(\frac{\pi\cdot(y+t)}{2a}\right)}\cdot ds\cdot dt$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^a f(s,t)\cdot\log\frac{\cosh\left(\frac{\pi\cdot|x-s|}{a}\right)-\cos\left(\frac{\pi\cdot(y-t)}{a}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi\cdot|x-s|}{a}\right)-\cos\left(\frac{\pi\cdot(y+t)}{a}\right)}\cdot ds\cdot dt .$$

TEOREMA DI ESISTENZA E DI UNICITÀ PER IL 5° PROBLEMA, PARTICOLARE. – *Perchè una soluzione sia l'unica basta che per essa sia, uniformemente per gli y di* $(0, a)$, *e col* λ_1 *che si ricava dalla* (2),

$$\lim_{|x| \to +\infty} u(x, y) \cdot e^{-\sqrt{\lambda_1} \cdot |x|} = 0 .$$

Se la terna di funzioni $\gamma_0(x)$, $\gamma(x)$, $f(x, y)$, *soddisfa la «condizione* (Ω) *rispetto alla costante* $\sqrt{\lambda_1}$*» in* T, *allora è assicurata l'esistenza della soluzione* $u(x, y)$ *soddisfacente la precedente condizione di unicità. Questa soluzione è data, in* T + FT, *dalla somma della serie, ch'è uniformemente convergente nei dominî limitati di* T + FT,

$$u(x, y) = -\alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\sqrt{\lambda_n} \cdot y\right)}{\sqrt{\lambda_n} \cdot \left[a\alpha + \beta \cdot \operatorname{sen}^2\left(\sqrt{\lambda_n} \cdot a\right)\right]}$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\gamma_0(s) - \frac{\cos\left(\sqrt{\lambda_n} \cdot a\right)}{\beta} \cdot \gamma(s) + \int_0^a f(s, t) \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda_n} \cdot t\right) \cdot dt\right] \cdot e^{-\sqrt{\lambda_n} \cdot |x - s|} \cdot ds ,$$

ove le λ_n *sono quelle relative alla* (2).

TEOREMA DI ESISTENZA E DI UNICITÀ PER IL 6° PROBLEMA, PARTICOLARE. – *Perchè una soluzione sia l'unica basta che per essa sia, uniformemente per gli y di* $(0, a)$, *e col* λ_0 *che si ricava dalla* (3),

$$\lim_{|x| \to +\infty} u(x, y) \cdot e^{-\sqrt{\lambda_0} \cdot |x|} = 0 .$$

Se la terna di funzioni $\gamma_0(x)$, $\gamma(x)$, $f(x, y)$, *soddisfa la «condizione* (Ω) *rispetto alla costante* $\sqrt{\lambda_0}$*» in* T, *allora è assicurata l'esistenza della soluzione* $u(x, y)$ *soddisfacente la precedente condizione di unicità. Questa soluzione è data lungo* $y = 0$ *da* $\gamma_0(x)$ *e lungo la parte restante di* T + FT *dalla somma della serie, ch'è uniformemente convergente nei dominî limitati di* T + FT *privi però di punti del lato* $y = 0$,

$$u(x, y) = \alpha \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_n} \cdot y\right)}{\sqrt{\lambda_n} \cdot \left[a\alpha + \beta \cdot \cos^2\left(\sqrt{\lambda_n} \cdot a\right)\right]}$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sqrt{\lambda_n} \cdot \gamma_0(s) + \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_n} \cdot a\right)}{\beta} \cdot \gamma(s) - \int_0^a f(s, t) \cdot \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_n} \cdot t\right) \cdot dt\right] \cdot e^{-\sqrt{\lambda_n} \cdot |x - s|} \cdot ds ,$$

e la funzione $u(x, y)$ *risulta continua in* T + FT*; s'intende che le* λ_n *sono quelle relative alla* (3).

Geometria — *Sulla curva doppia della proiezione di una superficie generale dell'*S_4*, da un punto generico su un* S_3. Nota di A. Francchetta, presentata [1] dal Socio E. Bompiani.

In una Nota dello stesso titolo pubblicata nel 1942 [2] mi proposi di dimostrare che *una superficie* F *dello spazio* S_4, *dotata solo di un numero finito di punti doppi impropri, la cui proiezione generica* F' *su un* S_3 *possegga una curva doppia riducibile, è proiezione della superficie di Veronese.*

Riprendo ora la questione perchè la dimostrazione già data non è in tutto completa [3]. Qui la completo e ne espongo un'altra, notevolmente più semplice.

1. Incominciamo a stabilire il seguente lemma: *non esistono superficie generali* [4] *dell'* S_4 *possedenti* ∞^3 *coppie di piani tangenti incidenti secondo una retta, in modo che le rette che congiungono i loro punti di contatto riempiano tutto lo spazio.*

Sia P un punto generico della superficie F e π il piano ivi tangente.

Osserviamo anzitutto che esistono, per ipotesi, ∞^1 piani tangenti ad F incidenti π in rette. Il piano π è segato soltanto da due piani tangenti infinitamente vicini in rette (precisamente: nell'unica coppia di tangenti coniugate in P ad F), quindi la curva C luogo dei punti di contatto degli ∞^1 piani nominati passa per P al più con due rami, che possono appartenere, nel caso algebrico, anche a componenti algebricamente distinte di quella curva.

Dimostriamo che: la C si compone di parti piane (o rette). Si consideri sopra un ramo di C un punto Q e un punto Q', pure su C, ad esso infinitamente vicino. Per ipotesi i piani tangenti in Q e in Q' segano π in rette:

(1) Nella seduta dell'11 gennaio 1947.

(2) « Rend. Acc. d'Italia », ser. VII, vol. 2, pp. 282–288.

(3) Precisamente, nell'oss. *a*) del n. 1 della Nota citata io affermavo che una superficie dell'S_4 dotata di un numero finito di punti doppi impropri la quale possieda ∞^3 coppie di piani tangenti incidenti secondo una retta, è rigata, o proiezione della superficie di Veronese. Invece, come mi ha fatto notare il prof. B. Segre, godono della stessa proprietà anche le superficie che posseggono una semplice infinità di curve piane, i cui piani formino una sviluppabile. La detta omissione non infirma però il resto della dimostrazione, perchè l'osservazione citata si applica nel seguito della Nota a superficie che, oltre a possedere coppie di piani tangenti incidenti secondo una retta, sono tali che le corde che congiungono i punti di contatto di ciascuna delle coppie di piani, invadono tutto lo spazio S_4. Ora, come si dimostra nella presente Nota, nessuna superficie dell'S_4 soddisfa a queste proprietà. Le deduzioni restano dunque valide.

(4) Generale, secondo la locuzione di Severi (« Rend. del Circ. Mat. di Palermo », 1901), dicesi una superficie le cui singolarità consistono di un numero finito di punti doppi impropri (ordinari).

poichè il piano tangente in Q' contiene Q, lo S_3 dei piani tangenti in P e Q contiene anche il piano tangente in Q' cioè *tutti* i piani tangenti ad F lungo il ramo considerato stanno in uno stesso S_3 (e quindi si tagliano tutti a due a due in rette).

Al variare di P esiste dunque un sistema continuo ∞^1 di curve C cui appartiene il ramo considerato. Due di queste infinitamente vicine appartengono ad uno S_3 (quello che contiene i piani tangenti nei punti di una C): perchè ciò accada senza che la superficie stia in S_3 una di quelle curve deve stare in un piano (o più in particolare essere una retta) e due piani infinitamente vicini debbono stare in S_3. Ciò porta che la superficie o è rigata o ha ∞^1 curve piane nei piani di una sviluppabile [5] (cioè piani osculatori ad una curva e casi degeneri). Nel primo caso le congiungenti i punti di contatto di coppie di piani incidenti in rette sono le generatrici della rigata, nel secondo le rette dei piani della sviluppabile: in nessuno dei casi riempiono lo S_4 e perciò il lemma è dimostrato [6].

2. Sia ora F una superficie generale di S_4, F' la sua proiezione da un punto generico O su un S_3; Δ la curva doppia della superficie F; D la curva di F di cui Δ è proiezione (doppia). Dobbiamo esaminare l'ipotesi che per ogni posizione di O la curva Δ e quindi D sia riducibile.

Si prova subito che, in tale ipotesi, la curva D deve essere connessa [7].

Sia allora D_1 una delle componenti di D e D_2 la parte rimanente; D_1 e D_2 avranno almeno un punto P in comune. Bisogna esaminare le due eventualità, in cui la retta OP sia corda (bisecante) della superficie F, o trisecante.

3. – Sia la retta OP corda della superficie, e P' il punto in cui la retta OP interseca ulteriormente la superficie. Diciamo, d_1 e d_2 due rami delle curve D_1 e D_2 per P; t_1 e t_2 le loro tangenti, appartenenti al piano π tangente ad F in P; $\bar{d}_1$, $\bar{d}_2$ i rami associati della curva D per P (nel senso che si proiettano da O negli stessi rami δ_1 e δ_2 della curva Δ); t_1, $\bar{t}_2$ le loro tangenti appartenenti al piano π' tangente ad F in P'. Le rette t_1, $\bar{t}_1$; t_2, $\bar{t}_2$, sono fra loro incidenti; ne segue che se t_1 e t_2 sono distinte i piani π e π' hanno in

(5) Per questo tipo di ragionamento si veda E. BOMPIANI, *Determinazione delle superficie integrali di un sistema di equazioni a derivate parziali lineari ed omogenee.* « Rend. Ist. Lombardo », vol. LII, 1919, pp. 610–636.

(6) Per quanto non necessario ai fini di questa Nota, si può osservare che per ogni punto P di F possono passare due curve piane con la proprietà voluta (necessariamente tangenti alle due tangenti coniugate in P); per avere superficie di questo tipo, basta considerare due curve di S_4 e il luogo F delle intersezioni dei loro piani osculatori. In particolare le due curve possono coincidere, e se coincidono in una C_4 di S_4, la F è proiezione della superficie di Veronese. Per tutto ciò (e per citazioni relative a lavori precedenti) cfr. E. BOMPIANI, *Risoluzione geometrica del problema di Moutard sulla costruzione delle equazioni di Laplace ad integrale esplicito.* « Rend. Acc. Lincei », ser. V, vol. XXIV, pp. 190–197.

(7) Cfr. Nota citata dell'Accademia d'Italia.

comune una retta; e ciò è assurdo per il lemma premesso, poichè le rette PP' invadono, per ipotesi, tutto lo spazio S_4.

Se t_1 e t_2 fossero coincidenti, basterebbe considerare il punto P_1, infinitamente vicino a P nella direzione di $t_1 = t_2$ e il punto P'_1, ad esso associato. Si proverebbe alla stessa maniera che i piani tangenti in P_1 e P'_1 (e quindi anche π e π') si tagliano secondo una retta, e ciò, per il lemma, non è possibile.

4. Resta da esaminare l'ipotesi che la retta OP sia trisecante. Premettiamo a tale scopo un secondo lemma, riguardante le trisecanti di una superficie generale dell'S_4 nell'ipotesi che esse riempiano tutto lo spazio.

non può accadere che infinite trisecanti per un punto generico P *della superficie appartengano ad un* S_3 *tangente in* P.

Si consideri una trisecante generica r, e siano π, π', π'' i piani tangenti ad F nei punti P, P', P''. L'S_3 individuato da r e π interseca π' e π'' secondo due rette che indichiamo con $\bar{t}_1$ e $\bar{t}_2$; esse sono complanari a due rette t_1, t_2 del piano π, associate a $\bar{t}_1$ e $\bar{t}_2$; allo stesso modo l'S_3 di r e π' interseca π'' in una retta $\bar{t}_3$, complanare ad una retta t_3 di π'. Le coppie di rette $(t_1, \bar{t}_1)$, $(t_2, \bar{t}_2)$, $(t_3, \bar{t}_3)$ sono le tangenti (fisse) alle tre coppie di rami $(d_1, \bar{d}_1)$, $(d_2, \bar{d}_2)$, $(d_3, \bar{d}_3)$ della curva D relativa ad un centro O (qualsiasi) su r, che nella proiezione danno luogo ai tre rami della curva doppia Δ nel punto triplanare P* in cui si sovrappongono le proiezioni di P, P', P''.

È chiaro intanto che, per una trisecante generica, le rette t_1 e t_2 non possono coincidere, perchè se ciò accadesse le rette $t_1 = t_2$, $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2$ starebbero in uno stesso piano per r, ed una qualunque retta r di questo piano infinitamente vicina ad r sarebbe trisecante. Sulla retta r vi sarebbero infiniti fuochi della congruenza delle trisecanti, e ciò non è possibile [8].

Le rette t_1 e t_2 sono dunque distinte. Le coppie di rette $(t_1, \bar{t}_1)$, $(t_2, \bar{t}_2)$, $(t_3, \bar{t}_3)$ sono incidenti. Ne segue che nè t_3 può coincidere con t_1, nè t_3 con t_2. Infatti nel primo caso t_3 e $\bar{t}_3$ sarebbero complanari a t_1; i piani π e π'' avrebbero in comune i punti comuni alle due coppie di rette $(t_1, \bar{t}_3)$, $(t_2, \bar{t}_2)$ e sarebbero incidenti secondo una retta, ciò che è impossibile per il primo lemma. Nello stesso modo si esclude che t_3 possa coincidere con $\bar{t}_2$, e si conclude intanto che le tre coppie di rette $(t_1, \bar{t}_1)$, $(t_2, \bar{t}_2)$, $(t_3, \bar{t}_3)$ stanno (se r è generica) in tre piani distinti per r.

Se si fa tendere il punto O a P si vede che il piano di t_3 e $\bar{t}_3$ è precisamente il piano tangente al cono delle trisecanti della superficie per P.

Siamo ora in grado di dimostrare il lemma proposto. Infatti se infinite trisecanti giacessero in un S_3 per il piano π, le rette t_3 e $\bar{t}_3$ sarebbero contenute in un tale S_3 e sarebbero pertanto incidenti a π, e i piani π e π', π e π'' si taglierebbero secondo rette, ciò che è escluso dal primo lemma.

(8) C. SEGRE, *Una osservazione sui sistemi di rette negli iperspazi.* « Rend. Circ. Mat. di Palermo », t. II, 1888, pp. 148–149.

Le cose dette si applicano anche alle trisecanti (che possiamo chiamare d'incrocio) di cui si parlava al principio di questo numero. La proprietà si può esprimere dicendo che *il piano tangente* π *determina con le trisecanti d'incrocio* r *per* P, *tutti gli* S_3 *tangenti in* P.

5. Sia ora r una trisecante d'incrocio generica; se si proietta da un punto O di r, si hanno due rami d_1, d_2 appartenenti a due curve distinte D_1 e D_2 (e quindi anche $\bar{d}_1$, $\bar{d}_2$ appartengono a due curve distinte, mentre d_3, $\bar{d}_3$ possono anche appartenere a qualcuna delle curve precedenti).

Si faccia tendere il punto O a P sulla retta r. Al limite la superficie proiezione F' si spezzerà in una superficie F'' e nel piano a, traccia sull'S_3 di proiezione, dell'S_3 α determinato da π e da r. Il piano a sega la superficie F nella retta eccezionale corrispondente all'intorno di P e in una curva residua, che è la proiezione da P della curva C secondo cui l'iperpiano α interseca F.

La curva doppia Δ della superficie F' diventa al limite la curva formata dalla curva doppia di F'' e dalla intersezione di F'' con a, esclusa la retta eccezionale. Quindi la curva D di F si spezza al limite nella curva C e in una residua $\bar{D}$ che è il luogo dei punti in cui le trisecanti della superficie per P si appoggiano ulteriormente ad F.

Le corde che uscivano dal punto O e davano origine alla curva Δ diventeranno al limite:

le trisecanti della superficie che escono da P; oppure

le corde per P della curva C.

In particolare le corde che partendo da O si appoggiavano a d_3 e $\bar{d}_3$ dànno al limite trisecanti, mentre quelle che partendo da O si appoggiavano a d_1, $\bar{d}_1$; a d_2, $\bar{d}_2$ vanno nelle corde della curva C.

Siano $\bar{d}_1^0$, $\bar{d}_2^0$ i rami cui tendono $\bar{d}_1$, $\bar{d}_2$ quando il punto O tende a P. Essi, come d_1, d_2, devono appartenere a due componenti distinte di D; ed inoltre far parte di C. Quindi la curva C deve essere riducibile. E siccome per il secondo lemma l'iperpiano α è un iperpiano tangente generico, la superficie è rigata o proiezione della superficie di Veronese.

Possiamo ora completare la dimostrazione mostrando che alla detta circostanza non possono verificare le rigate.

Infatti le rette t_1, $\bar{t}_1$, t_2, $\bar{t}_2$, t_3, $\bar{t}_3$ del numero precedente non possono essere generatrici della rigata; perchè se ciò accadesse, ciascun piano tangente avrebbe con la rigata in comune oltre alla generatrice un'altra curva, e ciò è impossibile.

Nel passaggio al limite in cui O tende a P la sezione iperpiana C dovrebbe spezzarsi in tre curve di cui una è la generatrice per P. Anche ciò è manifestamente impossibile.

Matematica. — *Ancora sugli sviluppi canonici di una superficie nell'intorno di un suo punto.* Nota di A. Rollero, presentata [1] dal Socio E. Bompiani.

1. In un precedente lavoro [2] ho posto in relazione gli sviluppi canonici del Bompiani e del Wilczynski, mediante ciascuno dei quali può rappresentarsi l'intorno del 4° ordine di ogni *generico* punto di una superficie F non rigata, con il sistema di equazioni differenziali a derivate parziali completamente integrabile:

$$(1)\qquad \begin{cases} x_{uu} = px + \theta_u x_u + \beta\, x_v \\ x_{vv} = qx + \gamma\ x_u + \theta_v x_v \end{cases} \qquad (\beta\gamma \neq 0)$$

rappresentante la F stessa. Nella presente Nota, che si ricollega al lavoro citato, dò un metodo per ottenere i varî sviluppi canonici di una superficie in un suo punto *generico* e me ne valgo per fissarne uno particolarmente semplice e per stabilire quegli sviluppi canonici per ciascuno dei quali l'asse z del relativo tetraedro invariante di riferimento coincide con la normale proiettiva del Fubini.

2. Mi riferisco, per non ripetermi, alle notazioni e agli sviluppi delle coordinate locali $\overline{X}_i$ già dati nella Nota citata.

Se si applica alle $\overline{X}_i$ la trasformazione di coordinate:

$$(2)\qquad \begin{cases} \sigma Y_1 = a_{11}\overline{X}_1 + a_{13}\overline{X}_3 \\ \sigma Y_2 = a_{22}\overline{X}_2 + a_{23}\overline{X}_3 \\ \sigma Y_3 = a_{33}\overline{X}_3 \\ \sigma Y_4 = a_{41}\overline{X}_1 + a_{42}\overline{X}_2 + a_{43}\overline{X}_3 + \overline{X}_4 \end{cases} \qquad (a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \neq 0)$$

e se si pone poi $x = Y_1 : Y_4$, $y = Y_2 : Y_4$, $z = Y_3 : Y_4$ dagli sviluppi trovati segue [3]:

$$(3)\qquad \begin{cases} x = a_{11}\Delta u + a_{11}\left(\frac{\theta_u}{2} - a_{41}\right)\Delta u^2 + (a_{13} - a_{11}\, a_{42})\,\Delta u\,\Delta v + \frac{a_{11}\,\gamma}{2}\Delta v^2 + \cdots \\ y = a_{22}\Delta v + \frac{a_{22}\,\beta}{2}\Delta u^2 + (a_{23} - a_{22}\, a_{41})\,\Delta u\,\Delta v + a_{22}\left(\frac{\theta_v}{2} - a_{42}\right)\Delta v^2 + \cdots \\ z = a_{33}\left\{\Delta u\,\Delta v + \frac{\beta}{6}\Delta u^3 + \left(\frac{\theta_u}{2} - a_{41}\right)\Delta u^2\,\Delta v + \left(\frac{\theta_v}{2} - a_{42}\right)\Delta u\,\Delta v^2 + \frac{\gamma}{6}\Delta v^3 + \cdots\right\}. \end{cases}$$

(1) Nella seduta dell'8 marzo 1947.

(2) V. la mia Nota, *Sugli sviluppi canonici di una superficie nell'intorno di un suo punto.* « Rend. Acc. Lincei », 1946.

(3) Per quanto precede, v. la mia Nota citata.

3. GLI SVILUPPI CANONICI. – Si imponga ora alle (3) di soddisfare uno sviluppo del tipo [4]:

$$(4)\qquad z = xy + A_1 x^3 + A_2 y^3 + Bx^4 + Cx^3 y + Dx^2 y^2 + Exy^3 + Gy^4 + [5]$$

($A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$). Si ottiene il sistema delle 10 equazioni nelle a_{ik}, A_1, A_2, $B, \cdots, G$;

$$(5)\quad \begin{cases} a_{33} = a_{11}\,a_{22} \quad ; \quad a_{23} = a_{22}\,a_{41} \quad ; \quad a_{13} = a_{11}\,a_{42}\,; \\ a_{22}\,\beta + 3\,A_1\,a_{11}^2 = 0 \quad ; \quad a_{11}\,\gamma + 3\,A_2\,a_{22}^2 = 0\,; \\ a_{22}\,(4\,\beta\theta_u - 8\,a_{41}\,\beta + \beta_u) + 18\,A_1\,a_{11}^2\,(\theta_u - 2\,a_{41}) + 12\,B\,a_{11} = 0\,; \\ \beta_v + \beta\theta_v - 2\,\beta\,a_{42} + 3\,C\,a_{11}^2 = 0\,; \\ a_{11}\,a_{22}\,(2\,\beta\gamma + \theta_{uv} + 2\,a_{41}\,a_{42} - 2\,a_{43}) + 3\,A_1\,a_{11}^3\,\gamma + 3\,A_2\,a_{22}^3\,\beta + 2\,D\,a_{11}^2\,a_{22}^2 = 0\,; \\ \gamma_u + \gamma\theta_u - 2\,\gamma\,a_{41} + 3\,E\,a_{22}^2 = 0\,; \\ a_{11}\,(4\,\gamma\theta_v - 8\,\gamma\,a_{42} + \gamma_v) + 18\,A_2\,a_{22}^2\,(\theta_v - 2\,a_{42}) + 12\,G\,a_{22}^3 = 0\,. \end{cases}$$

Come segue dalle (5) si possono fissare ad arbitrio 5 delle $A_1, A_2, B, \cdots, G$, o si possono fissare 5 condizioni (compatibili fra loro e con la $a_{11}\,a_{22} \neq 0$) cui debbano soddisfare detti coefficienti. In corrispondenza di ognuna di tali scelte si ha uno sviluppo canonico per F nell'intorno di O. In particolare si possono trovare sviluppi in cui B, C, D, E, G siano eguali a delle costanti prefissate; non si può invece trovare alcun sviluppo in cui sia $B = E = 0$ (o $C = G = 0$) giacchè ciò è incompatibile con l'ipotesi di (u, v) punto generico di F.

4. LO SVILUPPO DEL BOMPIANI [5]. – Se si impone alle $A_1, A_2, B, \cdots, G$ di soddisfare le:

$$A_1 = A_2 = \frac{1}{3} \quad , \quad B = E \quad , \quad D = 0 \quad , \quad C = G$$

e si pone, per uniformità con le consuete notazioni:

$$P = 24\,B \quad , \quad T = 24\,C\,,$$

il sistema di equazioni che si ricava dalle (5) ha la soluzione

$$\begin{cases} a_{11} = -\beta^{\frac{2}{3}}\gamma^{\frac{1}{3}} \quad ; \quad a_{13} = -\frac{1}{12}\beta^{-\frac{1}{3}}\gamma^{-\frac{2}{3}}(6\,\beta\gamma\theta_v + 4\,\gamma\beta_v - \beta\gamma_v)\,; \\ a_{22} = -\beta^{\frac{1}{3}}\gamma^{\frac{2}{3}} \quad ; \quad a_{23} = -\frac{1}{12}\beta^{-\frac{2}{3}}\gamma^{-\frac{1}{3}}(6\,\beta\gamma\theta_u + 4\,\beta\gamma_u - \beta_u\gamma)\,; \\ a_{33} = \beta\gamma \quad ; \quad a_{41} = \dfrac{6\,\beta\gamma\theta_u + 4\,\beta\gamma_u - \beta_u\gamma}{12\,\beta\gamma}\,; \\ a_{42} = \dfrac{6\,\beta\gamma\theta_v + 4\,\gamma\beta_v - \beta\gamma_v}{12\,\beta\gamma} \quad ; \quad a_{43} = a_{41}\,a_{42} + \dfrac{\theta_{uv}}{2} \\ P = -\dfrac{4}{3}\beta^{-\frac{5}{3}}\gamma^{-\frac{4}{3}}(2\,\beta\gamma_u + \beta_u\gamma) \quad ; \quad T = -\dfrac{4}{3}\beta^{-\frac{4}{3}}\gamma^{-\frac{5}{3}}(2\gamma\beta_v + \beta\gamma_v) \end{cases}$$

che corrisponde allo sviluppo del Bompiani.

(4) Nei calcoli che si omettono è necessario tener conto nella 1ª e nella 2ª delle (3) dei termini di grado ≤ 3 in Δu, Δv e nella 3ª dei termini di grado ≤ 4.

(5) V. E. BOMPIANI, *Costruzione di elementi superficiali a partire da elementi curvi-*

5. Lo sviluppo del Wilczynski[6]. – Se si impone invece alle $A_1, A_2, B, \cdots, G$ di soddisfare le:

$$A_1 = A_2 = \frac{1}{6} \quad , \quad C = D = E = 0$$

e si pone $I = 24B$, $J = 24G$, dalle (5) segue un sistema di cui una soluzione è, ad esempio;

$$\begin{cases} a_{11} = -2\beta^{\frac{2}{3}}\gamma^{\frac{1}{3}} \; ; \quad a_{13} = -\beta^{-\frac{1}{3}}\gamma^{\frac{1}{3}}(\beta_v + \beta\theta_v) ; \\ a_{22} = -2\beta^{\frac{1}{3}}\gamma^{\frac{2}{3}} \; ; \quad a_{23} = -\beta^{\frac{1}{3}}\gamma^{-\frac{1}{3}}(\gamma_u + \gamma\theta_u) ; \\ a_{33} = 4\beta\gamma \; ; \quad a_{41} = \dfrac{\gamma_u + \gamma\theta_u}{2\gamma} ; \\ a_{42} = \dfrac{\beta_v + \beta\theta_v}{2\beta} \; ; \quad a_{43} = a_{41}a_{42} + \dfrac{\theta_{uv}}{2} ; \\ I = -\dfrac{1}{2}\beta^{-\frac{5}{3}}\gamma^{-\frac{4}{3}}(2\beta\gamma_u + \beta_u\gamma) \; ; \quad J = -\dfrac{1}{2}\beta^{-\frac{4}{3}}\gamma^{-\frac{5}{3}}(2\gamma\beta_v + \beta\gamma_v) \end{cases}$$

mentre dallo sviluppo (4) scende ora lo sviluppo del Wilczynski.

6. Un notevole sviluppo canonico. – Si imponga ora alle $A_1, A_2, B, \cdots, G$ di soddisfare le:

$$A_1 = A_2 = 1 \quad , \quad B = D = G = 0 .$$

Posto $C = U$, $E = V$, dalle (5) segue un sistema di cui una soluzione è, ad esempio:

$$a_{11} = -\frac{1}{3}\beta^{\frac{2}{3}}\gamma^{\frac{1}{3}} \; ; \quad a_{13} = -\frac{1}{12}\beta^{\frac{2}{3}}\gamma^{-\frac{2}{3}}(2\gamma\theta_v - \gamma_v) ;$$

$$a_{22} = -\frac{1}{3}\beta^{\frac{1}{3}}\gamma^{\frac{2}{3}} \; ; \quad a_{23} = -\frac{1}{12}\beta^{-\frac{2}{3}}\gamma^{\frac{2}{3}}(2\beta\theta_u - \beta_u) ;$$

$$a_{33} = \frac{1}{9}\beta\gamma \; ; \quad a_{41} = \frac{2\beta\theta_u - \beta_u}{4\beta} ;$$

$$a_{42} = \frac{2\gamma\theta_v - \gamma_v}{4\gamma} \; ; \quad a_{43} = a_{41}a_{42} + \frac{\theta_{uv}}{2} ;$$

$$U = -\frac{3}{2}\beta^{-\frac{4}{3}}\gamma^{-\frac{5}{3}}(2\gamma\beta_v + \beta\gamma_v) \; ; \quad V = -\frac{3}{2}\beta^{-\frac{5}{3}}\gamma^{-\frac{4}{3}}(2\beta\gamma_u + \beta_u\gamma) ,$$

linei. (« Rend. Acc. Lincei », 1937); *Gli analoghi proiettivi dei teoremi di Meusnier e di Eulero.* (« Rend. Seminario Matematico Università di Roma », 1938).

(6) V. E. J. Wilczynski, *Projective Differential Geometry of Curved Surfaces.* (Second Memoir), « American Mathematical Society Transactions », IX, 1908, p. 103; E. Lane, *Projective Differential Geometry of Curves and Surfaces.* Chicago, 1932, p. 294.

mentre dallo sviluppo (4) scende lo sviluppo:

$$\zeta = xy + x^3 + y^3 + xy(Ux^2 + Vy^2) + [5] \tag{6}$$

(U , V invarianti).

Lo sviluppo (6) è notevole per la rapidità con cui può determinarsi il riferimento invariante ad esso relativo. Ecco come vi si arriva: scelte le tangenti asintotiche ad F in O come assi x ed y, l'asse ζ e la retta all'∞ di $\zeta = 0$ come polari nella polarità del Darboux, F è rappresentata nell'intorno di O da:

$$\zeta = axy + a_{30}x^3 + a_{03}y^3 + a_{40}x^4 + Ux^3y + a_{22}x^2y^2 + Vxy^3 + a_{04}y^4 + [5].$$

In $\zeta = 0$ (piano tangente ad F in O) v'è una cubica con punto doppio in O la quale ha ivi contatto del 3° ordine con ambo i rami della linea di intersezione di F con $\zeta = 0$. Assunta la retta dei flessi di detta cubica come retta all'∞ di $\zeta = 0$ risulta $a_{40} = a_{04} = 0$, mentre riesce determinato l'asse ζ. Esiste poi una sola F^3 a contatto del 4° ordine con F in O, avente un punto doppio sull'asse ζ, e per la quale il cono ad essa tangente in detto punto doppio taglia $x_3 = x_4 = 0$ [7] in una coppia di punti separante armonicamente la coppia (1,0,0,0), (0,1,0,0). Assunto il punto doppio di tale F^3 come punto all'∞ dell'asse ζ risulta $a_{22} = 0$. Si consideri infine la cubica sezione con $\zeta = 0$ della F^3 testè esaminata e le 2 coniche osculatrici a detta cubica in O: esse si incontrano (oltre che in O) in 3 punti distinti; assunto uno di questi punti (quello reale) come punto $(1, 1, 0, -1)$ [8] risulta $a_{30} = a_{03} = a$. Il punto unità dello spazio può poi prendersi sulla quadrica invariante $\zeta = axy$ ed allora è $a_{30} = a_{03} = a = 1$. Resta in tale modo completamente individuato il tetraedro di riferimento relativo allo sviluppo (6).

7. GLI SVILUPPI CANONICI CHE METTONO IN RILIEVO LA NORMALE PROIETTIVA DEL FUBINI. – Mi propongo ora di determinare tutti i possibili sviluppi del tipo (4) per ciascuno dei quali l'asse ζ del relativo tetraedro di riferimento è *la normale proiettiva del Fubini*. A questo scopo si osservi che se nelle (1) è $\theta = \lg \beta\gamma$ la normale proiettiva del Fubini, relativa al punto $x^{(i)}(u, v)$ di F è la retta $x^{(i)}x^{(i)}_{uv}$; d'altra parte quando si applica la trasformazione di coordinate (2), le equazioni $\bar{X}_1 = \bar{X}_2 = 0$ si mutano nelle $Y_1 = Y_2 = 0$ qualora sia $a_{13} = a_{23} = 0$. Segue da ciò che nel tetraedro relativo allo sviluppo (4) l'asse ζ è la normale proiettiva del Fubini tutte le volte che le $A_1, A_2, B, \cdots, G$ sono tali da soddisfare al sistema ottenuto dalle (5) facendo in esse $\theta = \lg \beta\gamma$, $a_{13} = a_{23} = 0$, cioè tutte le volte che sia:

$$CA_2 + 4GA_1 = 0 \quad ; \quad EA_1 + 4BA_2 = 0. \tag{7}$$

(7) Naturalmente s'è posto $x = x_1/x_4$, $y = x_2/x_4$, $\zeta = x_3/x_4$.

(8) In conseguenza di tale scelta riesce determinato il punto (1, 1, 0, 1).

Viceversa se sono soddisfatte le (7), dal sistema (5) in cui si ponga $\theta = \lg \beta\gamma$ segue $a_{13} = a_{23} = 0$. Concludendo: condizione necessaria e sufficiente affinchè il tetraedro di riferimento relativo allo sviluppo (4) ammetta come asse z la normale proiettiva del Fubini è che siano verificate le (7).

Fra gli sviluppi canonici il cui tetraedro di riferimento ammette come asse z la normale proiettiva del Fubini, è particolarmente semplice quello per cui:

$$A_1 = A_2 = 1 \quad , \quad D = 0. \tag{8}$$

Posto $C = H$, $E = K$ detto sviluppo si scrive:

$$z = xy + x^3 + y^3 + Kx\left(y^3 - \frac{x^3}{4}\right) + Hy\left(x^3 - \frac{y^3}{4}\right) + [5]$$

(H , K invarianti). Esso, come già gli sviluppi precedentemente esaminati, può farsi scendere dalla (4), qualora nelle (5), in cui in generale *non sarà* $\theta = \lg \beta\gamma$, si tenga conto delle (8) e si imponga alle B , C , E , G di soddisfare le:

$$G = -\frac{C}{4} \quad , \quad B = -\frac{E}{4}.$$

Una soluzione del sistema che si ottiene in tal modo dalle (5) è poi [9]:

$$\left\{\begin{array}{l}
a_{11} = -\frac{1}{3}\beta^{\frac{2}{3}}\gamma^{\frac{1}{3}} \quad ; \quad a_{13} = -\frac{1}{6}\beta^{-\frac{1}{3}}\gamma^{-\frac{2}{3}}(\beta\gamma\theta_v - \beta\gamma_v - \gamma\beta_v); \\
a_{22} = -\frac{1}{3}\beta^{\frac{1}{3}}\gamma^{\frac{2}{3}} \quad ; \quad a_{23} = -\frac{1}{6}\beta^{-\frac{2}{3}}\gamma^{-\frac{1}{3}}(\beta\gamma\theta_u - \beta_u\gamma - \beta\gamma_u); \\
a_{33} = \frac{1}{9}\beta\gamma \quad ; \quad a_{41} = \frac{\beta\gamma\theta_u - \beta_u\gamma - \beta\gamma_u}{2\beta\gamma}; \\
a_{42} = \frac{\beta\gamma\theta_v - \beta\gamma_v - \gamma\beta_v}{2\beta\gamma} \quad ; \quad a_{43} = a_{41}a_{42} + \frac{\theta_{uv}}{2}; \\
H = -3\beta^{-\frac{4}{3}}\gamma^{-\frac{5}{3}}(2\gamma\beta_v + \beta\gamma_v) \; ; \; K = -3\beta^{-\frac{5}{3}}\gamma^{-\frac{1}{3}}(2\beta\gamma_u + \beta_u\gamma).
\end{array}\right. \tag{9}$$

(9) Si noti che se nelle (9) è $\theta = \lg \beta\gamma$ segue $a_{41} = a_{42} = a_{13} = a_{23} = 0$.

Meccanica. — *Sull'attrito di rotolamento nei solidi elastici.* Nota II di C. CATTANEO, presentata[1] dal Socio A. SIGNORINI.

In una Nota di recente pubblicazione[2] ho sviluppato in dettaglio i calcoli relativi a una teoria elastica dell'attrito di rotolamento da me esposta qualche anno fa, per sommi capi, in questi « Rendiconti »[3]. Dal lato matematico, la questione si riduce sostanzialmente allo studio di un'equazione integrale a nucleo logaritmico che ho compiutamente risolta con l'ausilio sistematico della teoria delle funzioni analitiche. Il metodo adottato ha carattere generale per quel tipo di nucleo, restando valido per qualunque espressione del membro noto dell'equazione integrale. Tuttavia nel caso specifico, stante la particolare forma di tale secondo membro (polinomio quadratico), il procedimento risolutivo può essere molto sveltito, come mostrerò in questa breve Nota. Naturalmente i risultati che si ottengono seguendo le due diverse vie, sono perfettamente concordi. Nel seguito farà diretto riferimento alla precitata Nota lincea[4] di cui la presente può considerarsi il completamento. Anche le formule saranno numerate in continuazione.

1. La questione meccanica trattata nella precedente Nota I ha posto la risoluzione della seguente equazione integrale[5]

$$\int_{x'_1}^{x'_2} p(\bar{x}) \log \frac{R}{|\bar{x} - x'|} d\bar{x} = A' + B' x' - C' x'^2 ,$$

con x'_1, x'_2, A', B', C', R costanti, ben determinate le ultime due, indeterminate le altre. All'incognita funzione $p(x')$ (pressione specifica entro un certo segmento $s \equiv (x'_1, x'_2)$ di contatto tra disco elastico e appoggio rigido) si impone inoltre di essere regolare e non negativa entro s, nulla ai suoi estremi, e di soddisfare alla condizione integrale

$$\int_s p(x') dx' = P , \tag{8}$$

essendo P una quantità nota (compressione globale).

(1) Nella seduta dell'11 gennaio 1947.

(2) *Complementi matematici alla Nota « Sull'attrito di rotolamento nei solidi elastici »*. « Rendiconti di matematica e delle sue applicazioni », 1946.

(3) *Sull'attrito di rotolamento nei solidi elastici*. « Rend. della R. Accad. Naz. dei Lincei », vol. XXIX, ser. 6ª, 1° sem., pp. 403–411.

(4) La chiamerò brevemente Nota I.

(5) Si tratta, salvo il fattore $\frac{1}{\vartheta}$ e la sostituzione di d con R (cfr. n. 5, in fine), della (7), ove si è posto $A' = \frac{P}{2\pi\mu\vartheta} + \frac{\delta}{\vartheta}$, $B' = \frac{\alpha}{\vartheta}$, $C' = \frac{1}{2R\vartheta}$.

Sostituiamo anzitutto alla x' una nuova variabile indipendente, ad essa così legata

$$x = x' - \frac{x'_1 + x'_2}{2} . \tag{17}$$

Ponendo inoltre

$$\begin{cases} a = \dfrac{x'_2 - x'_1}{2} \quad , \quad b = \dfrac{x'_1 + x'_2}{2} , \\ A = A' + B' b - C' b^2 - P \log R \quad , \quad B = B' - 2 b C' , C = C' , \end{cases} \tag{18}$$

l'equazione integrale, indicata ancora con $\bar{x}$ la variabile di integrazione, si scrive

$$\int_{-a}^{+a} p(\bar{x}) \log \frac{1}{|\bar{x} - x|} d\bar{x} = A + Bx - Cx^2 \qquad (|x| \leq a). \tag{7''}$$

Per risolverla, si consideri in un piano ausiliario Oxy la funzione in due variabili

$$U(x, y) = \int_{-a}^{+a} p(\bar{x}) \log \frac{1}{r} dx , \tag{19}$$

con $r = \sqrt{(\bar{x} - x)^2 + y^2}$. Si tratta di un potenziale logaritmico di linea, funzione armonica, continua in tutto il piano, che sul segmento s ($-a \leq x \leq a$, $y = 0$) si riduce al polimonio $A + Bx - Cx^2$ e che all'infinito, stante la (8), si comporta come la funzione $P \log \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Assieme alla U consideriamo la funzione $H(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}$, anch'essa regolare in tutto il piano, escluso il segmento s, e nulla all'infinito. Poichè in base a una ben nota proprietà dei potenziali logaritmici di semplice strato si ha:

$$\frac{1}{\pi} H_{\substack{y = 0+ \\ |x| \leq a}} = p(x) , \tag{20}$$

è chiaro che l'eventuale conoscenza di H comporterebbe l'immediata risoluzione della (7)''. È appunto la determinazione della H che direttamente ci proponiamo.

Dall'armonicità della U segue

$$\frac{\partial H}{\partial y} = - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

sì che in particolare sul segmento s si ha, in base alla (7)',

$$\left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)_{\substack{y = 0+ \\ |x| \leq a}} = 2C . \tag{21}$$

Eseguiamo ora il seguente cambiamento di variabili:

$$x = \frac{a}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos \Theta \quad , \quad y = \frac{a}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \sin \Theta ; \tag{22}$$

interpretando la ρ e la Θ come coordinate polari in un piano $\Omega\xi\eta$ ($\xi = \rho\cos\Theta$, $\eta = \rho\sin\Theta$) le (22) equivalgono a trasformare conformemente il piano Oxy, munito di un taglio in s, nell'area circolare Γ di centro Ω e raggio 1. Le (22) fanno corrispondere al punto all'infinito del piano xy l'origine Ω del piano $\xi\eta$ e ai lembi superiore e inferiore del segmento S rispettivamente le semicirconferenze inferiore e superiore di Γ.

Stante le (22), lungo il contorno di Γ si ha:

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\dfrac{\partial H}{\partial \rho}}{a\sin\Theta} \quad (\rho = 1)$$

e quindi, con riguardo alla (21),

$$\frac{\partial H}{\partial \rho} = 2\,C a\sin\Theta\,.$$

La H, armonica e regolare nel piano xy, tagliato in s, è armonica e regolare in Γ, e nulla in Ω; la sua derivata normale al contorno vale $2\,Ca\sin\Theta$: l'unica funzione armonica soddisfacente a tali condizioni è palesemente $2\,C a\,\eta = 2\,C a\rho\sin\Theta$. In particolare sulla circonferenza si ha

$$H = 2\,C a\sin\Theta\,. \tag{23}$$

Tornando alle antiche variabili, e avendo presente la (20), si trova

$$p(x) = \frac{2\,Ca}{\pi}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,. \tag{24}$$

L'equazione integrale è così sostanzialmente risolta. Rimangono da calcolare, in base ai dati diretti del problema, le costanti a, A, B.

2. Cominciamo col tener conto della condizione (8). Esplicitata ivi la $p(x)$ ed eseguita la semplice quadratura, si ottiene:

$$a = \sqrt{\frac{P}{C}} = \sqrt{2\,\vartheta R P}\,. \tag{25}$$

La determinazione di A e B può farsi in modo rapido attraverso l'espressione esplicita della U, della quale già conosciamo la derivata normale sul contorno di Γ

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = a\sin\Theta\,\frac{\partial U}{\partial y} = 2\,Ca^2\sin^2\Theta\,.$$

Poichè tuttavia la U ha una singolarità in Ω, comportandosi ivi come la funzione $P\log\frac{2\rho}{a}$, conviene direttamente riferirsi alla funzione $K(\rho,\Theta) = U(\rho,\Theta) - P\log\frac{2\rho}{a}$, armonica come la U, ma regolare in tutta Γ e nulla in Ω. Si ha per questa sulla circonferenza $\rho = 1$

$$\frac{\partial K}{\partial \rho} = P(2\sin^2\Theta - 1) = -P\cos 2\Theta:$$

si risale, a vista, all'espressione di K

$$K(\rho, \Theta) = -P\frac{\rho^2 \cos 2\Theta}{2},$$

e quindi di U

$$U(\rho, \Theta) = P \log \frac{2\rho}{a} - P\frac{\rho^2 \cos 2\Theta}{2}. \tag{28}$$

Posto $\rho = 1$ e x in luogo di $a \cos\Theta$ si ottiene

$$U(x, 0) = P \log \frac{2}{a} + \frac{P}{2} - \frac{P}{a^2} x^2. \tag{29}$$

Di qui identificando col secondo membro della (7)'' si ottengono immediatamente i valori di A e di B

$$A = \frac{P}{2} + P \log \frac{2}{a} \; ; \; B = 0\,(6).$$

3. Perchè la soluzione ora determinata, regolare e non negativa in s, sia fisicamente accettabile, occorre ancora che al di fuori del segmento $(-a, a)$ sia soddisfatta una certa disuguaglianza, la (5) della Nota I, che, espressa nella variabile x anzichè nella x' ha la forma

$$v(x) - \vartheta\left(A + Bx - Cx^2 - \frac{P}{2\pi\mu\vartheta} + P \log R\right) > 0 \quad (|x| > a)$$

ovvero, dato che lo spostamento $v(x)$ è espresso da $\vartheta U(x, 0) + \vartheta P \log R - \frac{P}{2\pi\mu}$ (cfr. Nota I, n. 4) su tutto l'asse x,

$$U(x, 0) - (A + Bx - Cx^2) > 0 \quad (|x| > a).$$

Passando alle variabili ρ, Θ e ponendo $\Theta = 0$, ovvero $\Theta = \pi$ (7), si è condotti a verificare, una volta esplicitate le costanti A, B, C, che è positiva, per $\rho < 1$, la funzione

$$F(\rho) = \frac{P}{4\rho^2} - \frac{P}{4}\rho^2 + P \log \rho.$$

Essendo

$$F(1) = 0 \quad , \quad F'(\rho) = -\frac{P(1-\rho^2)^2}{2\rho^3} < 0,$$

si riconosce in effetto che la F, nulla per $\rho = 1$ è, per $\rho < 1$, funzione decrescente di ρ e quindi positiva.

(6) Si noti che se B fosse una costante preventivamente assegnata e diversa da zero, la (7)'' non ammetterebbe soluzioni regolari; potrebbe però ammettere soluzioni dotate di qualche singolarità; per determinarle varrebbe ad esempio il procedimento generale indicato nel lavoro citato nella nota (2).

(7) Ai punti dell'asse x esterni al segmento s corrispondono sul piano $\xi\eta$ i punti del diametro di Γ sovrapposto all'asse ξ; precisamente ai punti $x \geq a$ corrispondono i punti del raggio $(\Theta = 0, \rho \leq 1)$ mentre i punti del raggio $(\Theta = \pi, \rho \leq 1)$ corrispondono ai punti $x \leq -a$.

Meccanica (Meccanica dei fluidi). — *Sulla teoria delle schiere di profili alari.* Nota di C. FERRARI, presentata [1] dal Socio M. PANETTI.

1. In una Nota precedente [2] ho indicato un metodo rapido, approssimato, per la determinazione delle caratteristiche aerodinamiche di una schiera di profili alari, basato sul metodo dei vortici di sostituzione e sulla ricerca analoga svolta dal Betz [3]; in questa Nota riprendo lo stesso problema per darne una soluzione esatta nei limiti della teoria delle ali sottili e poco curve. Il metodo ora proposto ha rispetto ai numerosi procedimenti già da tempo esposti da vari Autori, tra i quali per la completezza dei risultati ottenuti è da segnalarsi quello di E. Pistolesi [4], il vantaggio che esso è estendibile, come sarà mostrato in altra Nota, anche al caso in cui la curvatura dei profili è ovunque tale, che la sostituzione della vorticità aderente lungo la linea d'asse con una distribuzione vorticosa lungo la corda non sembra più giustificabile; d'altra parte, il metodo stesso permette di soddisfare le condizioni al contorno in modo completo, nei limiti già indicati, e non in un numero limitato di punti di questo, e consente infine di ottenere, con relativa semplicità, le forme dei profili alari, che corrispondono a date condizioni per il diagramma delle pressioni lungo il profilo, come pure sarà mostrato in altra Nota.

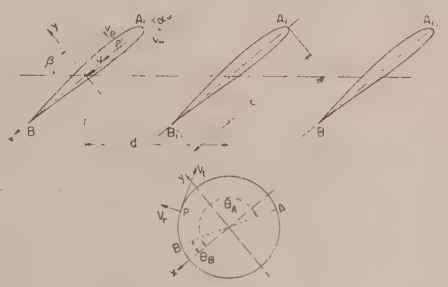


Fig. 1.

2. Consideriamo dapprima profili alari infinitamente sottili, cioè ridotti alla loro linea d'asse, e, secondo il metodo di Glauert, otteniamo il campo aerodinamico attorno ad essi sommando alla corrente asintotica $\mathbf{V}_\infty$ il campo generato da una conveniente distribuzione di *vortici aderenti*, disposti lungo le corde di ogni profilo. Per tale determinazione applichiamo al piano della variabile complessa z, a cui appartiene la schiera, la trasformazione definita dalla

$$(1) \qquad z = \frac{d}{2\pi}\left[e^{-i\beta}\log\frac{a+k\zeta}{a-k\zeta} + e^{i\beta}\log\frac{\zeta+ak}{\zeta-ak}\right]$$

(1) Nella seduta dell'8 febbraio 1947.

(2) C. FERRARI, *Un metodo rapido approssimato di calcolo delle caratteristiche aerodinamiche delle schiere di profili alari.* « Atti della Accad. delle Scienze di Torino » (febb. 1947).

(3) A. BETZ, *Diagramme zur Berechnung von Flügelreihen.* « Ingenieur–Archiv », vol. II, 1931, p. 359.

(4) E. PISTOLESI, *Sul calcolo di schiere infinite di ali sottili.* « L'Aerotecnica », giugno 1937; *Sul calcolo pratico delle schiere alari,* « L'Aerotecnica », ottobre 1938.

in cui β è l'*obliquità* della schiera (fig. 1), d il *passo* di questa (distanza dei punti di mezzo delle corde di due profili consecutivi di essa), e k un parametro numerico, che dipende dal rapporto $\frac{c}{d}$, tra la lunghezza $c = 2l$ di ciascuna corda e la distanza d già definita, secondo la

$$(2) \qquad \frac{c}{d} = \frac{2}{\pi}\left[\cos\beta \log \frac{\sqrt{1 + k^4 + 2k^2\cos 2\beta} + 2k\cos\beta}{1 - k^2} + \right.$$
$$\left. + \operatorname{sen}\beta \operatorname{arctg} \frac{2k \operatorname{sen}\beta}{\sqrt{1 + k^4 + 2k^2\cos 2\beta}}\right].$$

Nella fig. 2 sono dati i diagrammi, che dànno i valori di $\frac{c}{d}$ in funzione di β per diversi valori del parametro k.

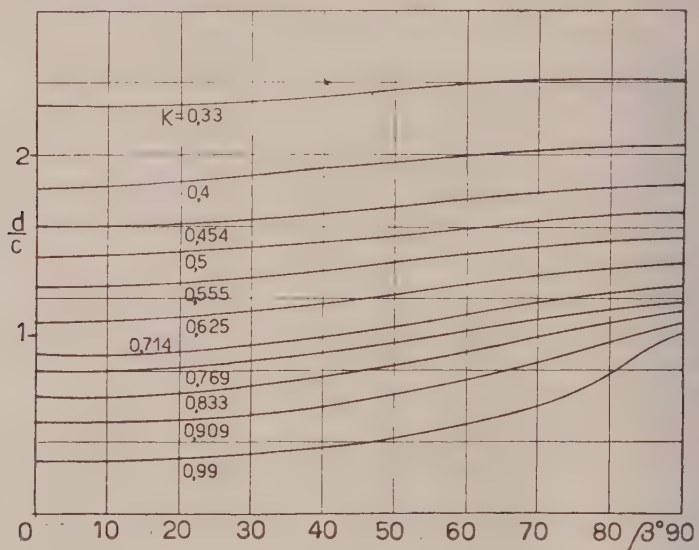


Fig. 2.

La (1) fa corrispondere, com'è noto [5], alla schiera dei doppi segmenti Σ_1, coincidenti colle corde dei profili, il cerchio σ, il cui raggio è a, e ai punti A_1 e B_1, rispettivamente bordo di attacco e bordo di fuga, i punti A e B del cerchio di anomalia θ_A e θ_B date dalle

$$(3) \qquad \operatorname{tg}\theta_B = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}\operatorname{tg}\beta \quad ; \quad \theta_A = \theta_B + \pi .$$

Detti punti A e B sono *punti singolari* della trasformazione definita dalla (1), ed in essi è $\frac{dz}{d\zeta} = 0$.

(5) S. KAWADA, *A Contribution to the Theory of Latticed Wing.* « Proc. III Intern. Congress for Appl. Mech. », vol. 1°, p. 393, Stoccolma, 1930; Th. von KÀRMÀN e J. M. BURGERS, *General Aerodynamic Theory perfect Fluids*, vol. II di « Aerodynamic Theory » di W. F. Durand, p. 93.

3. Se u e v sono le componenti della velocità secondo x e y (disposti e orientati come è indicato in fig. 1) in un punto generico P_1' di Σ_1, ad esse corrispondono, nella trasformazione sopra indicata, le componenti V_t e V_r della velocità, rispettivamente tangente e normale a σ, orientate nel senso indicato dalla fig. 1, nel punto P omologo di P_1', date dalla

$$u - iv = (V_r - iV_t)\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_{\zeta = a\,e^{i\theta}} e^{-i\theta} \tag{4}$$

da cui

$$V_t = -\frac{d}{2\pi a} u\,F(\theta) \quad ; \quad V_r = \frac{d}{2\pi a} v\,F(\theta) \tag{5}$$

posto

$$F(\theta) = \frac{4k(1+k^2)}{(1+k^2)^2 - 4k^2\cos^2\theta}\,\frac{\cos\beta}{\cos\theta_B}\,\mathrm{sen}\,(\theta - \theta_B). \tag{6}$$

Ora, nei punti del doppio segmento generico $A_1 B_1$, per la condizione di tangenza della velocità risultante al contorno del profilo, la v prodotta dalla distribuzione vorticosa aderente deve risultare uguale a

$$v = V_\infty \frac{dy}{dx}, \tag{7}$$

posto l'incidenza α_∞ di $\mathbf{V}_\infty$ su Σ_1 uguale a zero, e se $y = f(x)$ è l'equazione della linea d'asse del profilo in esame. Se ne deduce che nei punti di σ si deve avere

$$V_r = \frac{d}{2\pi a} V_\infty \frac{dy}{dx} F(\theta). \tag{8}$$

Ma dalla (1) risulta

$$x = \frac{d}{\pi}\left(\cos\beta \log \frac{\sqrt{(1+k^2)^2 - 4k^2\cos^2\theta}}{1 + k^2 - 2k\cos\theta} + \mathrm{sen}\,\beta\,\mathrm{arctg}\,\frac{2k\,\mathrm{sen}\,\theta}{1-k^2}\right) \tag{9}$$

e pertanto, essendo y funzione nota della x, il secondo membro della (8) risulta pure funzione nota del parametro θ. Si può allora determinare, per mezzo della *formula di Poisson*, la componente della velocità tangente al cerchio σ: essa risulta

$$V_t' = -\frac{1}{2\pi} V_\infty \frac{d}{2\pi a} \int_0^{2\pi} \frac{dy}{dx} F(\theta) \cot g \frac{\theta - \theta_1}{2} d\theta \tag{10}$$

se con θ_1 si indica l'argomento del generico punto di σ, in cui si calcola la V_t'.

4. Il campo di velocità, che ha su σ la componente tangente data dalla (10), ha su σ stessa una componente normale uguale a $\frac{dy}{dx} V_\infty F(\theta) \frac{d}{2\pi a}$, ossia al valore prescritto; è regolare ovunque esternamente al cerchio, mentre la sua velocità all'infinito tende a zero come $\frac{1}{|\zeta^2|}$, essendo $\int_0^{2\pi} \frac{dy}{dx} F(\theta)\,d\theta = 0$;

per $\theta_1 = \theta_A$; $\theta_1 = \theta_B$ infine la V'_t è generalmente diversa da zero, mentre è in detti punti $\frac{d\zeta}{dz} = \infty$. Appare perciò, che il campo corrispondente esterno ai profili del piano z è pure regolare ovunque, ad eccezione dei punti A_1 e B_1. Per regolarizzare il deflusso alle *punte* B_1 (condizione di Joukowski), si può ancora aggiungere un deflusso *circolatorio* prodotto da due vortici dello stesso senso collocati entro il cerchio nei punti dell'asse delle ascisse $+ak$ e $-ak$ e dai due vortici riflessi disposti nei punti del medesimo asse $\pm \frac{a}{k}$. Il potenziale complesso di questo campo è

$$W_1(\zeta) = \frac{i\Gamma_0}{2\pi} \log \frac{\zeta^2 - a^2 k^2}{\zeta^2 - a^2/k^2}$$

e la velocità corrispondente nei punti di σ è data dalle

$$V''_r = 0 \quad ; \quad V''_t = -\frac{\Gamma_0}{\pi a} \frac{1 - k^4}{(1 + k^2)^2 - 4k^2 \cos^2\theta}$$

mentre la circuitazione attorno a σ, e quindi attorno a Σ, è $2\Gamma_0$. Per la regolarità del flusso in B_1 dovrà essere

$$V''_{tB} + V'_{tB} = 0,$$

ossia

$$\frac{\Gamma_0}{\pi a} \frac{1 - k^4}{(1 + k^2)^2 - 4k^2 \cos^2\theta_B} + \frac{1}{2\pi} V_\infty \frac{d}{2\pi a} \int_0^{2\pi} \frac{dy}{dx} F(\theta) \operatorname{cotg} \frac{\theta - \theta_B}{2} d\theta = 0$$

da cui

$$(11) \qquad \Gamma_0 = \frac{1}{2} V_\infty \frac{d}{2\pi c} \frac{(1 + k^2)^2 - 4k^2 \cos^2\theta_B}{1 - k^4} \int_0^{2\pi} \frac{dy}{dx} F(\theta) \operatorname{cotg} \frac{\theta_B - \theta}{2} d\theta$$

che permette di determinare la circuitazione attorno al cerchio, per $\alpha_\infty = 0$, con una semplice integrazione. Per una incidenza α_∞ diversa da zero, basta sommare alla $2\Gamma_0$, data dalla (11), la circuitazione corrispondente, per la stessa incidenza, al profilo a lamina piana, data dalla

$$(12) \qquad 2\Gamma_1 = \frac{4kc}{\sqrt{k^4 + 2k^2 \cos 2\beta + 1}} V_\infty \frac{d}{c} \operatorname{sen} \alpha_\infty .$$

5. Dalla (11) è relativamente semplice ricavare il profilo isolato, in corrente uniforme, *equivalente* al profilo nella schiera, intendendo però la *equivalenza* non in senso stretto, come nella nota citata in [2], ossia con riferimento alla distribuzione della vorticità aderente, bensì in senso più lato: ossia, chiamando « equivalente » il profilo della *medesima famiglia*, che presenta la medesima circuitazione, a parità di velocità indisturbata.

Consideriamo infatti profili a due parametri, e poniamo

$$\frac{2y}{c} = \beta_0 + \beta_1 \xi - \beta_0 \xi^2 - \beta_1 \xi^3 \quad \text{ossia} \quad \frac{dy}{dx} = \beta_1 - 2\beta_0 \xi - 3\beta_1 \xi^2$$

con $\xi = \frac{2x}{c}$. Si ha per profilo isolato di *parametro di curvatura* β'_0 *e parametro di posizione di inarcamento* β'_1, $2\Gamma_0 = \pi c V_\infty (\beta'_1 - \frac{1}{2}\beta'_0)$.

Dalla (11) si ricava invece

$$2\Gamma_0 = \pi c V_\infty \frac{d}{2\pi c} \frac{(1+k^2)^2 - 4k^2\cos^2\theta_B}{1-k^4} \left[\frac{2\beta_0}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2x}{c} F(\theta) \operatorname{cotg} \frac{\theta - \theta_B}{2} d\theta - \right.$$

$$\left. - \frac{\beta_1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\frac{4x^2}{c^2}\right) F(\theta) \operatorname{cotg} \frac{\theta - \theta_B}{2} d\theta \right]$$

e pertanto per la equivalenza deve essere

$$(13) \quad \begin{cases} \beta'_0 = \frac{\beta_0}{\pi} \frac{2d}{\pi c} \frac{(1+k^2)^2 - 4k^2\cos^2\theta_B}{1-k^4} \int_0^{2\pi} \frac{x}{c} F(\theta) \operatorname{cotg} \frac{\theta - \theta_B}{2} d\theta \\ \beta'_1 = \frac{\beta_1}{\pi} \frac{2d}{\pi c} \frac{(1+k^2)^2 - 4k^2\cos^2\theta_B}{1-k^4} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{6x^2}{c^2}\right) F(\theta) \operatorname{cotg} \frac{\theta - \theta_B}{2} d\theta \end{cases}$$

in cui la x è la funzione di θ data dalla (9). Le (13) stabiliscono la corrispondenza cercata tra i parametri omologhi dei profili equivalenti, che permettono di passare dai profili nella schiera al profilo isolato, e viceversa.

Se l'incidenza α_∞ non è uguale a zero, per la equivalenza, sempre restando i parametri di forma nella corrispondenza stabilita dalle (13), è necessario che, detta α' l'incidenza del profilo isolato, sia

$$(14) \qquad \alpha' = \alpha_\infty \frac{d}{\pi c} \frac{4k}{\sqrt{1+k^4+2k^2\cos 2\beta}} .$$

6. È ancora opportuno vedere come si possa ricavare dalle formule sopra trovate l'angolo di incidenza *ottimo*, intendendo con questo definire l'angolo di attacco, per il quale anche la velocità nel bordo di attacco del profilo infinitamente sottile risulta *finita*, e quindi la corrente ovunque *regolare*: per detto angolo, infatti, la componente di *grad. p* secondo la tangente al contorno, sul dorso, è parecchio inferiore rispetto a quella, che si produce per le incidenze superiori, ed in conseguenza il pericolo di *distacco* della vena fluida è meno grave.

Per $\alpha_\infty = \alpha_{opt.}$ deve essere nulla anche la V_t in A, e pertanto deve essere:

$$V'_{tA} + V''_{tA} = -\frac{1}{2\pi} V_\infty \frac{d}{2\pi a} \int_0^{2\pi} \left(\frac{dy}{dx} - \alpha_{opt.}\right) F(\theta) \operatorname{cotg} \frac{\theta - \theta_A}{2} d\theta -$$

$$- \frac{\Gamma}{\pi a} \frac{1-k^4}{(1+k^2)^2 - 4k^2\cos^2\theta_A} = 0$$

in cui è $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1$, mentre Γ_0 e Γ_1 sono definiti dalle (11) e (12).

Ma è

$$F(\theta)\operatorname{cotg}\frac{\theta-\theta_A}{2}=-\frac{4k(1+k^2)}{(1+k^2)^2-4k^2\cos^2\theta}\frac{\cos\beta}{\cos\theta_B}[1+\cos(\theta-\theta_A)]$$

mentre

$$F(\theta)\operatorname{cotg}\frac{\theta-\theta_B}{2}=\frac{4k(1+k^2)}{(1+k^2)^2-4k^2\cos^2\theta}\frac{\cos\beta}{\cos\theta_B}[1+\cos(\theta-\theta_B)]$$

e poichè è per la (11)

$$\frac{\Gamma_0}{\pi a}\frac{1-k^4}{(1+k^2)^2-4k^2\cos^2\theta_B}+$$

$$+\frac{2}{2\pi}V_\infty\frac{d}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\frac{dy}{dx}\frac{4k(1+k^2)}{(1+k^2)^2-4k^2\cos^2\theta}\frac{\cos\beta}{\cos\theta_B}[1+\cos(\theta-\theta_B)]\,d\theta=0$$

risulta

$$\frac{\Gamma_0}{\pi a}\frac{1-k^4}{(1+k^2)^2-4k^2\cos^2\theta_A}-$$

$$-\frac{1}{2\pi}V_\infty\frac{d}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\frac{dy}{dx}\frac{4k(1+k^2)}{(1+k^2)^2-4k^2\cos^2\theta}\frac{\cos\beta}{\cos\theta_B}[1-\cos(\theta-\theta_B)]\,d\theta=$$

$$=-2\frac{1}{2\pi}V_\infty\frac{d}{2\pi a}4k(1+k^2)\frac{\cos\beta}{\cos\theta_B}\int_0^{2\pi}\frac{dy}{dx}\frac{d\theta}{(1+k^2)^2-4k^2\cos^2\theta}$$

mentre essendo per la (12)

$$\frac{\Gamma_1}{\pi a}\frac{1-k^4}{(1+k^2)^2-4k^2\cos^2\theta_B}-$$

$$-\frac{1}{2\pi}V_\infty\frac{d}{2\pi a}\alpha_{opt.}\,4k(1+k^2)\frac{\cos\beta}{\cos\theta_B}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(1+k^2)^2-4k^2\cos^2\theta}=0$$

si ha

$$\frac{\Gamma_1}{\pi a}\frac{1-k^4}{(1+k^2)^2-4k^2\cos^2\theta_A}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}V_\infty\frac{d}{2\pi a}\alpha_{opt.}\,4k(1+k^2)\frac{\cos\beta}{\cos\theta_B}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(1+k^2)^2-4k^2\cos^2\theta}=$$

$$=2\frac{1}{2\pi}V_\infty\frac{d}{2\pi a}\alpha_{opt.}\,4k(1+k^2)\frac{\cos\beta}{\cos\theta_B}4\frac{\pi}{2}\frac{1}{1-k^4}$$

ed in conseguenza risulta

$$-2\frac{1}{2\pi}V_\infty\frac{d}{2\pi a}4k(1+k^2)\frac{\cos\beta}{\cos\theta_B}\int_0^{2\pi}\frac{dy}{dx}\frac{d\theta}{(1+k^2)^2-4k^2\cos^2\theta}+$$

$$+2\frac{1}{2\pi}V_\infty\frac{d}{2\pi a}\alpha_{opt.}\,4k(1+k^2)\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\theta_B}\frac{2\pi}{1-k^4}=0$$

da cui

$$(15) \qquad \alpha_{opt.} = \frac{1 - k^4}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dy}{dx} \frac{d\theta}{(1 + k^2)^2 - 4 k^2 \cos^2 \theta}.$$

7. Come esempio, applichiamo il procedimento indicato nei numeri precedenti alla determinazione delle caratteristiche aerodinamiche di una schiera di profili alari N.A.C.A. 8512 assumendo per essa

angolo di obliquità della schiera $\beta = 30^0$

rapporto $\frac{\text{corda}}{\text{passo}} = 1{,}2$. A questi dati le (2) e (3) fanno corrispondere $k = 0{,}765$; $\theta_B = 8^0\,35'$. La (9) fa corrispondere ai valori di θ indicati nella prima riga della tabella I allegata i valori di $\frac{x}{c}$ indicati nella seconda riga.

TABELLA I.

$\theta =$	0^0	$8^0\,35'$	15^0	30^0	45^0	60^0	75^0	90^0
$\frac{x}{c} =$	0,462	0,5	0,49	0,418	0,352	0,288	0,23	0,1738
$F^* =$	11,6	8,96	6,06	2,55	1,345	0,844	0,594	0,456
$\frac{x}{c} F^* =$	5,36	4,48	2,97	1,065	0,474	0,243	0,1365	0,0792

$\theta =$	120^0	135^0	150^0	165^0	180^0	$188^0\,35'$	195^0
$\frac{x}{c} =$	0,0464	−0,0308	−0,136	−0,246	−0,463	−0,5	−0,483
$F^* =$	0,33	0,302	0,289	0,253	0,064	0	0,0213
$\frac{x}{c} F^* =$	0,0153	−0,0093	−0,0393	−0,0622	−0,0296	0	−0,0103

$\theta =$	210^0	240^0	270^0	300^0	330^0	345^0	360^0
$\frac{x}{c} =$	−0,421	−0,29	−0,1738	−0,0472	0,135	0,288	0,462
$F^* =$	0,0925	0,196	0,34	0,71	2,37	5,85	11,6
$\frac{x}{c} F^* =$	−0,0389	−0,0569	−0,059	−0,0335	0,32	1,685	5,36

Nella stessa tabella sono riportati i valori di $F^* = \frac{1 + \cos(\theta - \theta_B)}{(1 + k^2)^2 - 4 k^2 \cos^2 \theta}$ e quelli di $\frac{x}{c} F^*$. È risultato con integrazione grafica $\int_0^{2\pi} \frac{x}{c} F^* d\theta = 3{,}14$ e poichè, per i dati assunti, si ha

$$\frac{4 k (1 + k^2) \cos \beta}{\cos \theta_B} = \frac{4 \cdot 0{,}765 \cdot 1{,}5852}{0{,}989} 0{,}866 = 4{,}25$$

$$\frac{2}{\pi} \frac{d}{c} \frac{(1 + k^2)^2 - 4 k^2 \cos^2 \theta_B}{1 - k^4} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1{,}2} \frac{1{,}585^2 - 4 \cdot 0{,}585 \cdot 0{,}978}{1 - 0{,}342} = 0{,}1796$$

si ricava

$$\beta'_0 = \frac{\beta_0}{\pi} 0{,}1796 \cdot 4{,}25 \cdot 3{,}14 = 0{,}765\,\beta_0 \quad ; \quad \beta'_1 = 0 .$$

Essendo poi

$$\frac{d}{\pi c} \frac{4k}{\sqrt{k^4 + 2k^2 \cos 2\beta + 1}} = 0{,}576 \quad \text{si deduce} \quad \alpha = \alpha_\infty\, 0{,}576$$

di guisa che il coefficiente di portanza del profilo nella schiera è

$$c_p = c'_{p_\infty} (0{,}576\,\alpha_\infty - \delta)$$

se δ è l'angolo di portanza nulla del profilo N.A.C.A. isolato corrispondente ai valori dei parametri β'_0 e β'_1 sopra calcolati, e c'_{p_∞} il coefficiente angolare di

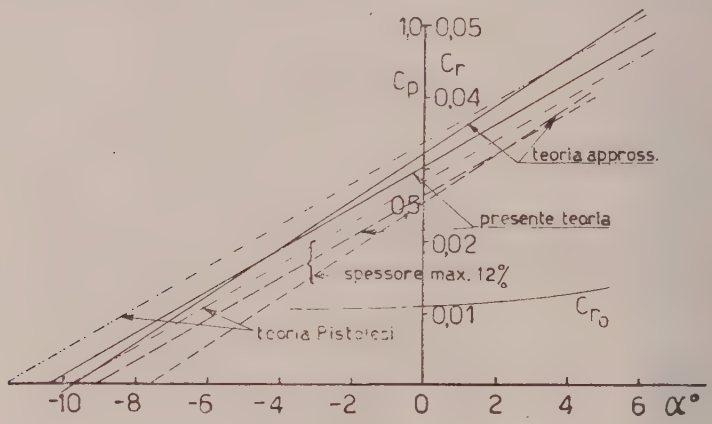


Fig. 3.

portanza (per allungamento infinito) dello stesso profilo. Ora dai diagrammi sperimentali si ricava che è $c'_{p_\infty} = 0{,}1$ (angoli in gradi); $\delta = -6°$, di guisa che si ha

$$c_p = 0{,}0576\,(\alpha_\infty + 10°\,24') , \tag{16}$$

e pertanto il diagramma $(c_p\,,\,\alpha_\infty)$ risulta quello dato in fig. 3. Assumendo per ogni c_p, quale valore del coefficiente di resistenza quello corrispondente allo stesso c_p per il profilo isolato equivalente, si può subito ottenere anche il diagramma $(c_r\,,\,\alpha_\infty)$ per la schiera considerata, che risulta quello tracciato nella stessa fig. 3. Infine, grazie alla formula (15), si può pure determinare l'angolo di incidenza ottimo: per il N.A.C.A. 8512, è

$$\frac{dy}{dx} = -2\,\beta_0\,\xi = -2\,\beta_0\,\frac{2x}{c} ,$$

di guisa che risulta

$$\alpha_{opt.} = -4\,\frac{1-k^4}{2\pi}\,\beta_0 \int_0^{2\pi} \frac{x}{c}\,\frac{d\theta}{(1+k^2)^2 - 4k^2\cos^2\theta} = -4\,\frac{1-k^4}{2\pi}\,\beta_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{F}^{**}\,\frac{x}{c}\,d\theta .$$

Nella tabella II sono dati per i vari θ i valori corrispondenti di F** e di $\frac{x}{c}$ F**: con integrazione grafica si è ottenuto $\int_0^{2\pi} F^{**}\, d\theta = 0$, e pertanto $\alpha_{opt.} = 0$. Se, come supposto, la schiera dei profili considerati ha la disposizione atta a determinare *compressione* nella corrente fluida, è assai probabile che per $\alpha_\infty > \alpha_{opt.}$ si verifichi *distacco* della vena, e pertanto appare dal diagramma di fig. 3, che è assai dubbio il potere ottenere per i profili della schiera un c_p maggiore di 0,6.

TABELLA II.

$\theta =$	0°	8° 35′	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$\frac{x}{c} =$	0,462	0,5	0,49	0,418	0,352	0,288	0,23	0,1738
F** =	0,1716	0,223	0,3282	0,7566	1,34	1,9266	2,358	2,511
$\frac{x}{c}$ F** =	2,695	2,24	1,49	0,553	0,263	0,1495	0,0977	0,0692

$\theta =$	120°	135°	150°	165°	180°	188° 35′	195°
$\frac{x}{c} =$	0,0464	−0,0308	−0,136	−0,246	−0,463	−0,5	−0,483
F** =	1,92	1,34	0,755	0,328	0,1716	0,223	0,328
$\frac{x}{c}$ F** =	0,0242	−0,023	−0,18	−0,75	−2,7	−2,24	−1,47

$\theta =$	210°	240°	270°	300°	330°	345°	360°
$\frac{x}{c} =$	−0,421	−0,29	−0,1738	−0,0472	0,135	0,288	0,462
F** =	0,7566	1,926	2,5	1,92	0,755	0,328	0,1716
$\frac{x}{c}$ F** =	−0,556	−0.167	−0,0695	−0,024	0,179	0,878	2,695

8. In modo analogo a quello seguìto nei numeri precedenti, si può determinare la circuitazione attorno al profilo nella schiera, se questo non è infinitamente sottile. Se indichiamo con $\frac{dy_1}{dx}$ la tangente dell'angolo, che la tangente al contorno del dorso del profilo forma colla tangente alla linea d'asse nel punto corrispondente di questa, la componente, normale al contorno, della velocità della corrente che investe il profilo è variata, rispetto a quella corrispondente alla linea d'asse, di $-V_\infty \frac{dy_1}{dx}$; sul cerchio σ nel punto corrispondente la velocità normale aggiuntiva sarà perciò $V_{r1} = V_\infty \frac{dy_1}{dx} \frac{d}{2\pi a} F(\theta)$. Espressione identica vale nei punti di σ corrispondenti ai punti della *faccia* del profilo, il cui contorno, se $y_1 = f(x)$ è l'equazione del *dorso*, è defi-

nito dalla $y_1 = -f(x)$. Si avrà pertanto nei punti di σ una velocità tangente uguale a

$$(10') \qquad V'_{t_2} = -\frac{1}{2\pi} V_\infty \frac{d}{2\pi a} \int_0^{2\pi} \frac{dy_1}{dx} F(\theta) \operatorname{cotg} \frac{\theta - \theta_1}{2} d\theta .$$

Per la regolarità della corrente nel bordo di fuga dovrà di conseguenza aggiungersi alla circuitazione Γ_0 data dalla (11) una circuitazione Γ'_0 definita dalla

$$(11') \qquad \Gamma'_0 = \frac{1}{2} V_\infty c \frac{d}{2\pi c} \frac{(1+k^2)^2 - 4k^2 \cos^2 \theta_3}{1-k^4} \int_0^{2\pi} \frac{dy_1}{dx} F(\theta) \operatorname{cotg} \frac{\theta_B - \theta}{2} d\theta .$$

9. Applichiamo la (11') per la determinazione della influenza dello spessore sulle caratteristiche aerodinamiche della schiera di profili N.A.C.A. 8512 già precedentemente considerata. Per detti profili è

$$\frac{y_1}{c} = 0{,}17814 \sqrt{\frac{x}{c} + \frac{1}{2}} - 0{,}07302 - 0{,}189078 \frac{x}{c} + \\ + 0{,}04649 \frac{x^2}{c^2} + 0{,}0486 \frac{x^3}{c^3} - 0{,}0609 \frac{x^4}{c^4}$$

e pertanto risulta

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{0{,}08907}{\sqrt{\frac{x}{c} + \frac{1}{2}}} - 0{,}0189078 + 0{,}09288 \frac{x}{c} + 0{,}1458 \frac{x^2}{c^2} - 0{,}2436 \frac{x^3}{c^3} .$$

Nella tabella III per i valori di θ già prima considerati sono dati i valori corrispondenti di $\frac{dy_1}{dx}$ e di $\frac{dy_1}{dx} F^*$.

TABELLA III.

$\theta =$	0°	8° 35′	15°	30°	45°	60°	75°
$\frac{dy_1}{dx} =$	0,04828	± 0,04752	−0,0477	−0,0498	−0,05247	−0,05406	−0,05876
$\frac{dy_1}{dx} F^* =$	0,56	± 0,426	−0,289	−0,127	−0,0705	−0,0456	−0,0349

$\theta =$	90°	120°	135°	150°	165°	180°	188° 35′
$\frac{dy_1}{dx} =$	−0,062	−0,0604	−0,061	−0,0484	−0,0224	0,286	
$\frac{dy_1}{dx} F^* =$	−0,0283	−0,01995	−0,0184	−0,014	−0,00567	0,0183	0

$\theta =$	195°	210°	240°	270°	300°	330°	345°
$\frac{dy_1}{dx} =$	−0,5098	−0,1213	−0,0055	0,04368	0,058	0,068	0,05406
$\frac{dy_1}{dx} F^* =$	−0,01085	−0,0112	−0,00108	0,0148	0,041	0,162	0,316

Con integrazione grafica si è ottenuto

$$\int_0^{2\pi} \frac{dy_1}{dx} F^*(\theta)\, d\theta = 0{,}173$$

e di conseguenza si ha dalla (11')

$$\frac{2\Gamma_0'}{\pi V_\infty c} = -\frac{1}{\pi}\frac{d}{2\pi c}\frac{(1+k^2)^2 - 4k^2\cos^2\theta_B}{1-k^4} 4k(1+k^2)\frac{\cos\beta}{\cos\theta_B} 0{,}173 =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\frac{1}{2\pi\cdot 1{,}2}\frac{1{,}585^2 - 4\cdot 0{,}585\cdot 0{,}978}{1-0{,}342} 4{,}25\cdot 0{,}173 = -0{,}0137 = -47'.$$

Il coefficiente di portanza c_p del profilo nella schiera risulta così

$$c_p = c'_{p\infty}(0{,}576\,\alpha_\infty - \delta) - 2\pi\, 0{,}0137$$

od anche, ammettendo di poter trascurare per $c'_{p\infty}$ la differenza tra il valore teorico 2π, ed il valore sperimentale,

$$c_p = 0{,}576\, c'_{p\infty}\left(\alpha_\infty - \frac{\delta - \delta'}{0{,}576}\right) \quad \text{in cui} \quad \delta' = \frac{0{,}0137}{0{,}576} = 0{,}0238 = \sim 1^\circ\, 22'$$

così che in definitiva si ha (16') $c_p = 0{,}0576\,(\alpha_\infty + 9^\circ\, 2')$.

Nella stessa figura 3 si sono riportati i diagrammi che mostrano la legge di variazione di c_p con α_∞ quali risultano dalla (16) e dalla (16') e quali si ricavano applicando il procedimento approssimato indicato nella Nota citata in [2] ed il metodo dato dal prof. Pistolesi (Nota citata in [4]). Le differenze non sono grandi specialmente tra il metodo ora indicato e quello Pistolesi.

Meccanica. — *Turbolenza nelle scie piane.* Nota di G. MORETTI, presentata [1] dal Socio M. PANETTI.

Continuo qui l'applicazione di una formula di turbolenza, non legata a teorie di trasporto, a semplici casi di turbolenza libera [2]. Prendo ora in esame i due casi di scie piane già studiati teoricamente e sperimentalmente da Schlichting [3], mostrando che la formula qui usata non ha soltanto su quelle di trasporto il vantaggio di una minore arbitrarietà, ma dà modo di ottenere risultati più approssimati ai dati empirici, eliminando nel contempo una singolarità caratteristica delle soluzioni ottenute con la formula di Prandtl.

(1) Nella seduta dell'8 febbraio 1947.

(2) *La teoria del trasporto turbolento.* «Aerotecnica», 1947; *Il getto piano turbolento studiato con la teoria del trasporto.* « Rend. Lincei », VIII, 1 (1946), p. 1189.

(3) SCHLICHTING, *Ueber das ebene Windschattenproblem.* « Ing. Archiv », 1 (1930), p. 533.

1. Equazioni generali di prima e seconda approssimazione. – Come nelle Note su citate, alle quali rinvio per il significato dei simboli, mi servo della seguente espressione della tensione tangenziale:

$$(1) \qquad \tau_{xy} = \rho\,\overline{u'v'} = \frac{\partial U}{\partial y}\left(a_1 U^* + a_2 U + a_3^2 \frac{\partial U}{\partial y} + \cdots\right).$$

Per la descrizione del fenomeno di scia, come per le considerazioni che guidano all'impostazione matematica del problema, rinvio alla Nota di Schlichting, di cui conservo, per quanto possibile, le notazioni. Posto $a = cd$ (prodotto del coefficiente di resistenza dell'ostacolo per il suo diametro), $x' = x/a$, $y' = y/a$, conviene assumere, in luogo di x e y, le variabili adimensionali x' ed $\eta = \dfrac{y'}{\sqrt{x'}}$.

Essendo sperimentalmente provato che il difetto di velocità in una sezione della scia, a parità di η, dipende in prima approssimazione da $x'^{-1/2}$, conviene esprimere le grandezze che ci interessano mediante sviluppi secondo le potenze di $x'^{-1/2}$; è chiaro che, per grandi valori di x, cioè per distanze notevoli dall'ostacolo, basterà tener conto dei termini aventi a fattore $x'^{-1/2}$, mentre per valori più piccoli di x bisognerà far ricorso ad approssimazioni successive, cioè ai termini aventi a fattori x'^{-1}, $x'^{-3/2}$, ecc.

Poniamo pertanto la funzione di corrente sotto la forma:

$$\psi = U_0\left[y - aF(\eta) - a\sqrt{\frac{a}{x}}\,G(\eta) - \cdots\right]$$

(U_0 = velocità di traslazione del fluido in assenza di ostacolo), e inoltre:

$$a_1 U^* = aU_0\left(\lambda_1 + \lambda_2\sqrt{\frac{a}{x}} + \cdots\right)$$

$$a_2 U_0 = aU_0\left(\nu_1 + \nu_2\sqrt{\frac{a}{x}} + \cdots\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Indichiamo con gli indici 1, 2, $\cdots$ i termini che dipendono da $x'^{-1/2}, x'^{-1}, \cdots$; otteniamo:

$$u_1 = U_0\sqrt{\frac{a}{x}}\,F'(\eta) \quad , \quad u_2 = U_0\frac{a}{x}G'(\eta),$$

$$v_1 = 0 \quad , \quad v_2 = -\frac{U_0}{2}\frac{a}{x}\eta F' \quad , \quad v_3 = -\frac{U_0}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^{3/2}(G + \eta G'),$$

da cui:

$$\left[x\left(\frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial UV}{\partial y}\right)\right]_1 = \frac{U_0^2}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^{1/2}(\eta F')',$$

$$\left[x\left(\frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial UV}{\partial y}\right)\right]_2 = \frac{U_0^2}{2}\frac{a}{x}(-F'^2 + 2G' + \eta G''),$$

$$\left[x\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y}\right]_1 = -U_0^2\left(\frac{a}{x}\right)^{1/2}(\lambda_1+\nu_1)F''',$$

$$\left[x\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y}\right]_2 = -U_0^2\frac{a}{x}[(\lambda_2+\nu_2-\nu_1F')F'''-\nu_1F''^2+(\lambda_1+\nu_1)G'''].$$

Si possono allora scrivere, in luogo dell'equazione di Eulero:

$$\frac{\partial U^2}{\partial x}+\frac{\partial UV}{\partial y}=-\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y}$$

le seguenti equazioni a derivate totali di prima e seconda approssimazione:

$$(2,1)\qquad (\eta F')'=2(\lambda_1+\nu_1)F''',$$

$$(2,2)\qquad -F'^2+2G'+\eta G''=2[(\lambda_2+\nu_2-\nu_1F')F'''-\nu_1F''^2+(\lambda_1+\nu_1)G'''].$$

Tali equazioni sono state ottenute in base alla (1) cioè senza ricorrere ad ipotesi di trasporto. Le teorie di Prandtl e di Mattioli portano ad assumere particolari valori per i coefficienti a_i, mentre qui abbiamo loro conservato una larga generalità, imponendo soltanto che siano sviluppabili in serie di potenze di $x'^{-1/2}$, come le altre grandezze in questione.

Poniamo, per semplificare le notazioni:

$$-(\lambda_1+\nu_1)=\varkappa^2\quad,\quad -\frac{\nu_1}{\varkappa^2}=\mu\quad,\quad -\frac{\lambda_2+\nu_2}{\varkappa^2}=\sigma,$$

ed operiamo il cambiamento di variabile:

$$\eta=2\varkappa\zeta$$

indicando con apici le derivate rapporto a ζ; la (2, 1) diviene:

$$(3,1)\qquad 2\zeta F'+F''=0$$

che ha per soluzione:

$$(4)\qquad F'=\alpha e^{-\zeta^2}.$$

Conseguentemente, ponendo $G'=g$, si ha per l'equazione di seconda approssimazione:

$$(3,2)\quad g''+2\zeta g'+4g=2[\alpha^2(1-\mu)e^{-2\zeta^2}+\alpha\sigma e^{-\zeta^2}-2\alpha\sigma\zeta^2e^{-\zeta^2}+4\alpha^2\mu\zeta^2e^{-2\zeta^2}].$$

2. SCIA PIANA SEMPLICE. – Onde poter paragonare i risultati teorici con le misurazioni di pressione totale effettuate da Schlichting, osserviamo che, in prima approssimazione, si ha:

$$(5)\qquad \left[\frac{p}{\frac{\rho}{2}U_0^2}\right]_{0,1}=\left[\frac{p_{st}}{\frac{\rho}{2}U_0^2}+\left(\frac{U}{U_0}\right)^2\right]_{0,1}=\frac{(U_0-u_1)^2}{U_0^2}=1-2\frac{u_1}{U_0}$$

(il termine p_{st}, come si vedrà più avanti, è dell'ordine di grandezza della terza approssimazione, e il termine quadratico in u_1 va ovviamente tra-

scurato, per la presenza del fattore x'^{-1}), e analogamente in seconda approssimazione:

$$(6) \qquad \left[\frac{p}{\frac{\rho}{2}U_0^2}\right]_{0,1,2} = \frac{(U_0 - u_1 - u_2)^2}{U_0^2} = 1 - 2\frac{u_1}{U_0} + \left(\frac{u_1}{U_0}\right)^2 - 2\frac{u_2}{U_0}.$$

I parametri α e $\varkappa$ possono venir determinati in base ai dati empirici, notando che si ha:

$$\frac{1}{4} a U_0 = \int_0^\infty u_1 \, dy = \alpha U_0 \, a\varkappa\sqrt{\pi},$$

da cui:

$$\varkappa = \frac{1}{4\alpha\sqrt{\pi}},$$

e, in prima approssimazione,

$$\left[\frac{p}{\frac{\rho}{2}U_0^2}\right]_{y=0} = \left[\left(\frac{U}{U_0}\right)^2\right]_{\substack{0,1 \\ y=0}} = 1 - 2\alpha\left(\frac{a}{x}\right)^{1/2}.$$

Dalle misure di Schlichting risulta, per $d = 1$, $c = 1{,}32$:

$$\alpha = 0{,}82 \quad , \quad \varkappa^2 = 0{,}0295 .$$

Tabella I.

ζ	distanza = 30 cm.		distanza = 100 cm.	
	$\frac{y}{a}$	$\left[\frac{p}{\frac{\rho}{2}U_0^2}\right]_{0,1}$	$\frac{y}{a}$	$\left[\frac{p}{\frac{\rho}{2}U_0^2}\right]_{0,1}$
0	0	0,674	0	0,815
0,5	0,864	0,722	1,52	0,848
1,0	1,728	0,875	3,04	0,932
1,5	2,592	0,964	4,56	0,981
2,0	3,556	0,994	6,08	0,997
2,5	4,420	0,999		

Nella Tabella I sono indicati alcuni valori della pressione totale calcolata in prima approssimazione per sezioni distanti rispettivamente 30 e 100 cm. dall'ostacolo, cioè per $\frac{x}{a} = 25{,}35$ e $\frac{x}{a} = 78{,}40$. In fig. 1 sono riportati, per ciascuna delle due sezioni, i dati sperimentali di Schlichting

e (con tratto continuo) la curva teorica quale risulta dalla formula qui usata; dove la curva teorica di Schlichting si discosta sensibilmente da quella, vi è stata indicata con una linea a tratti. È evidente che l'accordo fra calcolo ed esperimento è migliorato qui rispetto alla teoria del trasporto di Prandtl. Quanto a quella di Mattioli, i suoi risultati [4] in questo caso sono identici ai nostri.

La prima approssimazione è di per sè già tanto soddisfacente da non suggerire l'impiego della seconda.

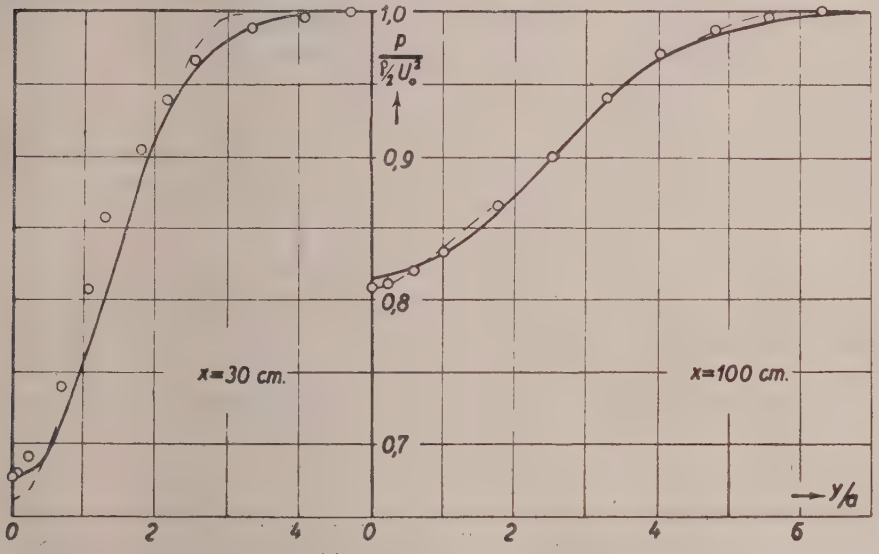


Fig. 1.

3. SCIA PIANA DOPPIA. – Nel caso della scia dietro un doppio ostacolo cilindrico, la prima approssimazione non è invece più sufficiente a descrivere il fenomeno; infatti le curve di pressione per differenti sezioni sono tutt'altro che affini tra loro (si veda la fig. 14 della citata Nota di Schlichting). Serviamoci pertanto della prima approssimazione per rappresentare alla meglio il fenomeno a grande distanza dall'ostacolo, usando la (3,2) per migliorare l'approssimazione per valori di x più piccoli.

Analogamente a quanto si è fatto per la scia semplice, otteniamo dalle misure sperimentali:

$$a = 1{,}24 \text{ cm.} \quad ; \quad \alpha = 1{,}069 \quad ; \quad \varkappa^2 = 0{,}0175 .$$

Applicando le (4) e (5) e notando che per $x = 60, 40, 30$ cm. si ha rispettivamente $\frac{x}{a} = 48{,}4;\ 32{,}25;\ 24{,}2$, abbiamo in prima approssimazione:

(4) MATTIOLI, *Teoria dinamica dei regimi fluidi turbolenti.* Padova, 1937, p. 230.

$$\left[\frac{p}{\frac{\rho}{2}U_0^2}\right]_{0,1} = \begin{cases} 1 - 0{,}308 \exp\left[-0{,}295\left(\frac{y}{a}\right)^2\right] & (x = 60) \\ 1 - 0{,}376 \exp\left[-0{,}442\left(\frac{y}{a}\right)^2\right] & (x = 40) \\ 1 - 0{,}434 \exp\left[-0{,}591\left(\frac{y}{a}\right)^2\right] & (x = 30)\,. \end{cases}$$

I risultati dei calcoli si traducono graficamente nelle curve a tratto marcato della fig. 2. Si osserva che le differenze tra le prime approssimazioni teoriche e le misure, funzioni di x e ζ che indicheremo con $D(x\,|\,\zeta)$, si possono, con buona approssimazione, mettere sotto la forma:

$$D(x\,|\,\zeta) = \frac{a}{x}\, d(\zeta)\,,$$

essendo d una funzione che si annulla per $\zeta = \zeta^* = 0{,}765$ circa.

Tenendo conto della (6) possiamo dunque scrivere:

$$d = -F'^2 + 2g\,.$$

La soluzione g della (3,2) deve pertanto soddisfare alle seguenti condizioni: 1° esser pari; 2° assumere, per $\zeta = 0$, il valore $g(0) = \frac{1}{2}\,[d(0) + F'^2(0)]$, dove $d(0)$ può venire assunto empiricamente $= 5$; 3° assumere, per $\zeta = \zeta^*$, il valore $g(\zeta^*) = \frac{1}{2}F'^2(\zeta^*) = 0{,}196$.

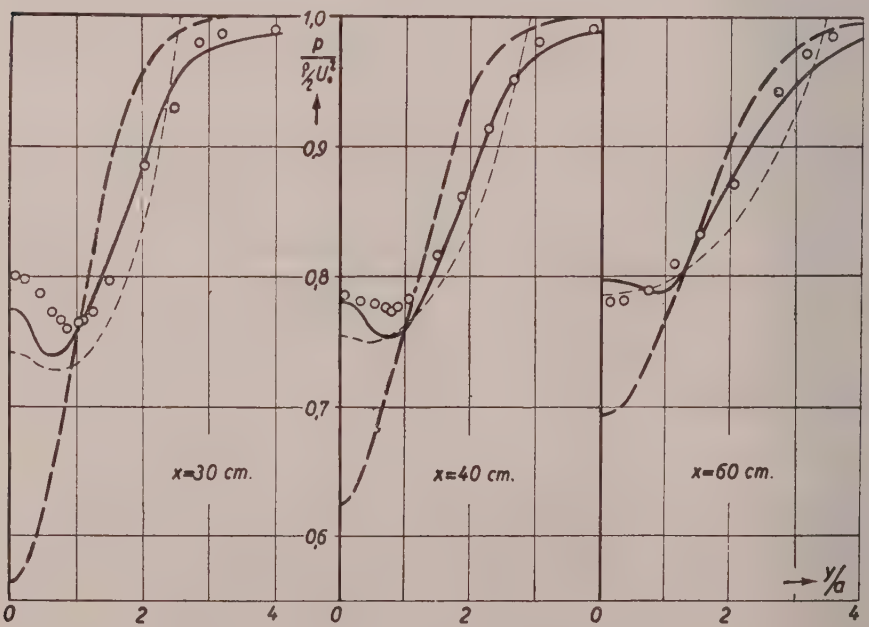


Fig. 2.

Il calcolo di g in base a tali condizioni è alquanto laborioso; esso è stato molto cortesemente svolto dall'Istituto per le Applicazioni del Calcolo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. La relazione originale verrà pubblicata in altra sede, insieme con la redazione in extenso della presente Nota. I risultati sono i seguenti. Posto:

$$M = \frac{\alpha^2}{C^*} e^{-\zeta^2} \begin{vmatrix} A & C \\ A^* & C^* \end{vmatrix} \quad , \quad N = \frac{\alpha^2}{C^*} e^{-\zeta^2} \begin{vmatrix} B & C \\ B^* & C^* \end{vmatrix} \quad , \quad P = \frac{2\alpha}{C^*} e^{-\zeta^2} \begin{vmatrix} \zeta^2 - \frac{1}{2} & C \\ \zeta^{*2} - \frac{1}{2} & C^* \end{vmatrix},$$

$$Q = \frac{0{,}3182}{C^*} e^{-\zeta^2} C ,$$

dove

$$A(\zeta) = \frac{1}{2} e^{-\zeta^2} + \zeta \int_0^\zeta e^{-t^2} dt \quad , \quad B(\zeta) = \frac{1}{2} e^{-\zeta^2} - \zeta \int_0^\zeta e^{-t^2} dt \quad ,$$

$$C(\zeta) = \frac{1}{2} e^{\zeta^2} - \zeta \int_0^\zeta e^{t^2} dt$$

e gli asterischi indicano i valori assunti dalle funzioni per $\zeta = \zeta^*$, si ha:

$$g(\zeta) = M + \mu N + \sigma P + Q;$$

ma, dalla seconda condizione, si ha:

$$\sigma = 0{,}570 + 0{,}791\,\mu$$

quindi:

$$g(\zeta) = M + 0{,}570\,P + Q + \mu\,(N + 0{,}791\,P).$$

Tabella II.

ζ	$x = 60$ cm.		$x = 40$ cm.		$x = 30$ cm.	
	$\frac{y}{a}$	$\left[\frac{p}{\frac{\rho}{2} U_0^2}\right]_2$	$\frac{y}{a}$	$\left[\frac{p}{\frac{\rho}{2} U_0^2}\right]_2$	$\frac{y}{a}$	$\left[\frac{p}{\frac{\rho}{2} U_0^2}\right]_2$
0	0	+ 0,103	0	+ 0,155	0	+ 0,207
0,2	0,37	+ 0,094	0,30	+ 0,141	0,26	+ 0,188
0,5	0,92	+ 0,026	0,75	+ 0,038	0,65	+ 0,051
0,8	1,37	— 0,007	1,20	— 0,011	1,04	— 0,014
1,0	1,84	— 0,028	1,50	— 0,042	1,30	— 0,056
1,5	2,77	— 0,038	2,25	— 0,057	1,95	— 0,076
2,0	3,68	— 0,016	3,00	— 0,024	2,60	— 0,032

I valori teorici della funzione d, ricavati in base a quest'ultima espressione, e i conseguenti valori teorici di $\left[\frac{p}{\frac{\rho}{2}U_0^2}\right]_2$, dipendono ancora dal parametro μ. Supposto $\mu = 0$, si deducono i valori indicati in Tabella II; sommando le curve così ottenute a quelle della prima approssimazione si hanno le curve (a tratto continuo) della fig. 2. Poichè l'accordo con i dati empirici è buono, conviene ammettere $\mu = 0$.

Nella stessa fig. 2 sono indicate con linee a tratto sottile le distribuzioni teoriche di pressione ottenute da Schlichting; l'accordo è assai meno buono.

4. Osservazioni sul calcolo della pressione statica. – La pressione statica può essere determinata in base alla seconda formula di Eulero:

$$(7) \qquad \frac{\partial UV}{\partial x} + \frac{\partial V^2}{\partial y} = -\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}.$$

In essa compaiono in prima approssimazione termini dipendenti da x'^{-2}; si ha infatti:

$$\left[x\left(\frac{\partial UV}{\partial x} + \frac{\partial V^2}{\partial y}\right)\right]_2 = \frac{U_0^2 a}{2x}\left[\eta F' + \frac{\eta}{2}(F' + \eta F'')\right],$$

$$\left[x\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x}\right]_2 = \frac{U_0^2 a}{x}\varkappa^2\left(F'' + \frac{\eta}{2}F'''\right).$$

È ora plausibile dare a $\overline{v'^2}$ la forma:

$$\overline{v'^2} = \varphi\left(U, \frac{\partial U}{\partial y}, \cdots\right);$$

procedendo col metodo più volte usato di sviluppo in serie, si ricava:

$$\left[x\frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial x}\right]_2 = \frac{U_0^2 a}{x}\beta F''.$$

Sostituendo tali espressioni nella (7) e integrando rapporto ad y fra y e ∞, si ricava il salto di pressione fra un punto della scia e la zona indisturbata

$$\frac{1}{2\alpha\varkappa^2}\frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2}U_0^2}\left(\frac{x}{a}\right)^{3/2} = -e^{-\zeta^2}(1 - 2\zeta^2) - \frac{\beta}{\varkappa^2}e^{-\zeta^2}.$$

Purtroppo non mi risulta vi siano misurazioni attendibili della pressione statica in una scia turbolenta, con cui paragonare la curva testè ottenuta teoricamente, e determinare il valore di β. Per $\beta = 0$ la curva teorica ha un andamento analogo a quello ottenuto da Schlichting secondo la teoria di Prandtl, ma presenta rispetto a quella un vantaggio essenziale: essa non ha alcuna singolarità, mentre quella ha una cuspide nell'origine. Naturalmente il tentativo di Prandtl di sostituire alla sua formula primitiva una

espressione più complessa che non dia luogo a singolarità, viene, dal nostro punto di vista, a perdere interesse.

5. CONCLUSIONE. – Come ho già osservato nelle due Note citate, la (1) non esprime una vera e propria « teoria » della turbolenza, in quanto i parametri che vi figurano non sono determinabili *a priori* (ad esempio nel caso della scia doppia, l'annullarsi di μ, riconosciuto opportuno, si può ottenere annullando ν_1; ma ciò non consente di determinare singolarmente λ_2 e ν_2 bensì la loro somma soltanto; i suoi risultati tuttavia possono provare l'inadeguatezza della teoria del trasporto a spiegare la turbolenza, e l'arbitrarietà delle ipotesi. Che d'altra parte non sia necessario ricorrere ad arbitrarietà viene provato dall'esempio trattato, dove i risultati da noi ottenuti sono più soddisfacenti di quelli ottenuti con le teorie di Prandtl o di Mattioli. In particolare, osservo che le curve teoriche di pressione totale ottenute in seconda approssimazione per la scia doppia descrivono abbastanza fedelmente i risultati sperimentali, tenuto conto che le curve D non sono in realtà esattamente affini tra loro, come invece abbiamo supposto; ciò prova che la equazione di seconda approssimazione (3,2) non è fisicamente arbitraria, in quanto basta da sola, per tutti i valori di ζ, a descrivere l'andamento delle differenze D, che sono appunto dell'ordine di grandezza dei termini di tale equazione. Non altrettanto avviene facendo uso delle ipotesi di Prandtl, che si rivelano pertanto più arbitrarie.

Infine, le formule di Mattioli possono esser ammesse come prima approssimazione delle attuali ($\mu = \sigma = 0$), prescindendo completamente dalla loro complessa giustificazione teorica.

Meccanica. — *Sul problema generale della trave poggiata su suolo elastico.* – I. *Formule fondamentali* [1]. Nota di E. VOLTERRA, presentata [2] dal Socio M. PICONE.

1. PREMESSA GENERALE. – La presente Nota ed un'altra che immediatamente segue, traggono la loro origine da un problema attinente alla Dinamica del binario che è stato proposto all'Istituto per le Applicazioni del Calcolo del Consiglio Nazionale delle Ricerche e che mi è stato comunicato dal Direttore dell'Istituto prof. M. Picone.

Nel volume: *Mathematical Methods in Engineering* [3] i professori von Karman e Biot risolvono per mezzo dell'integrale di Fourier il ben noto problema della trave di lunghezza infinita poggiata su suolo elastico nel caso particolare in cui la reazione opposta dal suolo sia in ogni punto pro-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo.

(2) Nella seduta dell'8 marzo 1947.

(3) T. VON KARMAN and M. BIOT, *Mathematical Methods in Engineering*. Mc. Graw-Hill Book Company New-York and London 1940 (Chap. VIII°. Sec. 6).

porzionale all'abbassamento che subisce la trave nell'inflettersi (ipotesi del Winkler) (4).

Nella presente Nota si estende il risultato del von Karman e del Biot, servendosi della trasformata di Fourier, al caso in cui la funzione di influenza che caratterizza la reazione del suolo elastico venga rappresentata da una funzione del tipo:

$$k(x-\xi).$$

Si ottiene una formula risolutiva più generale di quella data dai predetti Autori. Si applicano infine i risultati ottenuti ad alcuni casi particolari di elasticità del suolo: ipotesi di elasticità del Winkler ed ipotesi di elasticità dello Jodi.

2. Differenti ipotesi di elasticità del suolo. – È ben noto come nello studio della trave poggiata su suolo elastico si usi correntemente nella Tecnica di adottare per la funzione d'influenza del suolo l'ipotesi del Winkler, cioè supporre che la funzione di Green del suolo sia caratterizzata dalla funzione:

$$k(x,\xi) = \begin{cases} = \frac{1}{\lambda} & \text{per } x = \xi, \\ = 0 & \text{per } x \neq \xi, \end{cases}$$

ove λ é la costante elastica del suolo («Modulus of the foundation» degli Americani; « Bettungsziffer » dei Tedeschi).

Ora tale legge, che prescinde completamente dalla collaborazione del terreno circostante alla zona caricata, si presta allo studio della deformazione del terreno solo in una prima approssimazione.

Sono state perciò proposte altre leggi per rappresentare la reazione elastica del suolo, tra cui notevole una del compianto professore C. Jodi (5).

In essa la funzione d'influenza del suolo è rappresentata dall'espressione seguente:

$$k(x-\xi) = Ae^{-B|x-\xi|},$$

ove A e B sono due costanti del suolo di facile determinazione sperimentale. Infatti, caricando con carico uniforme p un tratto l di suolo di larghezza unitaria, sarà l'abbassamento $w(x)$ nel punto generico del tratto:

$$w(x) = Ap\int_0^x e^{-B(x-\xi)}\,d\xi + Ap\int_x^l e^{-B(x-\xi)}\,d\xi = \frac{Ap}{B}\left[2 - e^{-Bx} - e^{-B(l-x)}\right].$$

Misurando $w(x)$ agli estremi del tratto caricato e nel punto di mezzo e posto:

$$w(0) = w(l) = w_0 \quad ; \quad w\left(\frac{l}{2}\right) = w_1 ;$$

(4) E. Winkler, *Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit.* Praga, Dominicus 1867.

(5) C. Jodi, *Procedimenti per ricerche sperimentali su suoli elastici.* « Rendiconti della Accademia dei Lincei », 1936, Ser. VI).

si ricava subito

$$B = -\frac{2}{l}\log\left(\frac{2w_0}{w_1} - 1\right),$$

$$A = \frac{B}{4p}\frac{w_1^2}{w_1 - w_0}.$$

Nella presente trattazione si prescinde però completamente da qualunque ipotesi particolare sulla reazione elastica offerta dal terreno che si suppone soltanto caratterizzata da una funzione di Green del tipo:

$$K(x - \xi).$$

La formula scritta è la più generale espressione atta a rappresentare uno spostamento indipendente dalla posizione della forza esterna agente e dalla natura del suolo.

3. SOLUZIONE GENERALE DEL PROBLEMA. – Si indichi con x la distanza contata sull'asse della trave;

$y = y(x)$ = la freccia di inflessione della trave = la freccia di inflessione del terreno;

$p = p(x)$ = il carico esterno agente sulla trave;

$\pi = \pi(x)$ = la reazione offerta dal terreno;

E = il modulo d'elasticità della trave;

I = il momento d'inerzia della trave.

L'inflessione della trave sarà data dalla seguente equazione:

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = p(x) - \pi(x). \tag{1}$$

La deformazione del terreno per una distribuzione di carico $\pi(x)$ sarà invece data da:

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\xi)\, k(x - \xi)\, d\xi. \tag{2}$$

Nell'ipotesi che $p(x)$; $\pi(x)$; $k(x)$; $y(x)$ abbiamo opportuni comportamenti per $|x| \to \infty$, si definiscono le seguenti trasformate di Fourier:

$$Y(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y(x)\, e^{ixu}\, dx,$$

$$P(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, e^{ixu}\, dx,$$

$$\Pi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \pi(x)\, e^{ixu}\, dx\,,$$

$$K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k(x)\, e^{ixu}\, dx\,.$$

Poichè $p(x)$ e $k(x)$ sono funzioni note, anche $P(u)$ e $K(u)$ saranno funzioni note.

Dall'equazione (1) si ricava;

$$P(u) - \Pi(u) = EI \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 y}{dx^4}\, e^{ixu}\, dx\,.$$

L'ultimo termine può essere integrato successivamente per parti e, nell'ipotesi che y e le sue tre prime derivate tendano a zero per $|x| \to \infty$, i termini integrati svaniranno ai due estremi. Si otterrà

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 y(x)}{dx^4}\, e^{iux}\, dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 y(x)}{dx^3} (iu)\, e^{iux}\, dx = \cdots$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y(x) (iu)^4\, e^{iux}\, dx = u^4\, Y(u)\,.$$

Per cui

$$P(u) - \Pi(u) = EIu^4\, Y(u)\,. \tag{3}$$

Dall'equazione (2) si ottiene:

$$\left\{\begin{aligned} Y(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\xi)\, k(x-\xi)\, d\xi \right\} e^{ixu}\, dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\xi) \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k(x-\xi)\, e^{ixu}\, dx \right\} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\xi) \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k(t)\, e^{i(\xi+t)u}\, dt \right\} d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\xi)\, e^{i\xi u}\, k(u)\, d\xi = \sqrt{2\pi}\, \Pi(u)\, K(u)\,. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Mediante le equazioni (3) e (4) si possono calcolare le funzioni incognite $y(u)$ e $\pi(u)$.

La soluzione può essere determinata per una sola di queste, così si consideri solo la $Y(u)$.

Si trova

$$(5) \qquad Y(u) = \left\{ \frac{P(u)}{EI u^4 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, K(u)}} \right\}.$$

L'attuale spostamento $y(x)$ è finalmente dato per mezzo della trasformata di Fourier dall'equazione.

$$(6) \qquad y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Y(u)\, e^{-iux}\, du \ (6).$$

Fisica. — *Influenza del dispositivo sperimentale su alcune misure di sciami generati da fotoni* (1). Nota di M. Della Corte, presentata (2) dal Corrisp. L. Tieri.

Se consideriamo uno strato P di materia ed un fotone di energia E incidente su di esso, il numero medio $\bar{N}(E, l)$ di particelle dello sciame che viene prodotto nello strato è calcolabile dalla teoria degli sciami a cascata (3). Per conoscere la probabilità di avere N particelle emergenti dallo spessore l, essendo $\bar{N}$ il loro numero medio, è necessario fare alcune ipotesi sulla distribuzione statistica delle particelle stesse. Arley (4) ha trattato ampiamente il problema ed ha dimostrato che la distribuzione statistica più attendibile è quella di Pòlya ed ha indicato il modo di calcolare la predetta probabilità, cioè la funzione $P(N, \bar{N}(E, l))$. Nota questa, mediando nello spettro di energia dei fotoni incidenti si ottiene la probabilità effettiva di ottenere N particelle, cioè:

$$\bar{P}(N, \bar{N}(E, l)) = \int_{E_{min.}}^{\infty} P(N, \bar{N}(E, l))\, f(E)\, dE.$$

Se ora poniamo sotto lo strato l un sistema di k contatori fra cui registriamo le coincidenze di ordine c, avremo in media, a meno di una costante di proporzionalità, un numero di coincidenze al minuto:

$$n_c^o = \sum_N g(N, c, k)\, \bar{P}(N, \bar{N}(E, l))$$

(6) Cfr. per esempio M. Picone, *Appunti d'Analisi superiore*, vol. I, p. 277 [2ª edizione a cura di C. Miranda e A. Ghizzetti, Rondinella. Napoli (1946)].

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica dell'Università di Firenze (Arcetri).

(2) Nella seduta dell'8 marzo 1947.

(3) Bhabha e Heitler, « Proc. Roy. Soc. », *159*, 432 (1937); Rossi e Greisen, « Rev. of Mod. Phys. », 13, 240 (1941).

(4) N. Arley, *On the theory of stocastic processes and their application to the theory of cosmic radiation*. G.E.C., Gads Forlag Copenhagen, 1943.

ove $g(N, c, k)$ è la probabilità che il dispositivo registri una coincidenza di ordine c quando lo sciame è costituito da N particelle.

Nelle esperienze eseguite per verificare la validità della statistica di Pòlya è stato fin'ora posto $g(N, c, k) = 1$ per ogni valore di N, ma ciò non può essere accettabile se non nel caso in cui la coincidenza di ordine c sia dovuta ad un numero di particelle $\geqq 1$.

D'altra parte soltanto in questo caso l'esperienza ha confermato completamente i calcoli di Arley mentre per coincidenze dovute ad $N \geqq 2$ e $N \geqq 3$ il disaccordo è notevole ed è stato interpretato qualitativamente ammettendo che $g(N, c, k)$ non sia sempre uguale ad 1.

La valutazione di $g(N, c, k)$ è generalmente assai difficile, ma abbiamo pensato che sia possibile per le nostre recenti misure con contatori (5). In queste abbiamo, in ultima analisi, tre contatori uguali affiancati, posti al disotto del diffusore a distanza tale che la massima apertura angolare degli sciami registrati è di circa 35°. Possiamo in questo caso, senza grave errore, supporre che le particelle dello sciame siano uniformemente distribuite sulla superficie dei contatori. In realtà esse si troveranno addensate intorno all'asse dello sciame e quindi i valori di $g(N, c, k)$ saranno più piccoli di quelli che calcoleremo nell'ipotesi della distribuzione uniforme. D'altra parte, il confronto con i dati sperimentali ci assicura che tale effetto non è molto notevole.

In generale, se si hanno k contatori uguali affiancati, la probabilità di avere una coincidenza di ordine c quando su di essi incidano contemporaneamente N particelle uniformemente distribuite è:

$$g(N, c, k) = \frac{1}{k}\left[c\, g(N-1, c, k) + (k - c + 1)\, g(N-1, c-1, k)\right]$$

$$g(1, 1, k) = 1 \quad ; \quad g(2, 1, k) = \frac{1}{k} \; ; \; \ldots \; ; \; g(N, 1, k) = \frac{1}{k^{N-1}} \quad ,$$

$$g(N, c, k) = 0 \qquad \text{per } N < c .$$

Nel nostro caso in cui $k = c = 3$ abbiamo i valori riportati in tabella I.

TABELLA I.

N	3	4	5	6	7	8	9	10	> 10
$g(N, 3, 3)$	0,222	0,445	0,618	0,743	0,830	0,885	0,918	0,950	1,—

Come si vede, gli sciami di piccolo numero di particelle hanno relativamente poca probabilità di essere registrati e tale probabilità diviene

(5) M. DELLA CORTE, « Nuovo Cim. », 3, 142 (1946).

praticamente 1 solo per sciami con $N > 10$. Tenendo conto di questo, le curve di Rossi così calcolate avranno il massimo spostato verso i grandi spessori in confronto a quelle calcolate da Arley.

In tabella II sono riportati i valori n_c^0, cioè la curva di Rossi per sciami generati da fotoni sia ponendo $g(N, c, k) = -1$ che assumendo per questa funzione i valori della tabella I. I valori sono stati calcolati per i due casi di validità della statistica di Poisson e della statistica di Pòlya.

Tabella II.

l in unità $X_0 =$		1	2	3	5	7	10	14
$g(N, 3, 3) = 1$	Pòlya	0,0249	0,0871	0,139	0,142	—	0,064	0,0191
	Poisson	0,0140	0,0678	0,136	0,160	0,125	0,0686	0,0111
$g(N, 3, 3)$ secondo la tabella I	Pòlya	0,0699	0,173	0,242	0,213	0,166	0,091	0,0373
	Poisson	0,0540	0,174	0,273	0,287	0,210	0,103	0,03

Il confronto con l'esperienza è mostrato in fig. 1. Come si vede l'accordo è ora assai buono ma gli errori sperimentali e la piccola differenza fra le

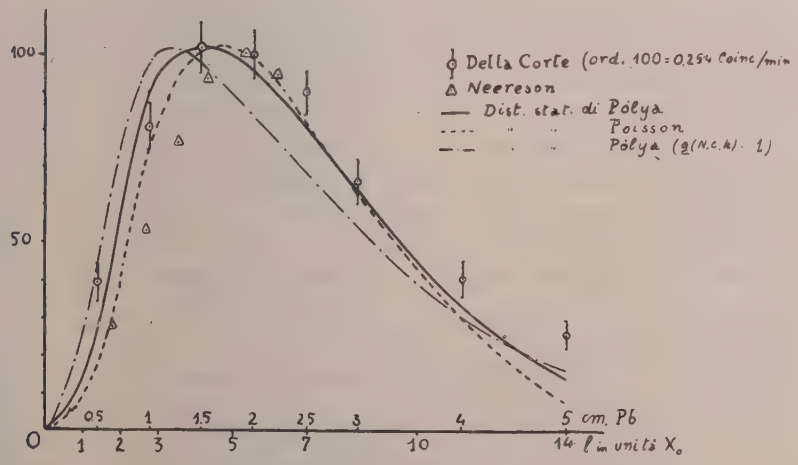


fig. 1.

curve calcolate per le statistiche di Pòlya e di Poisson non permettono di decidere per la validità dell'una o dell'altra. Altre esperienze saranno eseguite per chiarire definitivamente questo punto.

In figura sono anche riportati i dati sperimentali di Neereson [6] per i quali il disaccordo è perfettamente interpretabile. Infatti considerando che nel dispositivo sperimentale di quest'ultimo le coincidenze triple sono realizzate con contatori di dimensioni differenti e precisamente due contatori di piccola superficie ed uno di grande superficie, il fattore $g(N, c, k)$ sarà ancora più piccolo per sciami di poche particelle e raggiungerà praticamente il valore 1 solo per N assai più grande di 10; conseguentemente il massimo sarà spostato ulteriormente verso i grandi spessori in accordo con i dati sperimentali.

Rimane ancora da chiarire il disaccordo per i grandi spessori del diffusore che potrebbe esser dovuto o ad una inesatta misura dell'effetto di sfondo o alla inesattezza della forma dello spettro di energia dei fotoni incidenti da noi assunta nel presente calcolo [7] od in fine alla presenza di sciami generati da una componente penetrante non ionizzante. L'accettazione di questa ultima ipotesi richiede però ulteriori conferme sperimentali sia perchè Rossi e Janossy [8] hanno trovato un ottimo accordo fino a spessori di cm. 5 di Pb, sia perchè le esperienze di Lovell [9] in camera di Wilson non confermano la esistenza di sciami di questa natura.

Ringrazio vivamente la sig.na Bruna Rosà per l'aiuto prestatomi nell'esecuzione dei calcoli.

Fisica. — *Sul tempo di sensibilità della camera di Wilson* [1]. Nota di A. Mura, presentata [2] dal Corrisp. G. Polvani.

1. È noto il principio di funzionamento della camera di Wilson. Un volume di gas, saturo di vapore, viene improvvisamente lasciato espandere: si produce un raffreddamento e il vapore viene ad essere soprassaturo. Se la soprassaturazione oltrepassa un certo valore – limite degli ioni – il vapore in eccesso si condensa in forma di goccioline sugli ioni presenti: si può così rendere visibile il percorso nella camera di particelle ionizzanti. (Se la soprassaturazione oltrepassa poi un secondo valore – limite della nebbia – si ha formazione di nebbia densa e persistente in tutta la camera: il vapore si è condensato in goccioline su nuclei non ionici, probabilmente aggregati

(6) Neereson, « Phys. Rew. », *61*, 111 (1942).

(7) Lo spettro d'energia dei fotoni incidenti assunto nel nostro calcolo è:

$$\begin{cases} c\,\dfrac{dE}{E} & \ldots\ldots\ldots\

di molecole del vapore). Avvenuta l'espansione, la temperatura del gas della camera comincia a risalire per scambio di calore con l'esterno, la soprassaturazione diminuisce e, dopo un certo tempo, non può più avvenire condensazione del vapore sugli ioni. Si definisce come tempo di sensibilità della camera l'intervallo di tempo in cui la soprassaturazione rimane sufficiente per produrre condensazione lungo le tracce delle particelle ionizzanti.

Per i tipi più comuni di camere che si impiegano in ricerche di radioattività o di radiazione cosmica, l'ordine di grandezza del tempo di sensibilità va da qualche centesimo a qualche decimo di secondo. Il tempo di sensibilità è una grandezza caratteristica molto importante nell'impiego della camera di Wilson e in alcune ricerche è necessario conoscerne il valore.

Il tempo di sensibilità della camera di Wilson è stato valutato sperimentalmente da vari autori [1] . . . [6] in base alla formazione di tracce da un preparato radioattivo. Una teoria è stata sviluppata da Williams [4] per il caso dell'espansione adiabatica: i suoi calcoli dànno per il tempo di sensibilità l'espressione

$$\tau = 0{,}77 \frac{\rho c}{k(\gamma - 1)^2} \left(\frac{V}{S}\right)^2 \left(\frac{\delta r}{r}\right)^2$$

dove ρ, c, k sono la densità, il calore specifico a pressione costante e la conducibilità termica del gas, γ il rapporto dei due calori specifici, V il volume della camera dopo l'espansione, S l'area della superficie totale della camera, $1 + r$ il rapporto di espansione appena sufficiente per la formazione di tracce, $1 + r + \delta r$ il massimo rapporto di espansione che si può usare senza produrre nella camera nebbia dappertutto. (Più in generale, δr è l'aumento del rapporto di espansione oltre la soglia $1 + r$).

Dall'espressione di Williams risulta dunque che il tempo di sensibilità è proporzionale alla densità ρ del gas (c e k sono indipendenti dalla densità), a $\left(\frac{V}{S}\right)^2$, a $\left(\frac{\delta r}{r}\right)^2$. La proporzionalità alla densità ρ è in accordo con le osservazioni di Joliot [1] che trovò proporzionalità fra il tempo di sensibilità e la pressione del gas, almeno per pressioni da 40 a 76 cm Hg. La proporzionalità a $\left(\frac{V}{S}\right)^2$ è in discreto accordo con le determinazioni di vari autori, relative a camere di dimensioni diverse, in particolare con le determinazioni dello stesso Williams [4], [5]. Quanto alla proporzionalità a $\left(\frac{\delta r}{r}\right)^2$ essa è stata ricercata sperimentalmente da Hazen [6] che ha valutato il tempo di sensibilità servendosi di una sorgente radioattiva in rapido moto attraverso il gas della camera durante e dopo l'espansione, fotografando le diverse posizioni della sorgente con una illuminazione periodica e fotografando poi le tracce sullo stesso negativo. In questo modo ha potuto trovare che, al crescere del rapporto di espansione al disopra del valore minimo per avere tracce, il tempo di sensibilità, invece di crescere sempre come vorrebbe la proporzionalità a $\left(\frac{\delta r}{r}\right)^2$, dapprima cresce in discreto accordo con la legge

di Williams, poi diminuisce e tende a zero. Hazen ha interpretato questo fatto col presentarsi del fondo di nebbia generale: la legge di Williams non è più verificata sia per l'esaurimento del vapore a disposizione da parte del gran numero di goccioline che si formano, sia per il riscaldamento prodotto dalla formazione di tali goccioline.

2. Nel corso di ricerche sulla radiazione cosmica eseguite a 2100 metri s. l. d. m., si è presentata l'occasione di valutare il tempo di sensibilità della camera di Wilson impiegata nelle ricerche. La valutazione si è potuta fare semplicemente in base all'intensità della radiazione cosmica a quella quota (nota da misure con contatori) e al numero medio di tracce registrate in ogni fotografia nelle espansioni a caso della camera. Lo stesso semplice metodo è stato impiegato in seguito per ricercare, come ha fatto Hazen con disposizione più complessa, la dipendenza del tempo di sensibilità della camera dal rapporto di espansione. La camera di Wilson impiegata era del solito tipo a cilindro di vetro (diametro cm 23,5 profondità cm 8). Il fondo mobile era costituito da un disco sottile di lega leggera munito di una corona di gomma. La camera era riempita d'aria alla pressione atmosferica (59 cm Hg) e in essa era mantenuto un eccesso di miscela liquida alcool etilico + acqua (rapporto 3:1 in volume). La temperatura ambiente era intorno a 10° C. Furono prese più di un centinaio di fotografie di espansioni a caso, una ventina per ognuno di sei diversi rapporti di espansione ordinatamente crescenti da un rapporto appena sufficiente per osservare qualche traccia di raggi cosmici fino a un rapporto per cui le tracce si distinguevano a fatica sul fondo di nebbia generale. Tali rapporti di espansione erano determinati fissando l'estremo anteriore della corsa del fondo mobile della camera. I valori numerici dei rapporti sono stati poi calcolati in base alla corsa del fondo mobile e alle dimensioni interne della camera. Tra l'una e l'altra delle espansioni fotografate venivano fatte fare alla camera tre espansioni lente allo scopo di rimuovere i nuclei di condensazione elettricamente neutri, causa del fondo persistente di nebbia generale. Esperienze preliminari avevano mostrato indispensabile questa precauzione per ottenere risultati confrontabili, nei limiti degli errori sperimentali e delle fluttuazioni della radiazione cosmica, da una serie di espansioni con rapporti diversi, a un'altra serie analoga.

Le fotografie ottenute sono state accuratamente esaminate per contare il numero di tracce registrate in ognuna di esse. (Si sono contate come tracce quelle diritte che attraversano comunque la camera. Si sono contati come una traccia sola gli sciami che appaiono generati nelle pareti della camera). Per ognuno dei sei rapporti di espansione adottati [3], la tabella riporta il numero di fotografie prese, il numero totale di tracce e il numero medio di tracce per fotografia.

(3) I valori numerici riportati per i due rapporti estremi possono essere affetti da errori massimi dell'1 %: tali errori si ripercuotono sui valori numerici dei rapporti intermedi che erano distribuiti a intervalli uguali fra i rapporti estremi.

Rapporto di espansione	1,100	1,108	1,115	1,123	1,130	1,138
N° di fotografie	18	19	19	19	20	22
N° totale di tracce	4	47	64	43	25	9
N° di tracce per fotografia	$0,2 \pm 0,2$	$2,5 \pm 0,4$	$3,4 \pm 0,5$	$2,3 \pm 0,4$	$1,2 \pm 0,3$	$0,4 \pm 0,2$

La fig. 1, in cui sono rappresentati graficamente i risultati sperimentali, mostra l'andamento del numero di tracce per espansione (e quindi del tempo di sensibilità della camera) al variare del rapporto di espansione.

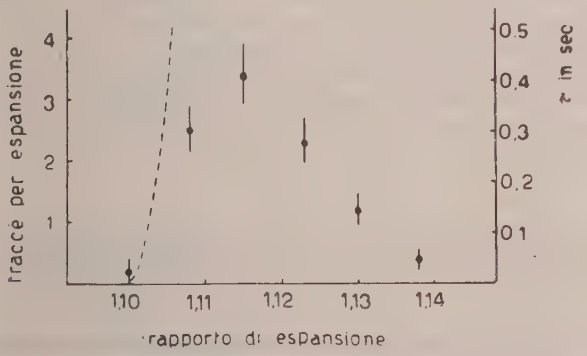


Fig. 1.

Poichè l'intensità della radiazione cosmica alla quota di m. 2100 si può ritenere di 4 particelle/dm² sec e poichè l'area della superficie orizzontale equivalente della camera (profondità fotografata cm 4) si può valutare in 2,1 dm² possiamo stabilire fra il numero di tracce per espansione e il tempo di sensibilità la relazione:

1 traccia per espansione corrisponde a un tempo di sensibilità di

$$\frac{1}{2,1 \times 4} \sim 0,12 \text{ sec} .$$

La scala dei tempi di sensibilità a destra del grafico corrisponde a questa relazione. In fig. 1 è rappresentato anche (curva tratteggiata) l'andamento del tempo di sensibilità secondo la legge di Williams quale risulta assumendo per ρ, c, k, γ i valori dati dalle tabelle e per $\frac{V}{S}$ il valore di cm 2,4 ricavato dalle dimensioni della camera.

In conclusione, a partire da un rapporto di espansione intorno a 1,100, il tempo di sensibilità della camera cresce al crescere del rapporto di espansione e in un primo tempo si può pensare a un accordo con la legge di Williams, poi il tempo di sensibilità, invece di continuare ad aumentare, raggiunto un massimo intorno a 1,115, diminuisce e tende a zero. Col rapporto 1,138 il tempo di sensibilità è già molto piccolo rispetto al massimo e le poche tracce che si formano sono mal distinguibili su un fondo di nebbia molto densa. Il fondo di nebbia generale è già percepibile nelle fotografie con un rapporto di espansione 1,115 (cioè in corrispondenza del massimo) e diventa sempre più intenso nelle fotografie con rapporti più grandi. Questo può spiegare effettivamente, come ha suggerito Hazen, lo scostamento dalla legge di Williams che non tiene conto della condensazione su nuclei non ionici.

BIBLIOGRAFIA.

[1] F. JOLIOT, « J. de Phys. et de Rad. », *5*, 216 (1934).
[2] J. A. BEARDEN, « Rev. of Sci. Instr. », *6*, 256 (1935).
[3] F. N. D. KURIE, « Phys. Rev. », *53*, 215 (1938).
[4] E. J. WILLIAMS, « Proc. of Cambr. Phil. Soc. », *35*, 512 (1939).
[5] E. J. WILLIAMS, « Proc. of Roy. Soc. », *172*, 194 (1939).
[6] W. E. HAZEN, « Rev. of Sci. Instr. », *13*, 247 (1942).

Fisica. — *Sulle frequenze di oscillazione molecolari.* Nota di G. LOVERA, presentata [1] dal Corrisp. A. POCHETTINO.

Per le frequenze di oscillazione relative a legami tra gli atomi C, O, N, H, sono state riscontrate spesso, indipendentemente da vari autori, delle regolarità, riconducibili però facilmente l'una all'altra.

D. H. Andrews [2], R. Yates [3], R. Titeica [4] hanno ripetutamente usato, per rappresentare le frequenze di oscillazione relative a legami sopratutto tra gli atomi suddetti, ed eventualmente anche con gli alogeni ed il S, sia in molecole biatomiche che poliatomiche, una formula (a prescindere dalla varietà delle notazioni) del tipo:

$$\tilde{\nu} = A \sqrt{\frac{x}{\mu}} \qquad (1)$$

dove $\tilde{\nu}$ è il numero d'onde (in cm^{-1}), x il numero dei legami di valenza tra i due atomi o gruppi atomici interessati nell'oscillazione, μ la massa ridotta (in unità di peso atomico), A una costante, per la quale R. Titeica assume

(1) Nella seduta dell'8 marzo 1947.
(2) D. H. ANDREWS, « Phys. Rev. », *36*, 544 (1930).
(3) R. YATES, « Phys. Rev. », *37*, 616 (1930).
(4) R. TITEICA, « Ann. de Phys. », *1*, 533 (1934).

il valore $A = 2875$ cm^{-1} per le oscillazioni di valenza, e $A = 1075$ cm^{-1} per le oscillazioni di deformazione [5].

D'altro canto, J. J. Fox e E. A. Martin [6], e D. Clark [7] hanno rilevato alcune relazioni sperimentali intercorrenti, per i legami tra atomi di carbonio in svariate molecole, tra l'energia di dissociazione D, la distanza internucleare di equilibrio r_e, la costante elastica K delle forze di richiamo e il numero x dei legami di valenza tra i due atomi considerati. Esse sono le seguenti:

(2) $$Kr_e^5 = \text{cost.}$$

(3) $$Dr_e^3 = \text{cost.}$$

(4) $$x^{2/3} r_e^3 = \text{cost.} \qquad (= 3{,}7 \text{ secondo Clark; } r_e \text{ in Å}).$$

Fox e Martin hanno poi osservato, che assumendo per l'energia potenziale della molecola o del gruppo atomico in funzione della distanza internucleare r l'espressione

(5) $$U = \frac{\alpha}{r^m} - \frac{\beta}{r^n}$$

usata da R. Mecke [8] e M. Sutherland [9], si ottiene la relazione

(6) $$D = \frac{Kr_e^2}{mn}$$

che, sostituita nella (2), porta alla (3): le (2) e (3) risultano così interdipendenti, ammessa la (5).

Orbene, è facile mostrare anche che le (2) e (4) permettono di giustificare una formula molto prossima alla (1). Infatti dalla (4) si ha

(7) $$r_e = 3{,}7^{1{,}5} x^{-1}$$

e d'altra parte, per la (1'):

(8) $$K = 4\pi^2 \nu^2 \mu = 4\pi^2 c^2 \tilde{\nu}^2 \mu .$$

(5) ANDREWS e YATES usano la notazione

(1') $$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M}}$$

dove ν è la frequenza (in sec^{-1}), e K la costante elastica delle forze di richiamo, cui attribuiscono i valori $K = x \cdot 5 \cdot 10^5$ dine cm^{-1} per le oscillazioni di valenza, e $K = x \cdot 0{,}6 \cdot 10^5$ dine cm^{-1} per le oscillazioni di deformazione; M è la massa ridotta, in gr. Da questa posizione, discendono per la costante A della (1) rispettivamente i valori $A = 2921$ cm^{-1} per le oscillazioni di valenza e $A = 1012$ cm^{-1} per quelle di deformazione. Il valore $A = 2875$ cm^{-1} di R. Titeica si adegua però meglio ai dati sperimentali, nel caso di legami di valenza semplici.

(6) J. J. FOX e E. A. MARTIN, « J. Chem. Soc. London », 1939, p. 884.

(7) D. CLARK, « Nature », *143*, 800 (1939).

(8) R. MECKE, « Zs. f. Phys. », *42*, 390 (1927).

(9) M. SUTHERLAND, « Proc. Ind. Acad. » (A), *8*, 341 (1938).

Sostituendo nella (2) a K e r_e le loro espressioni (7) e (8), e risolvendo rispetto a $\tilde{\nu}$ si ottiene:

$$\tilde{\nu} = B \sqrt{\frac{x^{10/9}}{\mu}} = B x^{1/18} \sqrt{\frac{x}{\mu}}, \tag{9}$$

che differisce dalla (1) solo per l'esponente 5/9 di x, invece di 1/2, e in particolare si identifica con essa per $x = 1$. La validità delle (2) e (4) è quindi legata alla validità della (1) (già precedentemente accertata), o, meglio, della (9).

A questo riguardo, dà una tabella riportata da R. Titeica [10], nella quale sono messi a confronto i numeri d'onde, di oscillazioni melecolari, sia osservati sperimentalmente sia calcolati con la (1), risulta che l'accordo tra $\tilde{\nu}_{oss}$ e $\tilde{\nu}_{calc}$ è abbastanza buono per i legami semplici (almeno tra C, N, O), mentre per i legami doppi e tripli i valori calcolati sono sistematicamente e sensibilmente inferiori a quelli sperimentali. La formula (9) che, preso per B il dato di A secondo R. Titeica, dà valori superiori alla (1) per un fattore $x^{1/18}$ (ossia 1,039 per $x = 2$ e 1,063 per $x = 3$), migliora sensibilmente l'accordo tra $\tilde{\nu}_{oss}$ e $\tilde{\nu}_{calc}$, come è immediato controllare sui dati della tabella citata. Del resto, R. Mecke [11], nei riguardi della propria formula

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k'}{\mu r_e^2}} \tag{10}$$

pure valida approssimativamente, sia per molecole biatomiche che poliatomiche, ha osservato che la costante k' (lavoro necessario per raddoppiare la distanza di equilibrio r_e tra i due atomi in questione, supposta valida la legge di Hooke), nel caso dei diversi composti di C, N, O, assume, rispettivamente per i legami semplici, doppi, e tripli, valori che stanno fra loro come 1 : 2 : 3 (Mecke, loc. cit., tabella 3, p. 36), il che permette di scrivere la (10) nella forma:

$$\tilde{\nu} = \frac{B'}{r_e} \sqrt{\frac{x}{\mu}} \tag{11}$$

che differisce della (1) per il fattore $\frac{1}{r_e}$ (a parte il diverso valore della costante).

Siccome dalla stessa tabella 3 di Mecke si rileva che r_e assume, in media, valori decrescenti passando dai legami semplici ($r_e = 1{,}50 \pm 0{,}05$ Å) ai doppi ($r_e = 1{,}23 \pm 0{,}04$ Å) ed ai tripli ($r_e = 1{,}12 \pm 0{,}03$ Å), risulta anche di qui la necessità di un fattore correttivo alla (1) per meglio adeguarla ai valori sperimentali per i legami doppi e tripli: questa correzione nella (9) è realizzata dal fattore $x^{1/18}$, e nella (11) dal fattore $\frac{1}{r_e}$.

(10) R. TITEICA, loc. cit., p. 543.

(11) R. MECKE, « Leipziger Verträge », 1931, *Molekülstruktur*, p. 23 ÷ 58.

Chimica (Chimica-Fisica). — *Cinetica delle reazioni lente.* – II. *Acetilazione dell'alcole etilico* [1]. Nota di U. Beretta e L. Jannelli, presentata [2] dal Socio F. Giordani.

In una Nota precedente [3] abbiamo svolto alcune considerazioni sul modo di interpretare il decorso di reazioni del tipo lento ed, avendo riconosciuto l'opportunità di raccogliere in modo sistematico una maggior copia di dati sperimentali, abbiamo riferito i risultati di numerose misure eseguite sulla acetilazione dell'alcole metilico in soluzioni benzeniche. Tali misure sono state condotte e discusse in modo da chiarire l'influenza che – in molte reazioni bimolecolari di tipo lento – esercita la concentrazione di uno dei reagenti: nel nostro caso particolare la velocità dipende dalla concentrazione dell'alcole, e non da quella dell'anidride acetica.

Nella presente Nota riportiamo e discutiamo in linea preliminare i risultati di un'altra serie di misure, eseguite sulla reazione di acetilazione dell'alcole etilico.

Questa reazione è stata studiata molto di più che non quella con alcole metilico. Dalle esperienze di Menschutkin [4], eseguite a 100° C, risulta che – a parità di ogni altra condizione – la costante di velocità dell'acetilazione dell'alcole etilico in soluzione benzenica è circa eguale al 48 % di quella dell'alcole metilico, diminuzione ammissibile anche come semplice conseguenza di una variazione del fattore sterico. In epoca più recente Soper e Williams [5] hanno eseguito una serie di misure a 50° C, sempre in soluzioni benzeniche, con una concentrazione iniziale di anidride acetica 0,216 m e con valori diversi della concentrazione iniziale dell'alcole da 1,172 m fino a 1,724 m ed hanno trovato delle costanti di velocità variabili con quest'ultima concentrazione. A differenza di quanto risulta dalle nostre esperienze, non solo relative a questo alcole, ma anche relative allo alcole metilico, Soper e Williams registrano delle costanti di velocità che salgono da $39 \cdot 10^{-4}$ fino a $40{,}5 \cdot 10^{-4}$ quando C passa da 0,172 a 0,345 m, dopo di che si ha la regolare diminuzione, com'è quella osservata da tutti gli sperimentatori nell'intero intervallo, fino a raggiungere $k = 19{,}5 \cdot 10^{-4}$ per

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica-Fisica dell'Università di Napoli. Centro Studi di Chimica Applicata del C. N. R.

(2) Nell'adunanza dell'11 gennaio 1947.

(3) U. Beretta e L. Jannelli, *Cinetica delle reazioni lente.* – I. *Acetilene dell'alcole metilico.* (Questi « Rendiconti », vol. II, p. 197).

(4) N. Menschutkin, *Ueber die Geschwindigkeit der Esterbildung.* (« Z. phys. Ch. », *1*, 611-630; 1887).

(5) F. G. Soper and E. Williams, *The effect of the solvent on the rate of acetylation of ethyl alcohol by acetic anhydride.* (« J. Ch. Soc. », *134*, 2297-2303; 1931).

C = 1,734 m. Per quante prove abbiamo fatto non siamo mai riusciti a confermare il surricordato andamento crescente di k nell'intervallo delle concentrazioni più piccole; ma abbiamo sempre constatato una regolare diminuzione di k al crescere di C, pur trovando valori che sono dello stesso ordine di grandezza di quelli dei due citati autori. Per esempio, noi troviamo $k = 24{,}97 \cdot 10^{-4}$ per $t = 49{,}63^{\circ}$ e C = 0,857 mentre S. e W. danno $k = 30{,}6 \cdot 10^{-4}$ per $t = 50^{\circ}$ C e C = 0,862: queste costanti sono riferite al minuto primo, invece che al minuto secondo.

Posteriormente Moelwyn–Hughes e Hinshelwood [6] hanno esaminato la stessa reazione in soluzioni di tetracloruro di carbonio e di esano normale ed hanno trovato costanti di velocità decrescenti al crescere della concentrazione, senza peraltro approfondire molto l'andamento del fenomeno. Questi autori hanno fermato la loro attenzione sul confronto tra le costanti di velocità misurate in soluzione e quelle che si ricavano seguendo il decorso della stessa reazione in fase gassosa ed hanno trovato che esse sono dello stesso ordine di grandezza, dal che hanno creduto di poter concludere che la lentezza delle reazioni non possa essere attribuita ad una disattivazione da parte delle molecole del solvente. Dalle poche misure, che essi hanno eseguito, risulta peraltro che l'influenza delle pareti è molto marcata, cosicchè non si può escludere che la reazione si svolga essenzialmente nello strato adsorbito.

Calcolando le formule di Arrhenius, senza particolari accorgimenti per tener conto della influenza della concentrazione iniziale dell'alcole, gli AA. citati trovano per le loro misure in soluzione:

$A = 9{,}16 \cdot 10^{4}$; E = 12.400 in esano normale
$A = 4{,}14 \cdot 10^{5}$; E = 13.400 in tetracloruro di carbonio

valori che indicano senza dubbio un decorso lento. Ai fini del confronto di questi risultati con quelli di Menschutkin, di Soper e Williams e nostri, occorre osservare che, per queste reazioni, le costanti di velocità nei due solventi, esano normale e tetracloruro di carbonio, sono sensibilmente maggiori di quelle che si hanno in soluzioni benzeniche. Ricorderemo infine che Moelwyn–Hughes e Rolfe [7] hanno studiato anche la cinetica della reazione in alcole etilico come solvente, dove essa decorre monomolecolare rispetto all'anidride acetica, ed hanno trovato $k = 4{,}4 \cdot 10^{8}\ e^{-18.800/RT}$, formula che – alla temperatura di 50° – dà un valore 630 volte più piccolo di quello che si calcolerebbe secondo la teoria delle collisioni.

Di fronte a questo complesso di risultati non ancora decisivi, ci è parso necessario di eseguire anche per l'acetilazione dell'alcole etilico una serie sistematica di misure di velocità in soluzioni benzeniche, con una concentrazione iniziale dell'anidride acetica sempre eguale, e cioè circa 0,3, m e

(6) E. A. Moelwyn-Hughes and N. C. Hinshelwood, *The kinetics of two bimolecular reactions in solution and in the vapour phase.* (« J. Ch. Soc. », *135*, 230–240; 1932).

(7) E. A. Moelwyn-Hughes and A. C. Rolfe, *The kinetics of esterification of acetic anhydride in ethyl-alcoholic solutions.* (« J. Ch. Soc. », *135*, 241–246; 1932).

con concentrazioni iniziali, C, dell'alcole etilico variabili da 0,171 m a 0,857 m. Le costanti k ricavate per le varie temperature (49,63° – 59,00° e 68,85° C) e per i diversi valori di C, figurano nella tabella I, dove sono riportati anche i valori che corrispondentemente si calcolano con le formule di Arrhenius ponendovi le costanti ricavate col metodo dei minimi quadrati.

Tabella I.

Conc. iniziale C	$k \cdot 10^4$ litri·mol^{-1}·sec^{-1}.					
	$t = 49{,}63°$		$t = 59{,}00°$		$t = 68{,}85°$	
	oss.	calc.	oss.	calc.	oss.	calc.
0,171	0,7838	0,8018	1,578	1,639	3,570	3,355
0,343	0,6426	0,6570	1,225	1,268	2,588	2,448
0,514	0,5556	0,5621	1,006	1,059	2,126	1,996
0,686	0,4750	0,4970	0,936	0,9251	1,775	1,755
0,857	0,4161	0,4422	0,849	0,8076	1,488	1,471

Le formule così ottenute rappresentano i valori di k con l'approssimazione di poche unità per cento e con uno scarto massimo del 5 %. I valori di A e di E, trovati per le varie formule di Arrhenius, valide in corrispondenza delle varie concentrazioni iniziali dell'alcole, sono raggruppati nella tabella II e mostrano lo stesso andamento che si era già osservato nel caso dell'alcole metilico: l'energia di attivazione cresce al diminuire della concentrazione e quindi il fattore di Boltzmann diminuisce, seguendo perciò un andamento discordante da quello di k; donde segue che il fattore A deve in complesso crescere molto più rapidamente quando la concentrazione iniziale dell'alcole diminuisce.

Tabella II.

Conc. iniziale C	E		A·10−5		log A	
	calc. dir.	interp.	calc. dir.	interp.	calc. dir.	interp.
0,171	16,326	16,323	92,44	93,03	6,96585	6,96864
0,343	15,010	15,001	9,713	9,490	5,98735	5,97728
0,514	14,460	14,467	3,526	3,645	5,54725	5,56173
0,686	14,180	14,180	2,014	1,980	5,30415	5,29661
0,857	13,734	13,726	0,894	0,897	4,95135	4,95294

Per renderci conto del presumibile decorso della reazione nelle condizioni in cui si può ritenere che l'alcole si trovi nello stato molecolare corrispondente alla diluizione infinita, abbiamo cercato di estrapolare i valori di A e di E al tendere di C a zero. Utilizzando il metodo dei minimi quadrati, abbiamo calcolato le due seguenti formule di interpolazione:

$$\frac{1}{E} = 0{,}00005105 + 0{,}0000773\ C - 0{,}0001141\ C^2 + 0{,}0000625\ C^3$$

$$\frac{1}{\log A} = 0{,}10058 + 0{,}32097\ C - 0{,}45211\ C^2 + 0{,}2563\ C^3$$

dalle quali si deduce:

$$\lim_{C \to 0} E = 19.586 \quad \text{e} \quad \lim_{C \to 0} A = 8{,}7.10^9.$$

Il numero delle collisioni Z, corrispondenti alle concentrazioni unitarie dei due reagenti, risulta eguale $2{,}7 \cdot 10^{11}$, ed è quindi trenta volte maggiore del limite a cui tende A. Questo divario relativamente piccolo può bene imputarsi in parte al fattore sterico ed in parte alle inevitabili incertezze, che si hanno sia nel calcolo di Z, sia nelle estrapolazioni di E e di A.

In conclusione, possiamo dire che, anche nel caso dell'alcole etilico come si era già osservato per il metilico, la reazione bimolecolare di acetilazione procede quantitativamente in conformità di quanto si può prevedere dalla semplice teoria delle collisioni, a patto che ci si riferisca alle condizioni molecolari in cui si troverebbe l'alcole a diluizione infinitamente grande.

È noto che anche l'alcole etilico in soluzione benzenica è sensibilmente associato. Dalle misure crioscopiche di Beckmann [8] risulta che il fattore di associazione è lievemente minore di quello dell'alcole metilico, essendo esso eguale a 2,78 per C = 1,10 m; e perciò anche qui si deve pensare che la velocità di reazione tra anidride acetica ed alcole etilico, entrambi monomeri, si può dedurre soltanto con una estrapolazione del tipo di quella da noi utilizzata.

I valori di A e di E trovati da Moelwyn–Hughes e Rolfe (loc. cit.) per le reazioni che si svolgono in soluzioni etilalcoliche si inquadrano bene con questo modo di vedere, perchè essi sono intermedi tra quelli osservati per soluzioni benzeniche e quelli estrapolati e quindi sembrerebbero corrispondere ad una limitata associazione dell'alcole etilico, del quale sappiamo che è associato allo stato liquido, pur non essendo in grado di precisare per esso il fattore di associazione alle varie temperature.

Ma la concordanza tra le nostre esperienze e quelle di M.–H. e R. appare molto più evidente quando se ne esaminino i risultati al lume di una interessante trattazione teorica di Fairclough ed Hinshelwood, i quali

(8) E. Beckmann, *Ueber die Methode der Molekulargewichtbestimmung durch Gefrierpunkterniedrigung.* (« Z. phys. Ch. », *2*, 715–743; 1888).

hanno cercato di interpretare il parallelismo che si constata nelle variazioni dei valori, che assumono le grandezze A ed E, allorquando si esamina una stessa reazione in un mezzo solvente di proprietà gradualmente variabili [9].

Ammettendo che debba trascorrere un certo intervallo di tempo t tra l'incontro attivato e la reazione, ed ammettendo inoltre che sia Θ la durata della vita media del complesso preattivato; Fairclough ed Hinshelwood ritengono che t sia inversamente proporzionale alla frequenza di vibrazione ν del legame, coinvolto nella reazione, e che questa frequenza sia a sua volta una funzione di E, giungendo alla formula:

$$\log A = \text{cost} - \frac{n\sqrt{E_0}}{\Theta\nu_0}\,\frac{1}{\sqrt{E}}$$

nel caso che interceda una proporzionalità diretta tra l'energia di attivazione e la costante della forza di legame. In questa formula E_0 e ν_0 sono i valori di E e di ν relativi ad una condizione di riferimento, fissata una volta per tutte per una data reazione, e quindi sono da considerare come costanti, alla stessa stregua di n e di Θ.

La formula segnala che si debba verificare un andamento lineare di $\frac{1}{\sqrt{E}}$ in funzione del log A: piccole deviazioni dalla linearità sono da attribuire a piccole divergenze tra l'effettiva relazione $\nu = f(E)$ e l'altra derivante dalla semplificazione che si introduce ritenendo che E sia proporzionale alla costante della forza di legame. Sostanzialmente, le verifiche sperimentali, addotte da F. e H. in appoggio della loro teoria, fanno pensare che la graduale variazione del mezzo solvente provochi una graduale variazione della frequenza propria ν del legame considerato, attraverso un rafforzamento od un indebolimento del legame stesso.

Effetti analoghi si possono avere per graduale polimerizzazione (od anche in seguito al formarsi di composti molecolari di addizione) da parte di uno dei reagenti; e perciò abbiamo voluto saggiare se la stessa legge di dipendenza tra $\frac{1}{\sqrt{E}}$ e log A si trovasse verificata per le diverse coppie di valori da noi calcolati in corrispondenza delle diverse concentrazioni iniziali dell'alcole.

L'accluso diagramma rappresenta graficamente i risultati relativi all'alcole metilico ed all'alcole etilico e conferma l'andamento sensibilmente lineare, già previsto e dimostrato da Fairclough ed Hinshelwood per il caso di una graduale variazione nelle caratteristiche del mezzo solvente. Tra i punti rappresentativi del diagramma sono inclusi anche quelli che corri-

(9) R. A. Fairclough and C. N. Hinshelwood, *The functional relations between the constants of the Arrhenius equation.* (« J. Ch. Soc. », 538–46; 1937).

spondono alle coppie di valori dedotti per estrapolazione delle due serie di misure, eseguite con i due alcoli. Per mezzo di un quadratino è stato segnato anche il risultato delle esperienze di Moelwyn–Hughes e Rolfe, per mettere in evidenza che esso dista di poco dalla curva relativa all'alcole

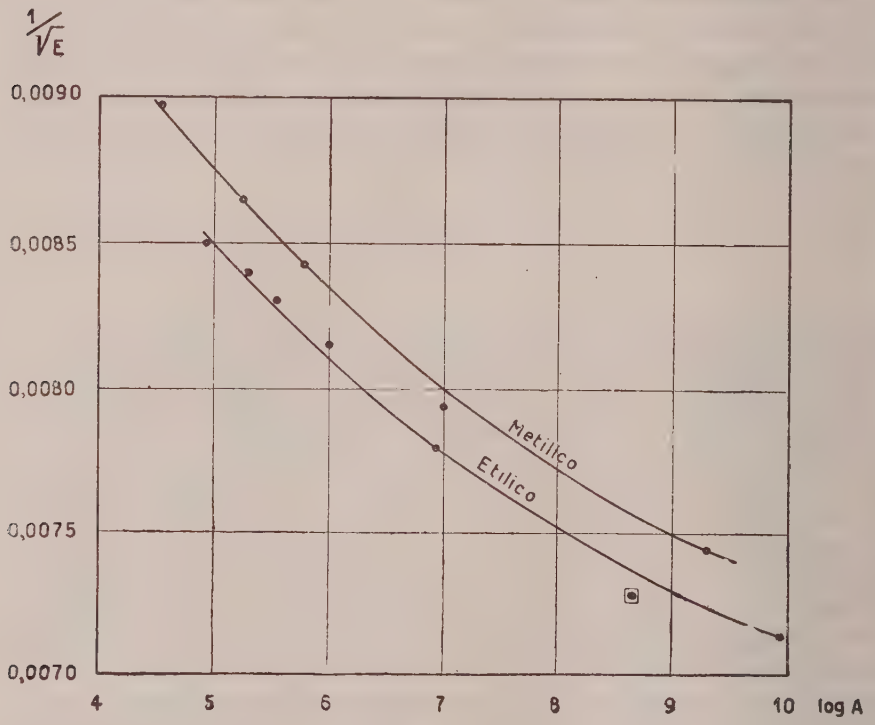


Fig. 1.

etilico, e che perciò dimostra una concordanza di comportamento, la quale – per essere dedotta da esperienze così disparate, eseguite con mezzi ed in tempi diversi – si può ritenere molto significativa.

In complesso questi primi risultati indicano, da un lato, che c'è parallelismo di influenza da parte della graduale modificazione dello stato molecolare di uno dei reagenti così come da parte di una graduale variazione del mezzo solvente; e, dall'altro lato, dimostrano la necessità di procedere nel modo sistematico da noi tenuto per sceverare l'influenza della concentrazione del reagente a stato molecolare variabile, se si vogliono ottenere valori di E e di A (e quindi di PZ) non privi di significato.

Chimica. — *Le leghe fra praseodimio e indio*[1]. Nota di A. IANDELLI, presentata[2] dal Socio L. ROLLA.

Delle leghe fra gli elementi delle terre rare e gli altri metalli del III gruppo del sistema periodico sono conosciute quelle del lantanio, cerio e praseodimio con l'alluminio ed il tallio[3]. Allo scopo di esaminare in modo sistematico il comportamento delle terre rare con gli altri elementi, presenta quindi un certo interesse lo studio delle loro leghe col gallio e l'indio. Nel presente lavoro riferirò i resultati ottenuti per il sistema praseodimio-indio.

Sono stati usati dei metalli di partenza di notevole purezza. Il praseodimio è stato preparato col metodo usuale di elettrolisi di un miscuglio fuso di cloruri di praseodimio, sodio e potassio. Il sale usato proveniva da un frazionamento di nitrati doppi di praseodimio e neodimio col magnesio, eseguito da me qualche tempo fa, su materiale del prof. L. Rolla; e non conteneva sicuramente altre impurezze di terre rare in quantità superiore allo 0,01 %. Il cloruro di sodio e potassio erano stati purificati accuratamente partendo dai prodotti commerciali. L'elettrolisi ha dato un rendimento soddisfacente, fornendo 250 grammi di praseodimio metallico compatto, da un po' meno di 1 Kg. di $PrCl_3$. L'analisi ha mostrato la presenza di piccole quantità di silicio, ferro, carbonio e tungsteno, provenienti dal crogiolo e dagli elettrodi usati, complessivamente inferiori allo 0,5 %. Il metallo tagliato conserva all'aria la sua lucentezza per lungo tempo, a differenza di quello di qualità peggiore che si ricopre rapidamente di uno strato di ossido idrato. Il punto di fusione è risultato di 912°; ed una misura di durezza Vickers ha dato il valore di 60 gradi V. La duttilità è assai alta.

L'indio era stato fornito dalla ditta W. Francke-Francoforte s. M., ed aveva, secondo le indicazioni della stessa, una purezza corrispondente al 99,95 %. Il suo punto di fusione è risultato di 155°.

Le leghe sono state preparate per fusione dei due metalli sotto uno strato protettivo di cloruro sodico o di cloruro di bario, o miscugli dei due, in crogioli cilindrici Phytagoras, e, per una porzione centrale del sistema, in crogioli di Alsint, che si sono dimostrati ottimi di fronte all'attacco della lega fusa. Come si comprende facilmente, è necessario evitare un consumo troppo grande dei due metalli rari, specialmente dell'indio. Sono indispensabili poi tutte le avvertenze per ricuperare nel modo più completo possibile i due metalli.

La composizione della lega può essere stabilita soltanto approssimativamente dal peso dei due metalli messi insieme; poichè, come in tutte le

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica dell'Università di Genova col sussidio del C. N. R.

(2) Nella seduta dell'8 febbraio 1947.

(3) G. CANNERI, «Metallurg. ital.», *26* (1934), 3; «Alluminio», *2* (1933), 87; R. VOGEL, «Zs. Metallkunde», *35* (1943), 29.

leghe delle terre rare, si ha un forte attacco del crogiolo, con conseguente diminuzione di praseodimio nella lega. Per le composizioni intermedie poi, le perdite derivano anche dalla tendenza della lega a disperdersi nel sale fuso che la ricopre, dopo una trasformazione iniziale del praseodimio in ossicloruro. L'analisi si rende quindi necessaria per tutte le leghe; ed è stata eseguita sciogliendo i campioni in acido cloridrico e precipitando prima l'indio come solfuro in soluzione acetica, secondo Thiel e Luckmann[4] e pesandolo come tale; e successivamente il praseodimio come ossalato e pesandolo come Pr_6O_{11}. In prove preliminari si è constatato che il metodo fornisce risultati esatti. La variazione di composizione durante la fusione costituisce un inconveniente molto spiacevole, e obbliga molte volte a dover ripetere la preparazione e l'analisi termica di una lega. Inoltre i punti che si ottengono, come si osserva dalla tabella che riporta i dati relativi all'analisi termica o dal grafico, hanno composizioni distribuite irregolarmente rispetto a quelle che sarebbero a rigore sufficienti per stabilire il diagramma di stato.

Le curve di raffreddamento sono state eseguite misurando le temperature con una coppia termoelettrica Pt–Pt/Rh, ripetutamente controllata con i punti di fusione del Cd, Zn, Sb, Al, Ag e Cu. Per le leghe ricche di indio, che presentano un arresto a bassa temperatura, ho potuto anche, usare un termometro a mercurio, che poteva essere introdotto nel blocchetto preparato a temperatura più alta, e riscaldato sotto olio a circa 200°. Specialmente in vicinanza dei composti Pr_2In_3 e $PrIn_3$, che presentano delle forti soprafusioni, è inoltre necessario agitare la lega fusa con un rivestimento da coppia termoelettrica durante il raffreddamento. Le quantità di lega usate sono state fra 25 e 30 gr.

Tutte le leghe sono state osservate micrograficamente, incontrando però una grande difficoltà per quelle fra il 20 e 55 % di In per la fortissima ossidabilità; e per quelle a percentuale maggiore del 70 % per la presenza nel blocchetto di numerosissime cavità, dovute ad una notevole contrazione durante il raffreddamento. Non è stato possibile per la massima parte di queste leghe di ottenere delle fotografie riproducibili per lo scarsissimo potere riflettente delle superfici ossidate, anche leggermente, e la conseguente mancanza di contrasto nella fotografia; mentre l'osservazione diretta fatta subito dopo la pulitura o anche dopo una leggera ossidazione iniziale permette di osservare in generale assai distintamente le diverse fasi che si trovano sulla superficie esaminata. L'esame micrografico ha confermato il diagramma termico.

Anche l'esame con i raggi X ha presentato le stesse difficoltà. Solo le leghe contenenti più del 70 % di Indio si comportano infatti assai bene, conservandosi perfettamente stabili all'aria; tutte le altre, o molto rapidamente, o dopo un certo tempo, si ricoprono di uno strato di prodotti di ossidazione. Dopo alcuni tentativi di preparazione della limatura sotto azoto, eseguiti con un dispositivo simile a quello descritto da Zintl[5], e che hanno

(4) A. Thiel, H. Luckmann, «Zs. anorg. allgem. Chem.», *172* (1928), 375.,
5) E. Zintl, «Zs. phys. Ch.», (A), *154* (1931), 92.

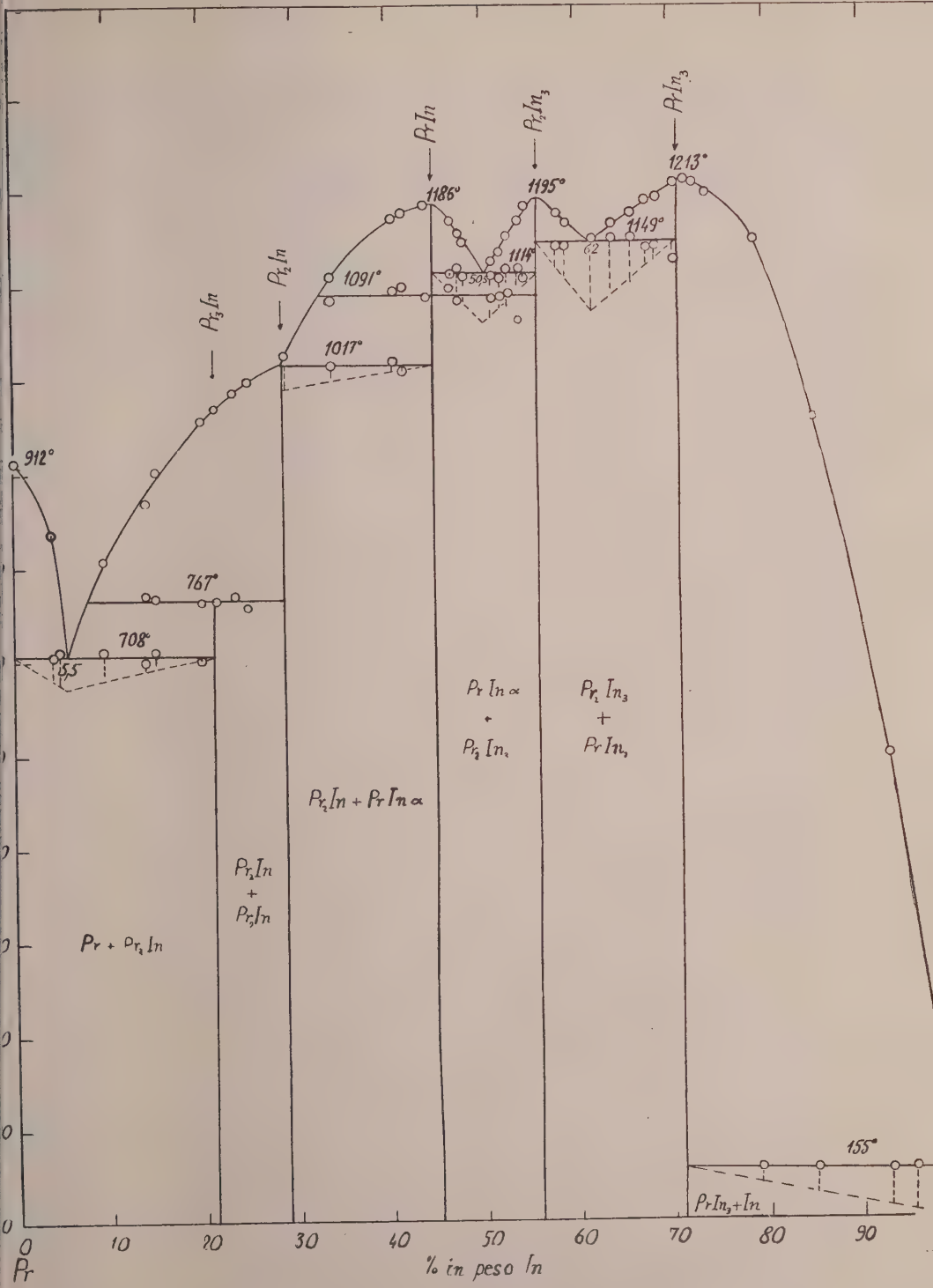

PrIn
Pr₂In₃
PrIn₃
1213°
1195°
1186°
1149°
1114°
1091°
1017°
912°
767°
708°
155°
Pr₃In
Pr₂In
Pr + Pr₃In
Pr₂In + PrIn∝
PrIn∝ + Pr₂In₃
Pr₂In₃ + PrIn₃
PrIn₃+In
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
Pr
% in peso In

fig. 1

dato un mediocre risultato per la capacità di reazione della lega anche con l'azoto, ho adottato un procedimento più semplice, tagliando dal blocchetto di fusione una bacchetta prismatica e rendendola cilindrica sul tornio, oppure, quando questo non era possibile per la fragilità della lega, con la mola. La bacchettina finale ottenuta veniva poi immersa in paraffina fusa e liberata dallo strato di ossido in modo da renderla perfettamente lucente.

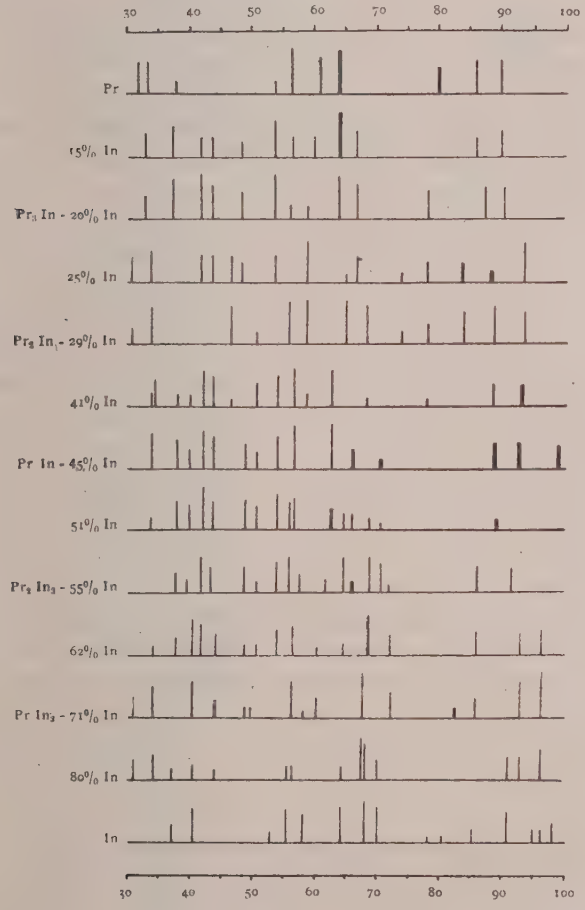


Fig. 2.

L'ossidazione attraverso la paraffina avviene allora molto lentamente; e solo per le leghe più ossidabili si rende evidente con un annerimento dopo 5–6 ore, tempo sufficiente per permettere l'esecuzione di un fotogramma Debye. L'assenza di ossidazione si ricava anche dal confronto con i fotogrammi sulle stesse bacchette ossidate; e il trattamento meccanico non modifica i resultati come si vede eseguendo un fotogramma sulle bacchette lungamente ricotte.

Tabella I.

Temperature caratteristiche sulle curve di raffreddamento delle leghe Praseodimio–Indio.

La prima colonna dà le percentuali in peso di indio; la seconda le temperature dell'inizio di solidificazione; la 3ª, 4ª, 5ª quelle degli arresti eutettici e peritettici, e le durate corrispondenti. Temperature in °C; durate degli arresti in secondi per 30 gr. di lega.

0	912°						
4,2	838			707°	23″		
4,7	—			712	31		
9,5	809			711	19		
14	862	773°	13″	700	16		
15	907	769	13	713	7		
20	956	765	14	703	4		
21,6	969	766	20				
23,5	987	772	15				
25	1000	760	—				
29						1028°	50″
34	1110			1085	9	1012	20
40,5	1173			1098	13	1020	11
41,5	1177			1100	12	1008	7
44	1186			1086	15		
46,7	1170	1114	4	1100	10		
47,5	1156	1119	20	1082	10		
48	1148	1110	31	—	—		
51,2	1131	1111	53	1088	9		
52	1134	1108	43	1090	—		
52,8	1152	1120	40	1092	8		
54	1170	1120	12	1060	—		
54,5	1185	1109	4				
58	1177	1143	55				
59	1167	1144	74				
62	—	1151	150				
64	1166	1153	100				
66,1	1175	1154	89				
67,7	1193	1138	46				
68,4	1194	1142	45				
70,4	1210	1123	22				
71,7	1213						
72,6	1212						
73,7	1196						
79	1150	156,8	59				
85	959	154,7	102				
93	600	155	160				
95,8	—	155,1	189				
100		155	210				

Nella tabella I e nella fig. 1 sono riportati i dati relativi alle temperature caratteristiche riscontrate sulle curve di raffreddamento; mentre nella fig. 2 sono state riportate schematicamente le righe dei fotogrammi Debye per le composizioni più importanti.

Il punto di fusione del praseodimio viene rapidamente abbassato per aggiunta di indio, fino a raggiungere un minimo nell'eutettico al 5,5 % In, con la temperatura di 708°, facilmente riconoscibile all'esame micrografico. La temperatura risale poi velocemente fino a 1017°, corrispondente al punto di fusione del composto Pr_2In (28,93 % In). La lega al 29 % di In si presenta micrograficamente come perfettamente omogenea, mentre quelle precedenti mostrano insieme al composto ed all'eutettico, una nuova fase. Anche sulle curve di raffreddamento si nota una temperatura caratteristica a 767°, corrispondente ad una evoluzione termica molto piccola, tanto che per la loro incertezza non sono stati riportati sul grafico le durate degli arresti corrispondenti, che si fanno però sempre più evidenti verso il 20 % In. I fotogrammi Debye hanno permesso di chiarire molto bene quello che succede nella lega, mostrando la comparsa di righe diverse da quelle del praseodimio e del composto Pr_2In; e che si trovano ad essere le sole per la composizione Pr_3In (21,34 % In). In questo intervallo di composizioni e così pure nel tratto successivo fino al 40 % quasi tutte le leghe sono state esaminate con i raggi X, dopo una ricottura nel vuoto a 600°-650° per 6 giorni. Per la composizione predetta i fotogrammi mostrano la presenza di una fase unica, con reticolo a facce centrate e con la costante reticolare di 4,92 Å. Non può trattarsi di un reticolo tipo $AuCu_3$, del quale si conoscono molti rappresentanti, perchè non è verificata la condizione geometrica, che richiederebbe che il raggio dell'In fosse maggiore di quello del praseodimio [6]. Le dimensioni della cella sono leggermente inferiori a quelle che si calcolano prendendo la media fra i raggi atomici del praseodimio e dell'indio (si ottiene un a_0 di 5,01 Å) e si potrebbe forse immaginare che per questo composto si verificasse il caso già osservato per il composto $LaTl_3$ ed altri [7] di una distribuzione disordinata di atomi delle due specie nel reticolo, pure in corrispondenza di una composizione fissa.

Il punto di fusione della lega continua a salire fino al massimo di 1186°, corrispondente al punto di fusione del composto PrIn (44,88 % In). Sulle curve di raffreddamento delle leghe fra il 34 ed il 54 % In si osserva però nettamente ad una temperatura intorno ai 1091° un piccolo arresto che arriva al massimo a 15″ per la lega al 44 % In, e che non può essere interpretato che come una trasformazione allo stato solido del composto PrIn, che esiste quindi in due forme β, e α; rispettivamente sopra e sotto a tale temperatura. Un tentativo di tempera del composto fuso non ha dato nessun risultato positivo, fornendo un fotogramma delle polveri uguale a quello

(6) E. ZINTL u. S. NEUMAYR, « Zs. Elektrochem. », *39* (1933), 86.

(7) U. DEHLINGER, *Chemische Physik der Metalle und Legierungen*. Akademische Verlagsges., Leipzig, 1933, p. 74.

del composto raffreddato naturalmente e a quello ricotto; il che è dovuto verosimilmente ad una grande velocità di trasformazione per l'alta temperatura.

Dopo PrIn si incontrano altri due composti a massimo con le formule Pr_2In_3 (55,98 % In) e $PrIn_3$ (70,95 % In) e con punto di fusione regolarmente crescente, separati da due eutettici a 1114° e 1149°. Dal punto di fusione di $PrIn_3$ (1213°), la temperatura di fusione delle leghe successive diminuisce poi rapidamente fino a quella dell'indio. Come ho già detto, in quest'ultimo tratto del diagramma si può misurare l'arresto a bassa temperatura usando un termometro a mercurio, poichè la lega resta abbastanza pastosa (e tanto più quanto maggiore è il contenuto di indio) anche a bassa temperatura, verso i 200°. Il punto di fusione dell'indio è praticamente lo stesso nelle leghe vicine, entro 0,1–0,2°; e se ne può dedurre che non si ha da questa parte nessun eutettico; e nemmeno nessuna soluzione solida, cosa quest'ultima che è confermata dai fotogrammi di queste leghe che presentano le stesse distanze per le righe dell'indio di quelle del metallo puro.

TABELLA II.

Fotogramma delle polveri di $PrIn_3$

Anticatodo di rame ($\lambda_{k_\alpha} = 1{,}539$ Å). Diametro della camera 57,3 mm.

θ corretto	d/n	Indici	a_0	Intensità	
				osservate	calcolate
16° 38′	2,688	1 1 1	4,656	f — mf	6,9
16° 19′	2,332	2 0 0	4,664	mf	4,5
27° 46′	1,652	2 2 0	4,671	f — mf	7,1
33° 9′	1,407	3 1 1	4,667	ff	10
34° 52′	1,348	2 2 2	4,663	m	3,1
41° 22′	1,164	4 0 0	4,657	m	2,0
46° 3′	1,069	3 3 1	4,659	f	8,0
47° 36′	1,042	4 2 0	4,659	f	8,0
54° 1′	0,951	4 2 2	4,659	f	8,9
59° 5′	0,897	5 1 1 3 3 3	4,661	ff	14,4
69° 6′	0,824	4 4 0	4,660	f	8,6

Media: $a_0 = 4{,}66_1$ Å

Mentre le leghe intorno a Pr_2In_3 mostrano all'osservazione diretta e all'esame micrografico la presenza di cristalli aghiformi lunghissimi del

composto, quelle con più indio del composto $PrIn_3$ sono dopo la fusione piene di cavità riempite da begli aggregati di cubettini del composto fino a mm. 1 di lato. Che si tratti effettivamente del sistema cubico è dimostrato dal fatto che tutte le facce di ogni cubetto mostrano delle tremie, come, quelle del cloruro di sodio, il che indica la loro equivalenza fisica. Il composto è stato quindi esaminato in modo più preciso degli altri dal punto di vista strutturistico. I fotogrammi delle polveri mostrano la presenza di un reticolo cubico a facce centrate, e una misura su fotogrammi di miscele con cloruro sodico dà per lato della cella elementare il valore di 4,66$_1$ Å (vedi tabella II). La misura della densità, eseguita col picnometro usando del toluolo anidro, distillato di fresco su sodio, ha fornito il valore 8,02 a 14° C; e da questo si calcola un numero di molecole per cella elementare di 1. Si è condotti così a localizzare gli atomi di Pr e In rispettivamente nelle posizioni (000); ($^1/_2$ $^1/_2$ 0 ; ecc.); con una struttura del tipo $AuCu_3$ (atomi di Pr ai vertici del cubo elementare ed atomi di In nei centri delle facce) come possiedono, oltre a molti altri, i composti del praseodimio $PrSn_3$ e $PrPb_3$, e che è consentita dalle condizioni geometriche dei raggi. Il calcolo dell'intensità delle righe per questa disposizione fornisce dei valori estremamente piccoli per le righe ad indici misti, che infatti non compaiono sui fotogrammi; e per quelle a indici o tutti pari o tutti dispari i valori indicati sulla tabella II. Su questa non sono state riportate le righe dovute alla radiazione K β del rame, che compaiono sui fotogrammi in corrispondenza di quasi tutte le altre, e che per la loro debolezza non sono da considerare nella determinazione della costante reticolare.

Va notato però che il calcolo dell'intensità delle righe non è in questo caso conclusivo per la struttura con disposizione ordinata indicata; poichè anche una disposizione completamente disordinata fornirebbe dei valori di poco diversi, per la troppo piccola differenza dei fattori atomici del Pr e In. Per quanto si conosce sui composti 1 : 3 di questo tipo si può però ritenere come molto improbabile che quest'ultimo caso possa verificarsi. Per la disposizione ordinata si trova allora che la distanza Pr–In ha subìto una diminuzione rispetto a quella calcolata dai raggi atomici (3,29 Å la prima, 3,44 Å la seconda) corrispondente ad una contrazione dell'atomo di Pr del 3,2 % mentre la distanza fra atomi di In è leggermente aumentata (3,29 invece di 3,24 Å); il che si verifica pure per altri composti 1 : 3 di altri elementi molto elettropositivi.

I tre composti a massimo sono assai fragili, e si formano dai metalli di partenza con reazione assai esotermica, minore però di quello di altre leghe delle terre rare. La durezza è massima per PrIn, minima per Pr_2In_3.

In conclusione, il comportamento dell'indio col praseodimio è un po' diverso da quello che ci si poteva aspettare in base ai sistemi conosciuti col tallio e l'alluminio. Il sistema è completamente diverso da quest'ultimo, mentre in analogia col tallio presenta le formule dei tre composti 2 : 1 , 1 : 1 , e 1 : 3; e in più del tallio, i composti 3 : 1 e 2 : 3. I punti di fusione dei

composti, che per il tallio, lo stagno ed il piombo vanno diminuendo con l'aumentare della quantità del secondo metallo, seguono nel nostro caso l'andamento inverso.

I miei ringraziamenti devoti al prof. Luigi Rolla, che mi ha proposto lo studio delle leghe dei metalli delle terre rare con l'indio, gallio e germanio, e mi ha fornito i mezzi per effettuarlo.

Ringrazio inoltre cordialmente il dott. G. Boato ed il sig. G. Croce, che mi hanno volenterosamente aiutato nel presente lavoro.

Botanica. — *Aspetti ecologici e fitogeografici della vegetazione algologica delle regioni desertiche libiche* [1]. Nota di V. Marchesoni, presentata [2] dal Socio G. Gola.

Ho esaminato recentemente il popolamento algologico delle acque desertiche libiche del Fezzan e del Deserto Libico [3]. La presenza di queste acque e quindi anche i loro popolamenti sono estranei alla nozione geografica di deserto. Le condizioni idrologiche di queste regioni sono quelle di un territorio a clima arido; i massicci sahariani esercitano, coi loro bacini di displuvio, una scarsa alimentazione della rete idrografica sotterranea le cui falde acquifere, affioranti alla superficie, originano sorgenti, stagni, laghi, sebche o permettono all'uomo di formare pozzi e depositi d'acqua; di tutti questi tipi di acque sia naturali che artificiali ho avuto modo di studiare il popolamento algologico. Per l'interpretazione di questi popolamenti ho tenuto conto di quanto si conosce per le acque costiere libiche, egiziane e francesi dell'Africa del Nord.

Il popolamento algologico complessivo della zona desertica libica è costituito da 356 entità, così suddivise: Cianoficee 62, Flagellate 13, Peridinee 6, Eteroconte 2, Diatomee 149, Coniugate 71 e Cloroficee 53; di queste, 346 entità sono state rinvenute negli ambienti idrologici del Fezzan e Gat e solo di 10 è stato l'apporto dei dieci ambienti esaminati nel Deserto Libico. Confronti fra la flora algologica del Fezzan e quella del Deserto Libico non si possono fare, le acque esaminate per il Deserto Libico appartenendo al tipo di acque salate di sebcha o laghetto salato. Nelle acque di Giarabub (studiate da Forti) la flora enumera 68 entità, 11 delle quali non rinvenute nelle acque desertiche; per le acque della Tripolitania montuosa e sublitorale si conoscono 171 entità, delle quali 56 non ritro-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Padova.

(2) Nella seduta dell'8 febbraio 1947.

(3) Mi riferisco ai miei lavori in corso di pubblicazione: *Flora algologica del Fezzan e della regione di Gat* in «Mem. Ist. It. Idrob.», 3, 1947; *Il popolamento algologico delle acque del Deserto Libico* in «N. Giorn. Bot. It.», 1947, nei quali è riportata la bibliografia che può interessare l'attuale Nota.

vate nelle zone desertiche interne, molte di queste essendo legate all'ambiente costiero marino.

Un così elevato numero di entità presuppone una grande varietà di ambienti ecologici. Non tanto la grandezza di ambiente e quindi delle caratteristiche limnologiche particolari influiscono su questa varietà (trattandosi nella maggior parte dei casi di ambienti a piccole dimensioni, poco profondi) quanto l'eutrofismo delle acque (invase spesso da abbondante vegetazione idrofitica) e il grado di mineralizzazione molto variabile e dipendente dalla portata, costanza e dal chimismo stesso delle acque di falda. L'eutrofismo delle acque si nota tanto nelle acque dolci che in quelle salate, le prime caratterizzate da una florula quantitativamente e qualitativamente ricca (la presenza della quasi totalità di Cloroficee Protococcali, Desmidiee, Zignemali e Peridinee è dovuta precisamente a queste acque eutrofiche dolci), quelle salate invece da una florula spesso quantitativamente ricca, ma sempre povera qualitativamente, formata da sole Cianoficee e Diatomee. Le acque poco mineralizzate e quelle fortemente salate hanno popolamenti completamente distinti. Per le Diatomee, che abbiamo considerato esatti indicatori della mineralizzazione dell'ambiente, su 146 entità rinvenute nelle regioni fezzanesi, il 12 % è costituito da entità mesoalobe (quasi esclusivamente viventi in acque salmastre sia litorali che continentali), il 10 % da entità alofile, il 25 % da alofobe proprie di acque dolci e il 53 % da entità indifferenti alla mineralizzazione delle acque: questo complesso rilevante ci è indice di variazioni di mineralizzazione in certi ambienti. Infatti una particolare fisionomia biogeografica del popolamento di molti ambienti a mineralizzazione mediocre (ma anche in molti riconosciuti ad acque dolci), è la coesistenza di entità d'acqua dolce e di acqua salmastra nello stesso ambiente, il chè è facilmente spiegabile in questo clima desertico dove l'intensa evaporazione può modificare la mineralizzazione delle acque quando la portata della falda freatica non è adeguata all'evaporazione. Da queste osservazioni in relazione al chimismo delle acque è stato confermato che è indifferente che la mineralizzazione sia conseguita con cloruro di sodio o con solfato di magnesio o carbonato di sodio o da una associazione di cloruri di magnesio, sodio e potassio, purchè, si raggiunga, per certe entità strettamente mesoalobe, la stessa azione osmotica: questo fatto ci induce a credere che l'azione ambiente delle soluzioni, almeno per queste entità, è di natura fisica più che chimica.

Il tipo di popolamento che prevale in quasi tutti questi ambienti desertici, fatta eccezione delle sebche e laghi salati, è quello eleoplanctonico, che varia in rapporto al trofismo delle acque: in pozzi e sorgenti sottoposti a un forte ricambio è molto ridotto, mentre negli ambienti eutrofici (ad esempio laghetti di Tin Geraben e stagno di Elbarcat) è molto ricco di tutte le divisioni algologiche. In questi stessi ambienti non è raro il caso di riscontrare, accanto al tipico eleoplancton, anche un vero plancton formato da entità veramente planctoniche, pur mancando una zona di acque libere e profonde.

L'ambiente ad acque salate, che sembra il più frequente a verificarsi in queste zone desertiche, dà un impronta particolare all'algologia di queste regioni. Particolari popolamenti esistono per il tipo sebcha e per il tipo laghetto salato. Dal punto di vista idrologico molte volte sono somiglianti, le sebche potendosi trasformare in laghetto (piovaschi, forte alimentazione, ecc.). Il popolamento delle sebche (zone acquitrinose molto salate) è costituito da Diatomee e Cianoficee mesoalobe, alofile e indifferenti. L'ambiente può essere più o meno eutrofico e quindi anche diversamente produttivo di entità adatte anche alla vita di sospensione (*Spirulina subsalsa* per El-Uadi, *Nitzschia curvatula* per il Marada), quando l'ambiente lo permetta con una massa d'acqua rilevante; altrimenti si costituisce sul fondo un popolamento a poche Diatomee (*Campylodiscus*, *Rhopalodia*, ecc.) e Cianoficee filamentose (*Microcoleus*, ecc.). Il laghetto salato di Bzema possiede tale popolamento, essendo idrobiologicamente una sebcha.

I laghetti salati hanno popolamenti analoghi; in quelli poco mineralizzati (laghetti di Traghen) però si riscontra ancora un tipo eleoplanctonico (con Desmidiee e Protococcali), ma la mineralizzazione non deve esser costante, il popolamento bentonico annoverando molte entità di Diatomee mesoalobe e alofile. In altri si nota un popolamento molto ricco in Cianoficee planctoniche (*Spirulina platensis* in quello di Uau en Namus, *Microcystis pallida* nei due laghetti di Cufra, *Dactylococcopsis libyca* per quelli di Murzuch); detta produttività può denotare un eutrofismo.

Questa complessiva flora algologica delle zone desertiche sia di acque dolci che di acque salate non rimane per nulla isolata nel complesso nord-africano, ricollegandosi con quella sublitorale e steppica della Tripolitania ed anche con quella finitima francese ed egiziana. Moltissime affinità ricollegano il popolamento eleoplanctonico delle acque eutrofe fezzanesi con quello della zona montuosa del Nordafrica Francese di acque alcaline (presenza delle stesse Desmidiee e Protococcali, concomitanza di ritrovamento di molte entità specifiche molto rare come *Genicularia Spirotaenia*, ecc., facies algologiche identiche o molto affini); le entità maggiormente osservate nelle acque nordafricane francesi ed egiziane sono quasi tutte rinvenibili anche in queste acque desertiche in ambienti consimili. È da rilevarsi che la maggior parte di queste entità sono a grande distribuzione e frequenza medio-europea (es. *Closterium acerosum*, *Cl. moniliferum*, ecc.); poche sono le entità di apporto tropicale (es. *Cosmarium quadrum*, ecc.) e poche pure le entità endemiche nordafricane (es. *Cosmarium margaritiferum* var. *Egyptiacum;* alcune entità poi, note finora per regioni extracontinentali o per l'Africa centromeridionale, sono state rinvenute solo nelle acque libiche, altre solo in quelle egiziane o francesi, oppure si conoscono per le acque libiche ed egiziane (es. *Closterium acerosum* var. *elongatum*). Anche per la fauna coleotterologica (Gridelli) si sono visti grandi rapporti di affinità con le regioni egiziane. Il popolamento delle acque salate poi è dotato di maggiore uniformità fisionomica tanta nella regione libica che in quelle finitime; ridotto a poche entità, anche nelle acque francesi può esser fortemente

produttivo di una o due entità. Alcune entità sono frequenti anche in ambienti fra loro isolatissimi, altre invece che sembrano caratterizzare queste acque libiche hanno una distribuzione che fa presupporre la loro presenza legata a una data mineralizzazione, come *Terpsinoe Musica* (Giarabub, Taorga, Tarhuna, Garian, Gadames, Maharuga, Sebha, Murzuch, Gat) o come *Microcoleus chtonoplastes* che sembra legato al solo ambiente salatissimo di sebcha (comune per le acque delle sebche nordafricane francesi ed osservato anche in quelle libiche del Marada, Tazerbo e Bzema del Deserto Libico) o come il *Campylodiscus clypeus* (comune in tutta la regione settentrionale del cont. afr., non rilevato per il Deserto Libico, nel Fezzan solo a Taraghen, mentre è presente a Giarabub, Taorga e Marada). Per la fauna coleotterologica di Cufra, Gridelli osservava che le sebche e le loro rive albergano solo specie che poi si trovano in quelle delle zone costiere. Dobbiamo tener presente che l'assenza in molte oasi di specie a larga distribuzione è probabilmente dovuto a deficiente ricerca (osservazione di saggi singoli raccolti spesso in un solo ambiente o litorale o bentonico o planctonico o epifitico).

Nessun criterio distributivo assoluto possiamo quindi dedurre dai numerosi saggi osservati; per il Fezzan infatti, ad esempio, nessun saggio è stato raccolto in sebche, mentre queste vi sono frequenti e così per il Deserto Libico tutti i saggi esaminati provengono solo da ambienti salati, mentre può supporsi esistano pure ambienti di acqua dolce.

Devesi notare che negli ambienti più salati si sono osservate entità sistematicamente nuove (sebcha di Marada e laghetti di Murzuch) o sistematicamente critiche, come il popolamento planctonico dei due laghetti di Cufra o la convivenza di forme morfologicamente nuove assieme alla specie tipica (larghetto di Uau en–Namus); da questo si può ritenere che la ricerca algologica negli innumerevoli ambienti salsi mai esaminati possa farci conoscere molte altre entità sistematicamente nuove. L'ambiente ad acque salse è quindi un severo agente selezionatore (uniformità fisionomica con poche specie), ed anche modificatore col tempo, il che spiega il rinvenimento delle entità nuove proprio in questo ambiente a condizioni accentuate. Forse nel salatissimo laghetto di Uau en–Namus stiamo ora assistendo al tentativo di sopravvento sulla specie *Spirulina platensis* pervenutaci chi sa in che modo (nuova finora per le regioni settentrionali africane) da parte della sua forma *crassior*, che per ora, fino a nuovi dati, possiamo ammettere originatasi dalla specie tipica, con cui convive, ma che forse in un domani può anche scomparire. In queste acque in genere possiamo notare una grande variabilità in certe particolarità morfologiche tanto che per un gran numero di entità la costituzione di forme nuove diviene inutile e poco comprensibile. Specialmente le dimensioni sono ridotte e talvolta molto variabili per una maggioranza di specie viventi in questi ambienti; normalmente si osserva una specie di nanismo indotto dai fattori ambientali sfavorevoli ed incostanti (es. *Cosmarium laeve*, ecc.). Molte Diatomee, come ad esempio *Terpsinoe Musica*, *Rhopalodia gibberula*, *Rh. musculus*,

si può dire che posseggano per ognuno degli ambienti isolati una loro speciale forma distinguibile per diversità dimensionali oppure per il numero dei setti capitolati, forma e sinuosità valvari. Basti ricordare che Müller per le acque delle valli a natron di El Kab descrisse ben sette varietà nuove e un numero elevato di forme nuove di *Rhopalodia gibberula*, coesistente con queste varietà e forme nuove, da essa generate. Diversità morfologiche sono state notate anche in ambienti relativamente vicini, come ad esempio nei due laghetti salati di Cufra popolati intensamente da una *Microcystis* a dimensioni diverse.

Il grande isolamento geografico di questi ambienti sperduti nello squallore del deserto ha contribuito di certo alla formazione di una fisionomia algologica particolare; astraendo dalla diversa mineralizzazione delle acque che provoca di per sè una selezione e particolari popolamenti, le acque a stessa mineralizzazione di un oasi sono popolate da un numero notevole di specie comuni (sorgenti del Gebel Auenat, acque dell'Oasi di Gat, quelle dell'Uadi esc–Sciati, di Cufra, del Tarhuna e Garian in Tripolitania). Per la flora fanerogamica invece parlare di fisionomie particolari è più difficile; infatti neppure al Fezzan è stato facile riconoscere una definita individualità geografica (Corti) ed è stato impossibile distinguere la vegetazione fezzanese in settori con particolari aspetti. In tale ambiente selezionatore le interazioni biologiche sono attenuate di modo che sembra esista invece « una dissociazione fitogeografica ». Contrariamente alla flora algologica, nella flora fanerogamica desertica esiste netta prevalenza di entità appartenenti all'elemento saharo–sindico e sudanese su quello mediterraneo. Ma i confronti non sono possibili, l'ambiente acqueo rappresentando sempre condizioni mitigatrici dei fattori ambientali, dal che ne dipende il cosmopolitismo della maggior parte delle specie. Infatti anche per la flora fanerogamica le stazioni idrofitiche secondo i dati di Corti contribuiscono a mantenere un elevato numero di pluriregionali, che per la loro assoluta eccezionalità nella fisionomia della regione, sono estranee alla nozione fitogeografica di deserto.

In ogni caso l'azione dei fattori della diffusione è più facile ad attuarsi per la flora algologica. Per particolari affinità dei popolamenti delle acque di una stessa oasi intervengono fattori locali della diffusione, che saranno di natura antropica maggiormente, dovuti al locale movimento carovaniero. Pure al movimento carovaniero a grandi distanze deve esser attribuita una importanza positiva per la diffusione longiqua fra oasi e oasi, per quanto i popolamenti di acque di oasi vicine lascino trasparire tale influenza in grado dubbioso; è però certo che ambienti molto lontani da altre oasi e meno frequentati dal movimento carovaniero (come Uau en–Namus), abbiano popolamenti loro propri, per quanto anche questi abbiano entità a grande diffusione libica. Una grande azione nella diffusione dovrebbe esser posseduta anche dai venti, che notoriamente (ghibli), sono molto impetuosi e radenti al suolo; essi provengono dalle direzioni sud–est (anche sud–ovest), ma la loro azione non è controllabile data la mancanza di dati algologici delle regioni centro–sahariane ed anche per la loro stessa natura

desertica per eccellenza, essendo venti infuocati. Altri venti potrebbero svolgere un'azione disseminatrice, quelli invernali spiranti da nord-ovest e quelli primaverili da nord-est, ma sembra siano troppo localizzati alle zone litorali.

In queste distese desertiche con ambienti idrologici molto distanti l'uno dall'altro e a piccole dimensioni, una diffusione a distanza limitata, anche se ripetuta un numero grandissimo di volte, non può sussistere, se non in seno ad una stessa oasi o uadi. Un fattore importante della diffusione longiqua è dato certamente dalle annuali migrazioni dell'avifauna; è confermato da molteplici osservazioni che le regioni sett. afr. ospitano durante l'inverno vari migratori paleartici: località comprovate di svernamento sono l'Egitto, le regioni finitime francesi, la Libia nel suo tratto costiero ed anche le oasi libiche più vicine al mare (quaglia, gabbiano, beccaccia, storno, ecc.); ma non è improbabile che anche le oasi più desertiche possano servire da tappa per i grandi migratori, che, provenienti dai paesi europei, riprendono la via del sud per giungere nelle zone tropicali ed equatoriali (tortore, rondini, ecc.).

Le grandi analogie dei popolamenti d'acqua dolce di tutto il settore settentrionale africano con quelli sud-medioeuropei potrebbero trovare corrispondenza in tale diffusione passiva, che poi si sarebbe estesa anche alle oasi più interne (grandi migratori, movimento carovaniero, avifauna stazionaria, per quanto questa sia poco rappresentata). Anche le eccezionalità possono supporsi con questi concetti; Rich ad esempio riferisce che il plancton abbondante di alcuni laghi del Kenia, costituito da *Spirulina platensis*, è ricercato come alimento dagli uccelli; in base a questo ci sembrerà ora meno eccezionale la presenza di questa stessa entità nel laghetto di Uau en-Namus, così isolato dalle altre oasi.

L'origine di questi popolamenti potrebbe quindi esser spiegata con questa grande diffusione passiva. Attribuire questo attuale popolamento a vicende climatiche passate è forse molto più azzardato, mancandoci ogni dato micropaleontologico relativo a questi ambienti desertici; ma anche tale cosa potrebbe esser passibile di ipotesi, quando pensiamo che già nel terziario (recente), nei depositi fossili salmastri di Franzenbad in Boemia si ritrova *Campylodiscus clypeus*, così frequente anche in tali regioni, con altre entità rinvenute ancor oggi, come *Navicula rostrata*, sempre in ambienti ad acque mineralizzate. Probabilmente le regioni sahariane in un passato non eccessivamente lontano dovevano essere regioni a clima caldo e umido, che poi si sono inaridite con la progressiva diminuzione delle precipitazioni atmosferiche e ripopolate lentamente da ondate migratorie paleartiche, pur sottoponendosi anche ad infiltrazioni dei territori vicini.

Zoologia. — *Note araneologiche.* – XXIV. *Nuovi dati sulla partenogenesi naturale degli Araneidi* [1]. Nota di B. Monterosso, presentata [2] dal Socio A. Russo.

1. Introduzione. – I risultati delle mie ricerche [3] sullo sviluppo delle uova non fecondate dei Ragni fanno sorgere diversi problemi, che mi propongo di affrontare, man mano che il progredire dello studio sull'argomento metterà in luce particolari più vasti e più precisi, indispensabili per una soddisfacente interpretazione del fenomeno osservato. Nell'intento di inquadrare il tipo di partenogenesi (costante–incompleta) che pare caratteristico dei Ragni, a mio giudizio, bastano i dati, che ora mi accingo ad accennare non potendo qui svilupparli adeguatamente.

2. Specie partenogenetiche. – Finora ho potuto accertare la capacità partenogenetica nelle uova delle seguenti specie: *Teutana triangulosa* (Walck), *Tetragnatha extensa* (L.), *Tegenaria domestica* Clerck e *Thomisus albus* Gmelin. Ho già dato comunicazione del reperto [4] per quel che riguarda le prime due; per le altre due la notizia è ancora inedita, avendo potuto sol di recente constatarne la facoltà in parola [5].

Il numero delle specie, in cui si è rinvenuta in modo indubbio la capacità partenogenetica, pertanto, è ancora esiguo. Esso però non è privo di valore, e ciò per due ragioni: anzitutto perchè le quattro forme citate appartengono a famiglie diverse (*Theridiidae*, *Argiopidae*, *Agelenidae*, *Thomisidae*) in secondo luogo perchè, tra le specie da me finora allevate allo stato vergine, queste sono le sole, che abbiano deposto uova normali, sicchè per le altre la questione resta aperta.

3. Partenogenesi in femmine senescenti. – Diverse femmine, appartenenti a varie specie (soprattutto *Teutana triangulosa* e *Tetragnatha extensa*), mi hanno offerto una prova indiretta della capacità partenogenetica,

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata e Zoologia dell'Università di Catania.

(2) Nella seduta dell'8 febbraio 1947.

(3) B. Monterosso, *Partenogenesi negli Araneidi*. « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », XIX, fasc. 7–9 (1944).

(4) B. Monterosso, *Note araneologiche*. – XXII. *Partenogenesi naturale–costante–incompleta in Teutana triangulosa*. Comunicata all'Acc. Gioenia nella seduta dell'11 giugno 1944. In corso di stampa. B. Monterosso e C. Ronsisvalle, *Note araneologiche*. – XXIII. *Partenogenesi in Tetragnatha extensa* (L.) Questi « Rendiconti », Ser. 8ª, vol. I, fasc. 10; B. Monterosso, *Lavori dell'Istituto di Zool. dell'Univers. di Catania nel triennio 1942–44*. « Bibliogr. Medico–Biol. », VII, 1 (1945).

(5) Non mi fermo qui a descrivere i risultati delle mie osservazioni sulle uova, sicuramente vergini, ottenute da individui di *Tegenaria* e di *Thomisus*; basterà dire che quelle, fra di esse, che si mostravano normali, entrarono subito in segmentazione, la quale procedette fino alla costituzione del disco blastodermico, o quasi.

insita nell'uovo di Ragno. Difatti, esse si erano accoppiate, secondo il solito, in giovane età, sicchè avevano, nel corso della loro vita, prodotto un gran numero di uova, da cui si erano normalmente sviluppati i piccoli. Avvicinandosi al termine del loro ciclo vitale, da un certo momento in poi, le loro uova non diedero luogo a nuovi individui, perchè lo sviluppo embrionale di queste, appena raggiunto lo stadio di disco blastodermico, si arrestava come avviene nelle uova partenogenetiche. Purtroppo, data la struttura dell'apparato sessuale dei Ragni, non è possibile controllare con assoluta certezza la mancanza di spermi nei loro *receptacula* – ciò che in ogni caso potrebbe farsi *post mortem*. Tale mancanza tuttavia va senz'altro presunta dal comportamento, or ora accennato, delle uova appartenenti alle ultime deposizioni. Ricordo che un fenomeno del tutto identico è stato constatato in diverse specie di animali a partenogenesi facoltativa, soprattutto nell'Ape comune [6].

Da queste osservazioni e dal confronto, ora cennato, può affermarsi dunque, che, in linea di massima, ove la riserva di sperma si esaurisca prima che si conchiuda il ciclo vitale, le femmine dei Ragni possono continuare a deporre, emettendo però uova partenogenetiche [7].

4. CARATTERI DELLE FEMMINE VERGINI. — I Ragni, che fino ad ora ho allevato, possono distinguersi come segue:

a) specie, le cui femmine vergini depongono uova normali, che iniziano lo sviluppo embrionale, ma non lo portano a compimento;

b) specie, le cui femmine vergini depongono soltanto uova difettose per qualche carattere, sicchè queste non iniziano il processo di partenogenesi, ma degenerano immediatamente;

c) specie, le cui femmine vergini non ovificano mai.

Al primo gruppo (*a*) appartengono, come già sappiamo, *Teutana triangulosa*, *Tetragnatha extensa* ed altre. Per comodità di espressione, chiameremo *vergini feconde* le femmine di tali specie, quando non si siano accoppiate.

Al secondo (*b*) potremo assegnare i rappresentanti del gen. *Scytodes*, di cui abbiamo studiato alcune specie, le quali depongono uova anormali.

(6) Come la maggior parte degli Araneidi, l'Ape regina, vita natural durante, compie un solo accoppiamento. La partenogenesi delle Api fecondate, ma vecchie – che diventano fucaiole – fu, come si sa, messa in evidenza già dal DZIERZON, ma è nota a tutti gli apicultori e registrata anche in diversi manuali pratici. Cfr. H. NACHTSHEIM, *Cytologische Studien über die Geschlechtsbestimmung bei der Honigbiene* (*Apis mellifica*). « Arch. f. Zellf. », XI, 1913, p. 169.

(7) Già il BALBIANI in *Mémoire sur le développement des Aranéides*, « Bibl. Ec. Hautes Etudes », t. VII, art. 6, 1873, aveva notato che nei successivi bozzoli di *Tegenaria* normalmente feconda, il numero delle uova non schiuse andava aumentando. Questo fatto venne spiegato da P. BONNET nel suo lavoro: *De la parthénogénèse, de l'état de maturité etc.*, pubblicato in « Bulletin Soc. Zool. de France », t. LII, n. 5, 1927, con l'ammettere che la riserva di spermatozoi andava esaurendosi. Da ciò questo A. conclude negando nei Ragni il fenomeno di partenogenesi, ammesso da altri Autori.

Per convenzione denomineremo *vergini fertili*, le femmine, che mostrano la caratteristica, di cui sopra.

Al terzo (*c*) ascriveremo i gen. *Pholcus*, *Holocnemus* ed altri; parleremo allora di *vergini sterili*.

Questa classificazione è, come si comprende, troppo schematica. Quando si studia al riguardo una specie, appartenente al primo gruppo (*a*) non bisogna difatti attendersi che tutte le uova si uniformino alle condizioni specificate, ma solo le uova a struttura normale. D'altra parte, se l'osservazione di numerosi individui, appartenenti ad una determinata specie, hanno fatto assegnare questa, per esempio al secondo tipo (*b*), può darsi che, ad un certo momento, un individuo, emettendo uova non difettose e quindi partenogenetiche, la faccia passare al primo (*a*). Fino a poco tempo fa, ad esempio, considerai *sterili* le vergini di *Teutana grossa*; ma al fine una femmina di 2 anni d'età fabbricò un bozzolo con molte uova anormali – sicchè la specie ormai va inclusa nel secondo tipo (*b*).

Del resto, indipendentemente dal tipo, cui una specie di Ragno può essere assegnata, è un fatto, finora confermato costantemente dalle mie osservazioni, estese a parecchie centinaia di individui, che le vergini ovificanti mostrano delle insufficienze più o meno notevoli nelle funzioni, connesse con la produzione delle uova; insufficienze evidentemente più gravi, o per meglio dire assolute, nelle femmine del terzo tipo (vergini *sterili*).

Le vergini *feconde* e *fertili*, infatti, sono fornite di certi caratteri, che qui mi limiterò ad accennare brevemente, riserbandone un'ampia documentazione ad altra Nota:

1° notevole ritardo nel deporre le uova;
2° numero limitato di deposizioni;
3° intervalli insolitamente lunghi tra le successive ovificazioni;
4° esigua quantità di uova in ogni deposizione;
5° difetti nell'architettura dei bozzoli;
6° disordine nella normale concatenazione degli atti, relativi all'emissione dei prodotti sessuali, per cui talora costruiscono il bozzolo, prima di avere espulso le uova, o viceversa, sicchè si hanno ovature non contenute in bozzoli (che d'altronde vengono filati, ma rimangono vuoti), ovvero il bozzolo non viene formato, sebbene le uova siano emesse, ecc. [8].

(8) I Ragni costruiscono il bozzolo normalmente in tre tempi, ciascuno distinguibile in diverse tappe: fabbricano anzitutto una tela speciale; vi depongono le uova; infine ricoprono queste con un tessuto di fili, che finisce per formare un tutto unico con quello prodotto prima. Le femmine vergini, invece, possono compiere il primo tempo, dopo aver deposto le uova, ovvero farlo immediatamente seguire dal terzo, dopodichè espellono i prodotti sessuali; o anche emettere questi senza compiere gli atti, inerenti al primo e al terzo tempo; infine possono compiere uno solo o due qualsiasi dei tre tempi normali. Per la costruzione del bozzolo, da parte delle femmine non vergini, cfr. B. Monterosso, *Note araneologiche*. – XIV. *Deposizione delle uova e costruzione del bozzolo in «Teutana triangulosa»*. Comunicata all'Acc. Gioenia nella seduta del 30 novembre 1942. In corso di stampa.

Oltre a queste e ad altre manifestazioni anormali, delle quali talune dimostrano impressionante dissociazione degli atti riproduttivi da quelli connessi con facoltà, che potremmo dire superiori, per esempio cure parentali, come altrove ebbi occasione di esporre [9], si rileva un precoce e rapido invecchiamento delle vergini *fertili* o *feconde* [10], pertanto una precoce morte, che può seguire talora quasi immediatamente alla deposizione delle uova [11]. Ciò che merita lo studio più attento, poi, è la condizione delle uova, prodotte dalla vergine *fertile* o *feconda*, argomento sul quale dovremo estesamente ritornare in altro lavoro, ove esporremo i risultati di speciali osservazioni citologiche. Basti qui, ritengo, quanto sarà ricordato nel paragrafo seguente.

5. Le ovature di femmine vergini. – Limitandoci ai caratteri macroscopici, diremo anzitutto che, anche quando le uova vergini sono normali e quindi capaci di sviluppo partenogenetico, esse mostrano, salvo rarissime eccezioni, minor grado di trasparenza (diafanità) e di lucentezza, che le uova degli individui fecondati. Ciò va soprattutto attribuito ad accentuata od eccessiva quantità di quella sostanza granulare, che è sempre, presente sul corion delle uova di Ragno [12] – sostanza, che talora nelle uova vergini forma come una patina molto spessa, aderente a tutta la loro superficie o a parte di essa, mentre in quelle fecondate è sempre limitata, sicchè vi costituisce solo un esile ed uniforme straterello periferico [13]. Ora, è

(9) B. Monterosso, *Note araneologiche.* – XXI. *Osservazioni ed esperimenti sull'istinto materno in* « *T. triangulosa* » (Walck). Comunicata all'Accademia Gioenia nella tornata del 28 giugno 1943. In corso di stampa.

(10) È interessante notare che di solito le *vergini sterili* sono molto longeve.

(11) È a tutti noto che anche nelle femmine di molti altri animali la mancata fecondazione può determinare qualche fenomeno di anormalità nella deposizione delle uova. Ritengo che negli Araneidi la portata di queste anomalie sia particolarmente notevole, sicchè ho iniziato delle indagini, allo scopo di penetrare nel significato e nel determinismo di esse. Difatti, sembrano troppo imponenti, in sè stesse e nei riflessi, che portano a tutta l'economia fisiologica dell'individuo, per essere attribuite alla mancanza di un semplice stimolo, direi quasi chimico, del liquido seminale sulla sfera sessuale. Parrebbe invece, che la presenza dello sperma nel corpo della femmina induca lo scatenamento e soprattutto la coordinazione di una serie di funzioni, che, in assenza di esso, o non si compiono o si compiono parzialmente ovvero disordinatamente. Si direbbe che il liquido fecondante, il quale nei Ragni può considerarsi notevolmente complesso, per ragioni, su cui non è qui il posto di soffermarci, si comporti come una sostanza a tipo ormonale composito, sotto il cui controllo si svolga la vita sessuale della femmina, che lo contiene nel suo ricettacolo.

(12) Trattasi di quei finissimi granuli, che hanno attirato l'attenzione di diversi autori: primamente di v. Wittich e di Balbiani, indi di Warren e di parecchi altri, fra i quali recentemente A. Holm, che riassume i precedenti reperti e relative interpretazioni al riguardo di tali corpuscoli, aggiungendovene di propri (cfr. Holm A., *Studien über die Entwickl. und Entwicklunsbiologie der Spinnen.* « Zoologiska Bidrag fran Uppsala », Bd. XIX, 1941).

(13) Sull'origine e il significato di tale sostanza granulare si sono avanzate diverse ipotesi; noi crediamo di potere sostenerne una nuova meglio rispondente forse alla realtà, perchè appoggiata a prove empiriche e sperimentali. Ritorneremo sull'argomento particolarmente in un lavoro, che stiamo allestendo sugli involucri dell'uovo.

interessante notare che, allorquando la patina in discorso, sull'uovo della femmina vergine, non è eccessiva, questo si sviluppa partenogeneticamente; in caso contrario, esso degenera senza aver compiuto alcun tentativo di segmentazione.

Un secondo carattere delle ovature vergini, che merita di essere posto in evidenza, consiste nel tipo dei rapporti, esistenti tra le uova, che le compongono. È noto che nei Ragni le uova, a seconda della specie, possono essere *libere*, cioè sciolte, o *agglutinate*, cioè aderenti insieme per una parte più o meno estesa delle loro superfici.

Da qualche autore si è attribuita l'agglutinazione alla presenza di una sostanza cementante, prodotta dagli annessi dell'apparato sessuale della femmina ovificante. A noi risulta invece che dipende quasi esclusivamente dalle qualità fisiche del corion dell'uovo appena espulso [14].

Or è da notare qui che le uova, anche nelle specie, che normalmente le presentano libere (per esempio *T. triangulosa*), sono spesso agglutinate, se vergini. Ove tale carattere sia limitato, lo sviluppo partenogenetico si verifica; in caso diverso, non si verifica.

Lo stesso può dirsi per le specie, le cui ovature normalmente sono agglutinate (es. *Tetragnatha extensa*). Se tale qualità è in grado eccessivo, non si ha la segmentazione dell'uovo vergine. Nell'uno e nell'altro caso (specie ad uova libere e specie ad uova agglutinate) l'agglutinazione in misura accentuata porta inoltre ad una particolare degenerazione dell'uovo; esso, difatti, nel giro di poche ore dalla emissione, dissecca, l'ovoplasma coagula, diventando pastoso, indi duro e fragile, quasi si vetrificasse. Tale carattere, anche senza la conferma di speciali indagini, depone per una imperfezione del corion, che è notevolmente permeabile ai liquidi interni, i quali evaporano.

In terzo luogo, è uopo citare una anomalia rilevante di molte uova non fecondate, la quale consiste nella loro dimensione ridotta. Per vero, nelle ovature di vergini *feconde* si nota sovente una differenza di grandezza tra le singole unità; ma, finchè questa differenza si mantiene entro limiti modesti, la segmentazione ha luogo. In caso diverso l'uovo degenera senza fare alcun tentativo di sviluppo. Talora, in tutta la deposizione o parte di essa, le uova sono piccolissime, vale a dire il diametro è inferiore alla metà ed anche ad un terzo del normale. Questo è un carattere frequentissimo nelle uova di vergini *fertili*. Allora, esse si presentano anche fortemente agglutinate, non si segmentano affatto e degenerano rapidissimamente, cioè induriscono, come abbiamo cennato nel punto precedente.

Per completare questo quadro sintetico, diremo fugacemente di due altri tipi di deposizione.

Talvolta la femmina vergine dall'ostio genitale emette e chiude in un bozzolo, soltanto un piccolo corpo omogeneo, nel quale si possono riconoscere pochissime uova, completamente fuse insieme, in modo da non avere limite proprio.

(14) Su tale argomento ritorneremo nel lavoro di cui alla precedente Nota.

In altri casi invece espelle una gocciola di sostanza, che immediatamente coagula, dando un granulo sferico o amorfo, d'aspetto vitreo o calcareo o farinoso [15], nel quale non si vede traccia di sostanza ovoplasmatica.

Per concludere questo argomento non è superfluo insistere sul fatto che, qualora le uova vergini siano affette da una, o più, delle anomalie accennate, esse non iniziano i processi embriogenetici. Affinchè l'inizio avvenga, è necessario insomma che le uova siano perfettamente normali. Ecco perchè la partenogenesi si riscontra solo nelle vergini *feconde* (le cui uova di solito sono normali) e mai nelle *fertili* (le cui uova non sono mai normali).

6. Partenogenesi costante-incompleta. – I dati, ora forniti, dimostrano, secondo me, legittima l'affermazione, fatta già in miei precedenti lavori, che le uova vergini, nelle quali manca ogni segno di sviluppo, sono *sempre* difettose e quindi non si sarebbero sviluppate, anche se fossero state fecondate. È vero che le anomalie, riscontrate in esse, presumibilmente vanno poste a carico delle condizioni, che il mancato accoppiamento determinò nell'economia organica della fattrice; sta di fatto, tuttavia, che allorchè le uova nascono *manifestamente* normali, fecondate o no, iniziano subito i processi embriogenetici. Tenendo presente questo, il tipo riscontrato nei Ragni merita la denominazione di *partenogenesi costante*, dando a tale termine significato identico a quello di « partenogenesi obbligatoria », anche se tutti i casi fino ad ora descritti sotto questo ultimo termine si riferiscono, che io sappia, a partenogenesi *completa*, cioè non rudimentale. E poichè di tutti i casi di *partenogenesi rudimentale*, a me noti attraverso lo studio della letteratura specifica, nessuno nello stesso tempo merita il titolo di *costante*, quella dei Ragni pare realmente costituisca una varietà a sè, come cercherò di dimostrare più diffusamente in una Nota successiva.

Biologia. — *Ulteriori annotazioni biologiche sulla «Callianassa laticauda» parassitata dalla «Jone thoracica»*. Nota di G. Reverberi [1] presentata [2] dal Corrisp. G. Cotronei.

Alla fine di una sistematica raccolta di materiale normale e parassitato, io concludevo le mie ricerche del 1943 [3] sulla *Callianassa laticauda* con questi dati:

1° La proporzione dei sessi in una popolazione di individui normali di diverse grandezze e raccolti in diverse epoche dell'anno, è in ragione

(15) Altrove ne discuteremo l'origine, bastandoci, ai fini del presente lavoro, di aver fatto menzione del fenomeno.

(1) Centro di Studio per la Biologia del Consiglio Nazionale delle Ricerche presso la Stazione Zoologica di Napoli.

(2) Nella seduta dell'8 marzo 1947.

(3) G. Reverberi, 1943. *Sul significato della «castrazione parassitaria». La trasformazione del sesso nei Crostacei parassitati da Bopiridi e da Rizocefali.* « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », vol. 19, p. 225.

di 53,90 °/₀ per le femmine e 46,10 °/₀ per i maschi: una più alta percentuale di femmine trovandosi negli individui di maggiori dimensioni (determinazione su 3026 individui: 1632 femmine e 1394 maschi).

2° La proporzione dei sessi in un gruppo di individui *parassitati* da *Jone thoracica* ADULTA, anch'essi di diverse grandezze (a partire dalla lunghezza di 28 mm. al di sotto della quale non sono stati mai riscontrati individui parassitati) e raccolti in diversi periodi dell'anno, è di 67,66 °/₀ per le femmine e di 32,34 °/₀ per i maschi (201 esemplari: 136 femmine e 65 maschi).

3° La proporzione dei sessi in un piccolo gruppo di Callianasse portatrici di parassita ancora LARVALE o GIOVANILE, e cioè parassitate o da pochi giorni o da qualche mese, è di 44,44 °/₀ per le femmine e di 55,56 °/₀ per i maschi (27 individui: 15 maschi e 12 femmine).

Dopo discussione di questi dati, avanzavo l'ipotesi che il parassitismo da *Jone thoracica* induce la trasformazione del sesso in una parte della popolazione maschile: quella parte, probabilmente, che possiede una più labile costituzione sessuale. La possibilità della trasformazione del sesso da maschio a femmina nei Crostacei era già stata ottenuta sperimentalmente da me e Pitotti (4) nella *Jone thoracica*.

Il valore euristico di questi dati e la necessità di corroborarli mi hanno sospinto, ad alcuni anni di distanza, a riprendere nuovamente tali ricerche, iniziando una nuova raccolta di Callianasse *normali*, di Callianasse *parassitate da diversi anni*, e di Callianasse *da poco parassitate*, e cioè che ancora non possono essere state sessualmente modificate dalla presunta azione del parassita.

I nuovi risultati sono i seguenti:

a) Callianasse *normali* raccolte (durata della raccolta: un anno intero) = 1051. Di queste risultarono femmine 587 e maschi 464: cioè in percentuale 55,90 °/₀ femmine e 44,10 °/₀ maschi;

b) Callianasse *parassitate da diversi anni* = 103. Di queste risultarono femmine 68, maschi 35: in percentuale si ha 66,02 °/₀ femmine e 33,98 °/₀ maschi;

c) Callianasse all'*inizio dello stato di parassitismo* = 37. Di queste, 14 risultarono femmine (51,85 °/₀) e 13 maschi (48,15 °/₀).

Come si vede, tali dati riconfermano pienamente e completano i passati.

Raccogliendo ora i dati del 1943 con questi nuovi, si ottiene la tabella I (sono messe in grassetto le cifre definitive da confrontare).

Altre osservazioni che confermano, anch'esse, le precedenti, sono quelle che riguardano la natura dei fenomeni indicati col nome di « castrazione parassitaria », quelle che concernono la indipendenza dei caratteri sessuali secondari dalla condizione della gonade, e quelle che riguardano l'età in cui l'ospite viene parassitato.

(4) G. REVERBERI e M. PITOTTI, 1942. *Il ciclo biologico e la determinazione fenotipica del sesso di « Jone thoracica* MONTAGU », *Bopiride parassita di « Callianassa laticauda* OTTO ». « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », vol. 19, p. 111.

Tabella I. – *Callianassa laticauda.*

	Normali					Con *Jone th.* adulta					Con *J. th.* larvale o giov.				
	tot.	♀	%	♂	%	tot.	♀	%	♂	%	tot.	♀	%	♂	%
1943	3026	1632	53,90	1394	46,10	201	136	67,66	65	32,34	27	12	44,44	15	55,56
1946	1051	587	55,90	464	44,10	103	68	66,02	35	33,98	27	14	51,85	13	48,15
Totale	4077	2219	**54,43**	1858	**45,57**	304	204	**67,10**	100	**32,90**	54	26	**48,15**	28	**51,85**

Riguardo ai fenomeni della « castrazione parassitaria » va notato che essi possono essere prodotti da parassiti in condizione ancora giovanile, della grandezza di appena mm. 3–4: ciò vuol dire, contrariamente ad alcune teorie, che tali fenomeni non possono essere la conseguenza di una sottrazione di alimenti fatta all'ospite da parte del parassita: e raffermano la teoria già altrove sostenuta (Reverberi, 1945 (5)) che l'involuzione della gonade, o « castrazione parassitaria », è un epifenomeno, alla base del quale sta la trasformazione sessuale dell'ospite sotto l'impulso del parassita.

Riguardo a ciò che concerne l'indipendenza dei caratteri sessuali secondari dalla gonade, riferendo dai risultati di osservazioni compiute su esemplari parassitati mantenuti in acquario, può stabilirsi che le Callianasse parassitate, eseguendo la muta in settembre, come gli esemplari normali, depongono una spoglia con i pleopodi forniti abbondantemente di setole ovigere e prendono un habitus con pleopodi nudi. Ciò vuol dire che le mute si succedono, secondo la stagione, con l'aspetto estivo o invernale, provvisto, il primo, di setole ovigere, sulle quali, per altro, non verranno mai deposte le uova, sprovvisto, il secondo, delle stesse; e ciò indipendentemente dalla gonade la quale è durevolmente *sterile*.

Infine per quanto concerne l'età in cui le Callianasse sono infettate, si riconferma che essa non è mai l'epoca giovanile; per quanto abbia nuovamente osservato Callianasse giovanili (alcune centinaia) nell'epoca adatta all'infestazione (agosto), non ho mai rinvenuto tra esse alcun esemplare parassitato: Jone larvali o giovanissime sono state invece sempre rinvenute su Callianasse *adulte*, di diverse grandezze. Com'è noto, esse si impiantano dapprima sui foglietti branchiali dell'ospite, e solo dopo molto tempo (al massimo un anno), probabilmente quando si è stabilita tra la grandezza del branchiostegite e la grandezza dell'ospite un congruo rapporto, si ribaltano e si aggrappano al branchiostegite con il noto orientamento. Sui motivi per i quali vengono parassitate esclusivamente le Callianasse adulte e non quelle giovanili, non è ancora possibile dare una risposta sicura.

(5) G. Reverberi, 1945, *La determinazione del sesso nei Crostacei e i fenomeni della castrazione parassitaria.* « Rend. Ist. Lomb. Sc. Lett. Cl. Sc. », vol. 78, p. 217.

Biologia. — *Ulteriori esperimenti comprovanti l'esistenza di un centro di differenziazione e di un centro di inibizione cerebrali nel germe di Ascidie allo stadio di otto blastomeri* [1]. Nota di G. Reverberi e A. Minganti, presentata [2] dal Corrisp. G. Cotronei.

In un lavoro precedente [3] abbiamo ammesso, per spiegare i risultati dei diversi esperimenti, che nel germe delle Ascidie allo stadio di 8 blastomeri esiste un centro di differenziazione del cervello, situato nei blastomeri vegetativi anteriori, e un centro di inibizione della formazione del cervello stesso, posto nei blastomeri vegetativi posteriori: quest'ultimo nello sviluppo normale sarebbe neutralizzato dalla presenza dei blastomeri animali posteriori.

Analizzando successivamente [4], sempre col metodo sperimentale, la estensione dei poteri induttivi del centro di differenziazione, abbiamo concluso, contro alcune asserzioni (Rose, 1939 [5]), che esso non possiede le capacità di un « organizzatore » del tipo di quelle del labbro dorsale del blastoporo del germe degli Anfibi.

Senonchè, le esperienze dalle quali si deduce l'esistenza del centro di inibizione cerebrale (quartetto vegetativo + 2 bl. animali anteriori) ammettono, a rifletterci, anche un'altra spiegazione, la quale, per essere più semplice, deve essere preferita in una buona metodologia scientifica: precisamente, il mancato differenziamento del cervello può essere riferito al fatto che i due residui blastomeri animali, per la necessità di rivestire lo sproporzionato blocco di organi di origine vegetativa (endoderma, corda, muscolatura e mesenchima), sono costretti ad utilizzare tutto il materiale plasmatico in essi situato, e quindi anche il materiale cerebro-formativo.

Allo scopo di vedere quale delle due ipotesi corrisponda alla realtà, abbiamo escogitato e compiuto il seguente tipo di esperimenti: combinazione del quartetto vegetativo con 4 blastomeri animali anteriori (da un germe allo stadio 8 sono stati asportati i due bl. animali posteriori e sono stati sostituiti con i blastomeri animali anteriori di altro germe). In questa combinazione, nel germe è presente materiale epiteliale e materiale cerebrale quasi come in un germe normale. Se anche in questo caso le larve non presentano il cervello, vuol dire che la mancanza di esso non può essere dovuta

(1) Centro di Studio per la Biologia del Consiglio Nazionale delle Ricerche presso la Stazione Zoologica di Napoli.

(2) Nella seduta dell'8 marzo 1947.

(3) G. Reverberi e A. Minganti, 1946. *Fenomeni di evocazione nello sviluppo dell'uovo di Ascidie.* « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », vol. 20, p. 199.

(4) G. Reverberi e A. Minganti, 1946. *Sul centro di differenziazione del cervello, situato nei blastomeri vegetativi anteriori dell'uovo di Ascidie dello stadio 8.* Questi « Rendiconti », vol. II, p. 86.

(5) S. M. Rose, 1939. *Embryonic induction in the Ascidia.* « Biol. Bull. », vol. 77, p. 216.

altro che a un centro inibitore. In queste larve è tuttavia prevedibile la differenziazione del materiale neurale (presuntivo del midollo spinale) situato nei blastomeri vegetativi anteriori, come si ha nei germi privati dei blastomeri animali posteriori (cfr. Reverberi e Minganti [3]: tipo F).

Ugualmente si dica per le nostre esperienze in seguito alle quali noi abbiamo escluso il potere « organizzativo » ai blastomeri animali anteriori. Tali esperienze erano di due tipi: *a*) quartetto vegetativo + 2 bl. animali posteriori; *b*) 2 bl. vegetativi anteriori + 2 bl. animali posteriori. Le larve derivate da ambedue questi tipi, come descrivemmo (Reverberi e Minganti [3], [4]) non posseggono cervello.

Ciò però potrebbe essere attribuito alla stessa necessità meccanica cui abbiamo fatto cenno sopra: la necessità, cioè, di epitelializzare completamente la larva con un materiale d'impiego scarso.

A tale scopo abbiamo ideato il seguente tipo di esperimenti: combinazione di un quartetto vegetativo con 4 blastomeri animali posteriori (asportazione da un germe allo stadio 8, dei bl. animali anteriori, e loro sostituzione con i due animali posteriori prelevati da altro germe). In questa combinazione vi è una quantità di materiale ectodermico certamente equivalente a quello che vi è in un germe normale. Se anche in questo caso non si ottiene dai blastomeri animali posteriori posti *in diretta sovrapposizione sui vegetativi anteriori*, un cervello, vuol dire che ciò non è possibile, e che, dunque, i blastomeri vegetativi anteriori non hanno poteri « organizzativi ».

Vediamo, ora, i risultati che si ottengono dai due tipi di operazione.

1° *Combinazione di un quartetto vegetativo con 4 bl. animali anteriori.*

Riassumiamo schematicamente nella seguente tabella i risultati che si riferiscono a un complesso di 50 germi operati di *Ascidiella aspersa*.

Quartetto vegetativo + 4 bl. animali anteriori.

N° dei casi	Epitelio ectoderm.		Palpi			Tessuto neurale			Organi di senso	Endoderma		Corda	Mesenchima	Muscolatura	Coda mobile
	totale	parziale	1	2	3	Form. d'aspetto cerebrale	Piastre	Ammassi		Compatto	Intestino				
50	31	19	20	4	2	2?	7	6	0	16	34	50	50	50	1

Dalla tabella risulta che da questa combinazione non si hanno mai larve che posseggono cervello o organi sensoriali annessi. Le larve presen-

tano un epitelio cefalico ben differenziato, con palpi, endoderma spesso organizzato in intestino regolare, mesenchina posto in cavità tra endoderma ed epitelio e, nelle porzioni caudali, corda e muscolatura. Solo in due casi, di cui uno è probabilmente un errore di operazione, e che ci proponiamo di discutere nel lavoro in extenso, fu rinvenuta una formazione di tipo cerebrale; invece con una certa frequenza si sono differenziate piastre o masse nervose di origine vegetativa.

È, dunque, raffermata, dai risultati di questa 1ª combinazione, la certezza dell'esistenza di un centro inibitore della formazione del cervello, posto nei blastomeri vegetativi posteriori.

2° *Combinazione di un quartetto vegetativo con 4 bl. animali posteriori.*

I risultati, che si riferiscono a 48 germi operati di *Ascidiella aspersa*, sono riassunti nella seguente tabella:

Quartetto vegetativo + 4 bl. animali posteriori

N° dei casi	Epitelio ectodermico		Palpi	Tessuto neurale	Organi di senso	Endoderma		Corda	Mesenchina	Muscolatura	Coda mobile
	totale	parziale				Compatto	Intestino				
48	34	14	0	0	0	20	28	48	48	48	15

Come si vede, in gran parte dei casi l'epitelio ectodermico ha rivestito completamente le larve, le quali presentano, in complesso, una forma esteriore abbastanza normale; l'endoderma è spesso organizzato in intestino, ed è a stretto contatto con l'epitelio: ciò assicura che sono realizzate le condizioni migliori per l'esercizio di un'azione « organizzativa », qualora questa sia da attribuire, come Rose afferma, all'endoderma. Invece nessuna larva ha mai formato il cervello e gli organi di senso pigmentati, e neppure alcuna massa o accumulo di cellule neurali: l'assenza di qualunque differenziazione neurale è assoluta.

La presupposizione teorica corrisponde, dunque, ai risultati. Così per altra via resta confermato che il centro di differenziazione cerebrale, posto nei blastomeri vegetativi anteriori, non possiede la capacità di indurre la formazione del cervello a spese del presuntivo territorio epiteliale.

Biofisica. — *Sulla interazione tra semi vegetali in germinazione. - III. Interazione e velocità di germinazione*[1]. Nota di F. Bellinzaghi, presentata[2] dal socio P. Rondoni.

Abbiamo data notizia nella precedente Nota del metodo usato per la valutazione della funzione $J = f(P)$.

Esponiamo qui i risultati di successive ricerche miranti alla analisi della funzione:

$$G = f(J) \tag{1}$$

dove, ricordiamo, con J indichiamo l'interazione, con P la posizione di un seme nel germinatoio e con G la germinazione, mediante un suo dato caratteristico: la velocità, espressa come percentuale di semi germinati al tempo di germinazione medio: N_{tm}.

Essendo pertanto nelle esperienze sinora eseguite: $tm = 48^h$ possiamo scrivere in luogo della (1):

$$N_{48} = f(J) = N^J_{48} \tag{2}$$

Ricordiamo ancora che precedenti conferme sperimentali (Nota II) ci consentono di considerar valida la seguente eguaglianza:

$$^{100}N^{8}_{48} = {}^{2}N^{3,2}_{48}$$

in quanto che:

$$^{100}J^{8} = {}^{2}J^{3,2} = 5{,}958$$

Possiamo in tal modo dedurre che:

$$^{n'}N^{d'}_{48} = {}^{n''}N^{d''}_{48}$$

quando è:

$$^{n'}J^{d'} = {}^{n''}J^{d''}$$

Lo studio della (2) può pertanto esser condotto considerando il semplice caso di due individui P_0 e P, posti a distanza d, interagenti con una determinata interazione: $J = f(P)$.

La (2) può esser anche scritta:

$$N^J = N^o + n^J \tag{3}$$

in cui: $N^o = N^{d=\infty}$ è la velocità di germinazione relativa a due semi posti a distanza infinita, tra di loro interagenti con $J = 0$; n^J rappresenta l'incremento di germinazione (guadagno di germinazione) per effetto dell'interazione J.

(1) Lavoro eseguito nella Sezione biofisica dell'Istituto di Patologia Generale della Università di Milano.

(2) Nella seduta dell'11 gennaio 1947.

Per semplicità di notazione tralasciamo la scrittura dell'indice corrispondente al tempo: 48.

Come si può ricavare facilmente dalla (3), il guadagno di germinazione per una data interazione è dato dalla differenza tra la germinazione in tali condizioni ed in assenza di interazione.

È cioè:

$$n^J = N^J - N^\circ \tag{4}$$

per cui l'analisi della funzione (2) si riporta a quello della seguente:

$$n^J = f(J) \tag{5}$$

Fermandoci a considerare quest'ultima relazione non ci è difficile prevedere il tipo della funzione relativa, se si tien conto che mentre J può variare da O a ∞, n^J non potrà salire da zero oltre un determinato valore massimo: n^∞, caratteristico per ogni qualità di semi e legato a fattori ambientali.

Il campo di variabilità resta così definito:

$$0 < J < \infty$$

$$0 < n^J < n^\infty$$

Il tipo di funzione che può aderire alle suddette condizioni è la funzione esponenziale che può venir così espressa:

$$y = A\left(1 - e^{-kx}\right)$$

e nel nostro caso:

$$n^J = n\left(1 - e^{-kJ}\right) \tag{6}$$

Sostituendo tale espressione del guadagno di germinazione: n^J nella (3) si ottiene:

$$N^J = N^\circ + n\left(1 - e^{-kJ}\right) \tag{7}$$

od anche per la (4):

$$N^J = N^\circ + \left(N^\infty - N^\circ\right)\left(1 - e^{-kJ}\right) \tag{8}$$

Come si vede lo studio di questa funzione e quindi della (1) si riduce alla determinazione delle costanti che figurano nella (8) mediante i dati sperimentali, che ne confermeranno pertanto la validità.

Per un primo esame abbiamo considerato i risultati di semine sinora eseguite che ci hanno permesso di rappresentare l'andamento della funzione in oggetto mediante la seguente relazione:

$$N^J = 30{,}8 + 10{,}2\left(1 - e^{-0{,}25\,J}\right) \tag{9}$$

Il seme usato è il cavolo *Brassica oleracea* e le semine vengono effettuate con la consueta tecnica (Nota I).

Se si confrontano i valori di N^J_{48} ricavati mediante la (9) per valori di J: 0, 1, 4, ∞ con i dati d'esperienza si ottiene una buona correlazione che

vale per diversi punti intermedi sulla curva rappresentatrice della (9) sinora presi in considerazione.

Mentre per i predetti valori di J la (9) fornisce per N^J_{48} i seguenti risultati:

$$30{,}8\ ,\ 33{,}05\ ,\ 37{,}24\ ,\ 41\ ;$$

per gli stessi valori di J l'esperienza ci ha dato sinora:

$$30{,}8\ ,\ 33\ ,\ 37{,}1\ ,\ 41\ .$$

Da quanto precede si può facilmente notare come l'interazione tra i semi può accelerare la velocità di germinazione sino ad oltre il trenta per cento.

Patologia. — *Osservazioni sull'immunità nella toxoplasmosi.* Nota di E. Biocca e P. Nobrega, presentata [1] dal Corrisp. V. Puntoni.

Nel 1908 a San Paolo del Brasile, l'italiano Splendore [2] descrisse « Un nuovo protozoo parassita dei conigli, incontrato nelle lesioni anatomiche di una malattia che ricorda in molti punti il Kala-Azar dell'uomo ».

Pochi mesi dopo, in Africa, Nicolle e Manceaux [3] pubblicarono una Nota *Sur une infection à corps de Leishman (ou organisme voisin) du Gondii.*

A questo nuovo microrganismo, che per la forma un poco arcuata ricordava le semilune malariche, fu dato il nome di Toxoplasma.

Rapidamente fu dimostrata l'importanza della toxoplasmosi nella patologia veterinaria: nelle più diverse parti del mondo furono descritti casi isolati o epidemie gravissime di toxoplasmosi tra animali di specie differenti. Ricorderemo solamente che, per esempio in San Paolo, Reis e Nobrega [4] hanno osservato che il 32,8 % di tutti i colombi da loro studiati per malattie diverse, erano infetti di toxoplasmosi.

Fu tendenza iniziale di descrivere tante specie o varietà di toxoplasma, quante le specie animali in cui veniva isolato. Ricerche recenti sembrano aver definitivamente dimostrato, al contrario, che il toxoplasma degli uccelli deve essere considerato identico a quello dell'uomo e degli altri animali. Attualmente la maggiore parte degli autori è disposta a classificare il toxoplasma come un protozoo.

Una grande serie di ricercatori di paesi differenti, tra i quali sopratutto Carini [5], Arantes [6], Laveran [7], ecc., contribuirono validamente ad approfondire le nostre conoscenze della toxoplasmosi.

(1) Nella seduta dell'8 febbraio 1947.
(2) A. Splendore, « Rev. Soc. Scient. S. Paulo », *3*, 109 (1908).
(3) C. Nicolle et L. Manceaux, « C. R. Ac. Sci. », *147*, 763 (1098).
(4) J. Reis e P. Nobrega, *Trat. doenças das aves.* S. Paulo, 1936.
(5) A. Carini, « Bull. Soc. Path. Exot. », *2*, 465 (1909).
(6) B. Arantes, *These Inaugural.* Rio de Janeiro, 1914.
(7) A. Laveran, « Bull. Soc. Path. Exot. », *6*, 294 e 478 (1913).

Solo dopo alcuni anni da quando era stato identificato il toxoplasma come agente etiologico di infezioni animali, furono comunicati i primi casi sospetti di infezioni umane. Il primo, non ancora completamente documentato, sembra sia stato quello descritto da Castellani [8] a Ceylon nel 1914. Nuovi casi furono segnalati in diverse parti del mondo negli anni successivi: solamente però nell'ultimo decennio alcuni autori americani riuscirono da uomini ammalati, ad isolare e passare sugli animali il toxoplasma. I casi finora studiati si riferiscono sia ad adulti, sia a neonati, questi ultimi probabilmente ammalati per infezione congenita. Nell'uomo adulto sono stati descritti quadri clinici febbrili molto diversi, tutti di prognostico gravissimo (anemie splenomegaliche, manifestazioni esantematiche e generali sul tipo di quelle prodotte dalle rickettsie, encefaliti, meningo–encefalo–mieliti ecc.). Devono essere ricordati i lavori iniziali di Wolf, Cowen e Paige [9], di Sabin [10], di Pinkerton e Henderson [11], Cowen, Wolf e Paige [12], ecc.

Tra i neonati la malattia sembrerebbe in America relativamente più diffusa che tra gli adulti e si manifesterebbe soprattutto sotto forma di encefaliti gravissime. Va infine segnalata a parte, nella patologia oculare, la frequenza con cui recentemente in America sono stati descritti casi di corioretinite provocati da toxoplasmi (Koch, Wolf, Cowen e Paige ecc.) [13].

Dato l'interesse sempre crescente della toxoplasmosi nella patologia umana e data la gravità dell'infezione, che veniva considerata come incurabile, abbiamo intrapreso per alcuni anni in Brasile la ricerca sistematica di sostanze chemioterapiche che permettessero di combattere l'infezione.

Nel 1942, ampliando ricerche di Sabin e Warren [14], siamo riusciti a dimostrare, per la prima volta, in collaborazione con Pasqualin [15], che il sulfatiazolo e la sulfapiridina esercitano un'efficace azione terapeutica negli animali infetti di toxoplasmosi, quando siano iniettati in alte dosi e in sospensione oleosa. Pochi mesi dopo, Sabin e Warren [16] comunicavano risultati più modesti, perchè somministravano agli animali infetti il sulfatiazolo e la sulfapiridina « per os » invece che per inoculazione in sospensione oleosa. Le nostre ricerche furono riconfermate due anni dopo da Weinman e Berne [17], che ignoravano i nostri lavori.

Le quantità di sulfanilammidici necessarie per il trattamento dell'infezione sperimentale degli animali erano però tanto elevate da rendere evi-

(8) A. Castellani, « J. Trop. Med. », *17*, 113 (1914).

(9) A. Wolf, D. Cowen and B. H. Paige, « Science », *89*, 226 (1939).

(10) A. B. Sabin, « J. A. M. A. », *116*, 807 (1941).

(11) H. Pinkerton and R. G. Henderson, « J. A. M. A. », *116*, 801 (1941).

(12) D. Cowen, A. Wolf and B. H. Paige, « Arch. Neurol. Psych. Chicago », *48*, 689 (1942), cit. « J. A. M. A », *121*, 287 (1943).

(13) F. L. F. Koch, A, Wolf, D. Cowen and B. H. Paige, « Arch. Ophthalm. », *29*, I (1943), cit.; « J. A. M. A. », *121*, 1178 (1943).

(14) A. B. Sabin and J. Warren, « J. Bacter. », *41*, 80 (1940).

(15) E. Biocca e R. Pasqualin, « Arq. de Biologia », *26*, 107 (1942).

(16) A. B. Sabin and J. Warren, « Proc. Soc. Exper. Biol. and Med. », *51*, 19 (1942).

(17) D. Weinman and R. Berne, « J. A. M. A. », *124*, 6 (1944).

dente la difficoltà o addirittura la impossibilità di cura di eventuali casi umani. Per questo motivo, in collaborazione con Mingoja, abbiamo iniziato lo studio di una numerosa serie di prodotti derivati dal 4–nitro–4′–ammino e dal 4′–4′– diammino difenilsolfone [18], [19], [20], [21]. In seguito ai risultati sperimentali, nuovi prodotti erano sintetizzati con sempre maggiore attività chemioterapica.

Abbiamo così potuto dimostrare che gli acilderivati alifatici, e tra questi quelli con minor numero di atomi di carbonio (molti sintetizzati per la prima volta nel corso di queste ricerche da Mingoja [22], [23], [24]) erano i più efficaci agenti terapeutici per la cura della toxoplasmosi sperimentale degli animali.

In un recente lavoro eseguito in collaborazione con Nobrega [25] dell'Istituto Biologico di San Paolo, abbiamo ulteriormente confermato che il 4–4′–diformildiamminodifenilsolfone, il 4–nitro–4′–formilamminodifenilsolfone e il 4–4′–ditricloroacetildiamminodifenilsolfone, sono tutti fortemente attivi nel trattamento della toxoplasmosi sperimentale. Tra i sulfanilammidici, la sulfadiazina, che ancora non era stata saggiata, si è dimostrata particolarmente efficace nella cura della toxoplasmosi.

Un caso umano di infezione da toxoplasma, verificatosi in un individuo che si era contagiato autopsiando conigli infetti di toxoplasma, fu da noi trattato con iniezioni endomuscolari di sospensione oleosa di 4–nitro–4′–formilamminodifenilsolfone, avendosi la guarigione completa. (Prodotto 117M, sintetizzato per la prima volta da Mingoja durante queste ricerche). È il primo caso umano di toxoplasmosi che sia stato guarito con chemioterapici.

In seguito a queste osservazioni sembra dimostrata definitivamente la possibilità di trattamento chemioterapico di casi umani di toxoplasmosi.

Al termine dei nostri studi di chemioterapia disponevamo di alcuni animali (topini, conigli e colombi) sopravvissuti, in seguito al trattamento con diverse sostanze, all'infezione sperimentale da toxoplasma, sempre mortale nei controlli. Col desiderio di conoscere il comportamento di questi animali di fronte alla reinoculazione con toxoplasma, abbiamo reinfettato tutti gli animali sopravvissuti e abbiamo osservato come alcuni di questi, indipendentemente dalla specie animale a cui appartenevano e dal medicamento con cui erano stati trattati, morissero di toxoplasmosi contemporaneamente ai controlli, mentre altri resistessero a successive e numerose

(18) E. Biocca, « Arq. de Biologia », *27*, 7 (1943).
(19) E. Biocca, Ibid., *27*, 63 (1943).
(20) E. Biocca, Ibid., *27*, 89 (1943).
(21) E. Biocca, « Rev. Bras. de Medic. », *1*, 380 (1944).
(22) Q. Mingoja, « Arq. de Biologia », *27*, 4 (1943).
(23) Q. Mingoja e F. Berti, Ibid, *27*, 55 (1943).
(24) Q. Mingoja e F. Berti, Ibid., *28*, 84 (1944).
(25) E. Biocca e P. Nobrega, Ibid., *30*, 63 (1946).

reinoculazioni [26]. Fenomeno analogo di resistenza alle reinoculazioni avevano osservato Sabin e Warren [16] durante le esperienze di reinfezione degli animali sopravvissuti al trattamento sulfatiazolico della toxoplasmosi sperimentale.

Nelle osservazioni degli autori americani, però, tutti i topini reinoculati morirono mentre tutti i conigli sopravvissero, come se fosse esistita una differenza di comportamento riferibile alla diversa specie animale.

In conseguenza delle nostre osservazioni, invece, fummo portati a supporre che gli animali che sopravvivevano alle reinoculazioni dovevano essere quelli in cui il trattamento chemioterapico era stato insufficiente per distruggere rapidamente il virus e aveva così permesso all'organismo di reagire. Questo stato di resistenza si sarebbe dovuto determinare perciò in quegli animali trattati con piccole dosi di medicamento.

Allo scopo di ricontrollare questa nostra supposizione, abbiamo ripetuto le esperienze infettando due lotti di colombi con la stessa carica di toxoplasmi e trattando successivamente un lotto con quantità di medicamento più di tre volte minore dell'altro lotto. Gli animali sopravvissuti sono stati poi reinfettati con la stessa dose di microrganismi, per vedere se un lotto presentasse maggiore o minore resistenza dell'altro alla reinfezione.

Nel corso di queste ricerche abbiamo usato uno stipite di toxoplasma isolato da Nobrega in una epizoozia di colombi, (11° passaggio) che provocava regolarmente la morte degli animali inoculati (colombi, topini, conigli) in un periodo oscillante entro 6 e 15 giorni. Nessun animale controllo inoculato è mai sfuggito a una infezione mortale.

Centodieci colombi furono iniettati intramuscolarmente con ugual dose di materiale infettante (cm³. 0,5 di una sospensione, in cm³ 100 di soluzione fisiologica, del fegato e della milza di un colombo morto da poche ore per toxoplasmosi e con reperto ricchissimo di toxoplasma negli organi).

Dieci di questi colombi furono conservati come controlli e gli altri 100 furono divisi in due gruppi di 50 ognuno. Il primo lotto fu trattato con una dose relativamente alta di sulfadiazina (cm³ 5, nei muscoli, di una sospensione oleosa al 5 %, per 5 volte, alla distanza di 2, 5, 7, 8, 10 giorni dalla inoculazione del materiale infettante) di maniera che ogni animale ricevette complessivamente g. 1,25 di sulfadiazina. Il secondo lotto fu invece trattato con una dose molto minore di medicamento (precisamente con sole tre iniezioni di cm³ 5 di sospensione oleosa al 2,5 % praticate 4, 5 e 6 giorni dopo la infezione) ricevendo ogni animale complessivamente solo g. 0,375 di sulfadiazina, dose questa più di tre volte minore di quella somministrata ai colombi del primo lotto.

Come è possibile osservare nella tabella I, solo 5 dei colombi del primo lotto morirono nei primi 32 giorni, mentre ne morirono, nello stesso periodo di tempo, 25 del secondo lotto. La ricerca dei toxoplasmi negli organi

(26) E. Biocca, Ibid., *29*, 82 (1945).

degli animali fu negativa nei 5 morti del primo lotto e positiva in 14 su 25 del secondo lotto (27). Tutti i controlli, come sempre, morirono dentro 15 giorni dall'inoculazione infettante: in tutti fu possibile mettere in evidenza i toxoplasmi negli organi interni.

Tabella I.

COLOMBI	SULFADIAZINA (dose complessiva)	M O R T I
Lotto N° 1 (50 colombi)	g. 1,250	✠ 5. Dopo giorni 13, 21, 31, 31, 32 Toxoplasma non dimostrato in nessuno.
Lotto N° 2 (50 colombi)	g. 0,375	✠ 25. Dopo giorni 13, 13, 15, 16, 19, 19, 20, 21, 21, 21, 21, 22, 22, 23, 23, 26, 26, 26, 27, 27, 30, 32, 32, 32, 32. Toxoplasma dimostrato in 14 su 25.
Controlli (10 colombi)		✠ 10. Dopo giorni 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, Toxoplasma dimostrato in tutti.

Col fine di indagare se i colombi superstiti fossero dei portatori di toxoplasma, sacrificammo 5 animali del primo e 5 del secondo lotto e realizzammo la ricerca dei toxoplasmi negli organi, sia con l'esame microscopico diretto degli strisci di organo, sia con l'inoculazione, in colombi sani, di sospensione, in soluzione fisiologica, del fegato e della milza di questi animali sospetti. Solamente un colombo del primo lotto si rivelò portatore di toxoplasma.

Trascorsi 32 giorni dalla prima inoculazione di materiale infettante, reiniettammo tutti i colombi sopravvissuti in seguito al trattamento sulfadiazinico, con la stessa dose di toxoplasma, approssimativamente uguale a quella iniettata la prima volta (cm³ 0,5 di una sospensione, in cm³ 100 di soluzione fisiologica, del fegato e della milza di un colombo morto di toxoplasmosi).

Con questa seconda prova ci proponevamo di osservare, come abbiamo già accennato, se il lotto di animali trattato con una dose debole di sulfadiazina, sufficiente per proteggere solo il 50 % dei colombi, avesse una maggiore

(27) È di regola difficile porre in evidenza toxoplasmi negli organi di animali che muoiono nel corso del trattamento chemioterapico.

resistenza alla reinfezione, del lotto che aveva ricevuto una dose ben maggiore di sulfadiazina, dose che aveva protetto il 90 % degli animali.

Nella tabella II sono schematizzati i risultati ottenuti.

TABELLA II.

COLOMBI	REINOCULAZIONE (dopo giorni)	MORTI
Lotto N° 1 (colombi 40)	32	✠ 15. – Dopo giorni 6, 7, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 13, 13, 13, 14, 15, 18, 18. Toxoplasma dimostrato in 13 su 15.
Lotto N° 2 (Colombi 20)	32	✠ Nessuno.

Tutti i controlli, come sempre, sono morti in meno di 15 giorni, con reperto di toxoplasma negli organi.

Confermando le nostre supposizioni, il lotto di colombi che aveva ricevuto una dose di sulfadiazina molto debole, capace di proteggere solo il 50 % degli animali infettati di toxoplasma, ha sopportato perfettamente la reinoculazione di nuovi toxoplasmi: *nessuno degli animali è morto*. D'altra parte, il lotto di colombi che era stato trattato con dosi molto più elevate di sulfadiazina si è dimostrato molto meno resistente: 15 animali su 40 sono morti alla reinoculazione, il che corrisponde al 37,5 %. Quasi tutti questi colombi morti rivelavano presenza di toxoplasmi negli organi (13 colombi su 15).

Come conseguenza delle nostre osservazioni ci sembra giustificato concludere che la resistenza a nuove reinfezioni di toxoplasmi, che si determina in alcuni animali curati della toxoplasmosi con chemioterapici, è in relazione inversa alla quantità di medicamento usato nella cura dell'infezione.

Per la interpretazione di questo fatto di acquisita resistenza ci siamo domandati se possa trattarsi di una immunità nel senso classico della parola, oppure di un fenomeno di premunizione. Ma poichè nei colombi chemioterapizzati e sopravvissuti non abbiamo potuto dimostrare, ad eccezione di una volta (v. sopra) il toxoplasma vivente, propendiamo a credere che sia in giuoco una vera reazione immunitaria, la quale è stata dimostrata anche per altre infezioni protoziarie.

Le presenti osservazioni si prestano anche ad essere utilizzate per alcune applicazioni pratiche. È infatti possibile, seguendo lo schema delle nostre ricerche, ottenere in gruppi di animali debolmente trattati con chemioterapici, uno stato di resistenza verso reinoculazioni di toxoplasma, che ci

permetta di studiare con facilità: 1° se esiste differenza di resistenza verso stipiti di toxoplasma di origine differente, 2° se negli animali resi immuni in questa forma è possibile porre in evidenza eventuali fenomeni allergici della pelle o delle mucose, utilizzabili a fini diagnostici, 3° quali gli eventuali anticorpi prodotti ecc.

Tutto ciò assume maggiore interesse se si considerano le scarse conoscenze che ancor oggi possediamo sui fenomeni immunitari nella toxoplasmosi.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente comunica che martedì 12 marzo avranno luogo a Bologna solenni onoranze per il Socio scomparso SALVATORE PINCHERLE e propone che l'Accademia dia per mezzo di un telegramma la sua adesione a dette onoranze.

Il Socio Bompiani annuncia che lo stesso giorno 12 marzo sarà commemorato a Pisa il Socio TONELLI e propone che anche a detta commemorazione l'Accademia invii la sua adesione.

La Classe approva e il Presidente Castelnuovo assicura che saranno inviati senz'altro i due telegrammi.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Picone presenta in omaggio il vol. I del « Trattato di matematiche generali », fatto da lui in collaborazione con il prof. Paolo Tortorici e ne espone brevemente il contenuto.

Il Presidente Castelnuovo ringrazia il Socio Picone della presentazione e si congratula per l'opera che sarà senza dubbio di grande utilità per gli studi.

L'Accademico Segretario legge l'elenco delle Note pervenute e presenta le opere giunte in dono segnalando gli « Elementi di Geografia fisica » a cura dei Soci De Lorenzo e d'Erasmo; un opuscolo su « Niccolò Braucci da Caivano » dello stesso Socio d'Erasmo e le due Memorie, sempre del Socio d'Erasmo, su « l'Ittiofauna cretacea e gli Ittioliti cretacei del Brasile »; la Nota sul « Soleggiamento e l'umidità dei muri a cura di Massari a Talenti »; l'opuscolo del Socio Sacco su « lo Schema geologico della Calabria » un opuscolo del Socio Russo relativo allo « Sviluppo delle conoscenze sulla differenziazione sessuale » e alcune Note del Socio Silvestri.

Il Socio De Blasi presenta un fascicolo dell'Archivio di Patologia esotica pubblicato dall'Istituto di Medicina tropicale di Lisbona, ne espone brevemente il contenuto e ne rileva l'interesse e l'importanza ai fini di un cambio con le nostre pubblicazioni accademiche.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note e Memorie per l'inserzione negli « Atti Accademici » i Soci: Amaldi, Armellini, Bompiani, Bordoni, Checchia Rispoli, Cotronei, Crocco, De Blasi, Levi M. G., Natta, Onorato, Picone, Puntoni e Sergi.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

Crocco G. A., « Possibilità di un mulinello aerotermodinamico sperimentale ».

Natta G. e Agliardi N., « Adsorbimento attivato e reazioni chimiche superficiali ». Nota I.

Natta G. e Agliardi N., « Adsorbimento attivato del deuterio sull'ossido di zinco ». Nota II.

Natta G. e Agliardi N., « Adsorbimento attivato del deuterio sull'ossido di zinco ». Nota III.

Picone M., « Sulla traduzione in equazione integrale lineare di prima specie dei problemi al contorno concernenti i più generali sistemi di equazioni lineari a derivate parziali ». Nota I.

Picone M., « Sulla traduzione in equazione integrale lineare di prima specie dei problemi al contorno concernenti i più generali sistemi di equazioni lineari a derivate parziali ». Nota II.

Agliardi N., « Adsorbimento attivo di anidride solforosa ed ossigeno su di un catalizzatore a base di vanadato d'argento ». Nota IV (pres. dal Corrisp. G. Natta).

Barducci I., « Impedenza meccanica specifica dei tubi di piccola sezione » (pres. dal Socio U. Bordoni).

Bellanca A., « Sulla simmetria della manganolangbeinite » (pres. dal Corrisp. E. Onorato).

Biocca E., « Preparazione del curaro da parte degli indi Makù. Piante usate. Attività. (Regione dell'Alto Rio Negro–Amazzoni ». Nota I (pres. dal Corrisp. V. Puntoni).

Carafa M., « Risoluzione delle equazioni funzionali lineari nel campo analitico, mediante un numero finito di integrazioni » (pres. dal Socio G. Castelnuovo).

Cimino M., « Ricerche sopra l'assorbimento atmosferico della radiazione solare a Roma ». Nota II (pres. dal Socio G. Armellini).

Ferrari C., « Sulla determinazione del profilo "Ottimo" per le pale dei compressori assiali » (pres. dal Socio M. Panetti).

Fichera G., « Sull'integrazione delle equazioni dell'elasticità » (pres. dal Socio M. Picone).

Goidanich G. e Comici L., « La *Macrophomina phaseoli* (Maubl.) Ashby, diffusa come polifago parassita in Italia » (pres. dal Socio D. De Blasi).

Marcus F., « Sopra una classe di reti e di superficie, in relazione con le congruenze di rette di Waelsh » (pres. dal Socio E. Bompiani).

MAXIA C., « Sulla tettonica del M. Circeo (Lazio)» (pres. dal Corrisp. G. CHECCHIA-RISPOLI).

MONTALENTI G., « L'assetto cromosomico e l'interferenza dei chiasmi nella spermatogenesi di *Simulium equinum* L. (*Dipt. Simuliidae*) » Nota I (pres. dal Corrisp. G. COTRONEI).

MONTALENTI G. e VITAGLIANO G., « Assetto cromosomico e interferenza dei chiasmi in *Prionotropis appulum* (*Orth. Acrid*) « Nota II (pres. dal Corrisp. G. COTRONEI).

MONTALENTI G., « L'interferenza dei chiasmi oltre il centromero » Nota III (pres. dal Corrisp. G. COTRONEI).

MURA A., SALVINI G. e TAGLIAFERRI G., « Sulla presenza di una componente penetrante negli sciami della radiazione cosmica » (pres. dal Corrisp. G. POLVANI).

RIGAMONTI R., « Soluzioni solide tra ossido di rame ed ossidi di metalli bivalenti. I sistemi CuO-NiO, CUO-MgO-ZnO » (pres. dal Socio M. G. LEVI).

SACCHETTI A., « Sulla valutazione relativa del peso encefalico » (pres. dal Corrisp. S. SERGI).

STAMPACCHIA G., « Sulle condizioni che determinano gli integrali di un sistema di due equazioni differenziali ordinarie del primo ordine » (pres. dal Socio M. PICONE).

VOLTERRA E., « Sul problema generale della trave poggiata su suolo elastico ». Nota II (pres. dal Socio M. PICONE).

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta dell'8 marzo 1947

BARBERA Marco. — *Le tramontate nordiche teorie fisiche e le brillanti teorie italiane.* 4ª ed. Torino, Stab. tip. Ajani G. e Canale G., 1944. Pp. 84, in-8°, con figg.

DE LORENZO G. e D'ERASMO Geremia. — *Elementi di geografia fisica.* Napoli, Morano ed., 1947. Pp. 342, in-8°, con figg.

D'ERASMO Geremia. — *Di Niccolò Braucci da Caivano (1719–1774) e della sua opera inedita dal titolo: « Istoria naturale della Campania sotterranea ».* Napoli, Stab. tip. G. Genovese, 1941. Pp. 48, in-4°.

— *Ittioliti cretacei del Brasile,* Napoli, Stab. ind. ed. Meridionali, 1938. Pp. 44, in-4° con tavv.

— *L'ittiofauna cretacea dei dintorni di Comeno nel Carso Triestino.* Napoli, Stab. tip. G. Genovese, 1946. Pp. 136, in-4° con figg. e tavv.

GARDE H. G. — *A contribution to the war against cancer?* Based on experiments carried out in the years 1939–46. Copenhagen, Einar Munksgaard, 1947. Pp. 80, in-8°, con figg.

HUSTACHE A. — *Curculionides nouveaux du Museum de Trieste appartenant à la faune ethiopienne.* Estr. da « Atti del Museo Civico di Storia Naturale di Trieste », vol. XVI, 1945, n. 2.

MASSARI Giovanni e TALENTI Mario. — *Il soleggiamento e l'umidità dei muri.* Estr. da « Annali d'igiene », vol. LVI, 1946, n. 1.

MONTEROSSO Bruno. — *Contributo alla conoscenza dei copepodi parassiti. L'intestino di « Peroderma cylindricum Heller ».* Estr. da « Archivio Zoologico italiano », vol. XIV, 1930, fasc. 2–4.

— *Perfrigeratore per microtomo a paraffina.* Estr. da « Bollettino delle sedute dell'Accademia Gioenia, di Scienze Naturali in Catania », s. 3ª, 1941, fasc. 18.

MONTEROSSO Bruno.— *Sulla presunta unisessuparità delle ovideposizioni di « Theridion triangulifer (= Teutana triangulosa) » Wlk.* Estr. da « Bollettino delle sedute dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania », s. 3ª, 1940, fasc. 15.

PICONE Mauro e TORTORICI Paolo. — *Trattato di matematiche generali.* Vol. I. Roma, Soc. An. ed. « Studium urbis », 1947. Pp XIV–591, in 8°, con figg.

RUSSO Achille. — *Contributo allo sviluppo delle conoscenze su la differenziazione sessuale (Teoria mendeliana e teoria metabolica).* Estr. da « Memorie della Società italiana delle Scienze detta dei XL », s. 3ª, vol. XXVI, 1947.

SACCO Federico. – *Schema geologico della Calabria.* Estr. da « L'Universo », a. XXVI, 1946, n. 3.

SILVESTRI Filippo. — *Contributo alla conoscenza dei « Termitodiscinae e Cephaloplectinae (Staphylinidae, Coleoptera) » termitofili.* Estr. da « Archivio Zoologico italiano », vol. XXXI.

— *Descrizione di due specie neotropicali di Zorotypus (Insecta, Zoraptera).* Estr. da « Bollettino del Laboratorio di Entomologia agraria di Portici », vol. VII, 1946.

— *Prima nota su alcuni Termitofili dell'Indocina.* Estr. da « Bollettino del Laboratorio di Entomologia agraria di Portici », vol. VI, 1946.

SPIRITO Francesco. — *Il fenomeno della coagulazione nel sangue del circolo feto-placentare.* Siena, Tip. Nuova, 1946. Pp. 114, in-8°.

TALENTI Mario — Vedi MASSARI Giovanni.

TORTORICI Paolo. — Vedi PICONE Mauro.

U. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 12 aprile 1947

Presidenza del Socio G. CASTELNUOVO

NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sulla traduzione in equazione integrale lineare di prima specie dei problemi al contorno concernenti i sistemi di equazioni lineari a derivate parziali*(*). Nota(**) del Socio M. PICONE.

Fin dal 1927, fin da quando sorgeva, in embrione, presso la mia cattedra di Analisi infinitesimale, all'Università di Napoli, l'Istituto per le applicazioni del calcolo, ed i matematici venivano con ciò – in diretto ed organizzato contatto con le applicazioni – posti dinnanzi alla necessità di investigare nuovi problemi al contorno per sistemi di equazioni lineari a derivate parziali dei più svariati tipi (i sistemi e i problemi) e di forgiare metodi risolutivi con l'inesorabile condizione ch'essi consentissero la valutazione numerica della soluzione, mi s'impose quel punto di vista delle cose che, abbracciando, in un tutto unico, e i classici metodi dello sviluppo della soluzione in serie di soluzioni elementari e – per esempio – quelli della sua trasformata di Laplace (a quei tempi, peraltro, soltanto parziale e unidimensionale), ricerca la traduzione del problema in equazione integrale lineare di *prima specie*, anzichè di *seconda*!

Questo esclamativo sarà senza dubbio ben inteso da tutti coloro che conoscono i cospicui apporti alla teoria dei sistemi di equazioni lineari a derivate parziali dovuti alla traduzione dei relativi problemi al contorno in equazione integrale lineare di *seconda specie*, anzichè di *prima*. Gli è che quella si può conseguire, in generale e nei casi più interessanti, soltanto a patto di superare le gravi difficoltà, forse non sempre sormontabili, inerenti alla necessaria preliminare ricerca di soluzioni o di quasi-soluzioni dotate

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto nazionale per le applicazioni del calcolo.
(**) Presentata nella seduta dell'8 marzo 1947.

di opportune singolarità, e quand'anche fosse conseguita, posto che se ne ricavi il teorema di esistenza, fornirà il calcolo della soluzione allorchè se ne sappia dedurre le coordinate di Fourier rispetto ad un sistema chiuso di note funzioni, pervenendo con ciò, dunque, a questo punto, alla traduzione del problema in equazione integrale di prima specie [1].

Ora, appare molto più promettente ricercare la traduzione immediata del problema in equazione integrale di prima specie, ciò che può fornire il teorema d'unicità e il calcolo numerico della soluzione, ed anche una formola risolutiva, alla verifica della quale si può richiedere il teorema d'esistenza. È qui che le difficoltà si rivelano oggi assai gravi. Ma esse sono ben degne di richiamare l'attenzione dei più sapienti analisti, poichè si tratta di questo affascinante tema di ricerca: *Assegnate le coordinate di Fourier di una funzione rispetto ad un sistema chiuso di note funzioni, dedurne le qualità infinitesimali.*

Ebbene, la traduzione del problema in equazione integrale di prima specie è contenuta nella fondamentale formola di Green !

Questa mia veduta, pubblicata, nel modo più esplicito, nel 1940 [2], rivolta allora soltanto a problemi d'integrazione di una sola equazione lineare a derivate parziali in una sola funzione incognita, si è recentemente vieppiù affermata feconda per i cospicui risultati conseguiti in lavori compiuti nell'Istituto nazionale per le applicazioni del calcolo, ai quali ha dato un assai promettente inizio Luigi Amerio [3], subito seguìto da Aldo Ghiz-

(1) Le infinite equazioni del tipo

$$\int_{T_1} f_{n1}(x_1)\,\varphi_1(x_1)\,dx_1 + \int_{T_2} f_{n2}(x_2)\,\varphi_2(x_2)\,dx_2 + \cdots + \int_{T_p} f_{np}(x_p)\,\varphi_p(x_p)\,dx_p = c_n \qquad (n = 1, 2, \cdots),$$

che diconsi di FISCHER–RIESZ, nel vettore incognito Φ di componenti $\varphi_1(x_1), \cdots, \varphi_p(x_p)$ da definirsi, rispettivamente, nei domini $T_1, \cdots, T_p$, fornisce le coordinate di FOURIER del vettore Φ rispetto al sistema di vettori $\{F_n\}$ di assegnate componenti $f_{n1}(x_1), \cdots, f_{np}(x_p)$. Posto $f_{ni} = K_i(x_i, n)$, $c_n = f(n)$, le considerate equazioni possono riguardarsi come esprimenti che l'equazione integrale di prima specie, nel vettore incognito Φ,

$$\sum_{i=1}^{p} \int_{T_i} K_i(x_i, y)\,\varphi_i(x_i)\,dx_i = f(y),$$

deve essere verificata per y nell'insieme dei numeri naturali.

(2) M. PICONE, a) *Appunti d'Analisi superiore*, § 8 del Cap. VII, *Metodi generali risolutivi.* [Rondinella, Napoli (1940)]; b) *Nuovi metodi risolutivi per i problemi d'integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali e nuova applicazione della trasformata multipla di Laplace nel caso delle equazioni a coefficienti costanti.* [« Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino », vol. 75 (1939–40)].

(3) L. AMERIO, a) *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta_2 u - \lambda^2 u = 0$ *in un dominio di connessione qualsiasi.* [«Rendiconti dell'Istituto lombardo di Scienze e Lettere », Classe di Scienze, vol. 78 (1944–45)]; b) *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta_{2k} u = f$. [« Annali di Matematica », tomo 24 della serie IV (1945)]; c) *Sull'equazione di propagazione del calore.* [« Rendiconti di matematica e delle sue applicazioni » (Roma, 1946)]; d) *Sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico.* [« Rendiconti della classe di Scienze fisiche dell'Acc. Naz. dei Lincei », vol. I della serie VIII (1946); « Pontificia

zetti [4], con la scoperta, per i tipi di equazione considerati, di un importante teorema da riguardarsi inverso di quello espresso dalla formola di Green.

Additata a Gaetano Fichera la possibilità di estendere il procedimento di Amerio per dedurre, dal teorema di reciprocità di Betti della teoria matematica dell'elasticità [5], una vantaggiosa traduzione, dei problemi al contorno dell'elasticità tridimensionale, in equazione integrale di prima specie, egli vi è brillantemente riuscito nella Nota dal titolo: *Sull'integrazione delle equazioni dell'elasticità* che ho l'onore di presentare, nella seduta odierna, all'Accademia dei Lincei, insieme a queste tre mie [6].

In questa prima e in due successive io considererò i sistemi di p equazioni lineari a derivate parziali in p funzioni incognite di r variabili reali indipendenti, onde porre, anche per essi, i problemi che devono essere indagati per la trattazione dei relativi problemi al contorno, secondo le nuove vedute sopra esposte.

1. LA FORMOLA DI GREEN-BETTI E IL TEOREMA DI RECIPROCITÀ DI BETTI. – Sia D un assegnato dominio regolare, del quale indicheremo con $\mathfrak{F}$D la frontiera, dello spazio euclideo a r dimensioni, del cui punto generico P denoteremo con $x_1, x_2, \cdots, x_r$ le coordinate reali. Sia

$$(1) \qquad E_{hk} = \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_r \\ i_1+i_2+\cdots+i_r \leq 1+n}} a^{hk}_{i_1 i_2 \cdots i_r} \frac{\partial^{i_1+i_2+\cdots+i_r}}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \cdots \partial x_r^{i_r}},$$

un assegnato operatore differenziale a derivate parziali d'ordine $\leq 1+n$, con coefficienti $a^{hk}_{i_1 i_2 \cdots i_r}$, reali o complessi, funzioni di P, continue in D $-\mathfrak{F}$D, insieme alle derivate parziali

$$\frac{\partial^{j_1+j_2+\cdots+j_r}}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2} \cdots \partial x_r^{j_r}} a^{hk}_{i_1 i_2 \cdots i_r} \qquad (j_1 \leq i_1, j_2 \leq i_2, \cdots, j_r \leq i_r).$$

Designeremo con

$$E^*_{hk} = \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_r \\ i_1+i_2+\cdots+i_r \leq 1+n}} (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_r} \frac{\partial^{i_1+i_2+\cdots+i_r} a_{i_1 i_2 \cdots i_r}}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \cdots \partial x_r^{i_r}},$$

Academia scientiarum, Acta », vol. IX (1946); Pubblicazione n° 166 dell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo (1946)]; e) *Sur le calcul de solutions des équations linéaires aux dérivées partielles de la technique.* [« VI^e Congrés international de Mécanique appliquée », Paris (22-29 septembre 1946)].

(4) A. GHIZZETTI, *Sul metodo della trasformata parziale di Laplace a intervallo d'integrazione finito.* [Pubblicazione n° 167 dell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo (1945)].

(5) Il quale teorema non dà nulla di più della formola di GREEN per il sistema di equazioni lineari a derivate parziali che legano gli spostamenti di un corpo elastico.

(6) Suggerita la stessa via per la traduzione in equazione integrale di prima specie dei problemi al contorno per i più generali sistemi di equazioni differenziali lineari: *ordinarie*, al dott. GIOVANNI AQUARO, questi è pervenuto a tale traduzione con un lavoro in corso di pubblicazione [cfr. la Nota preventiva di questo autore: *Sull'integrazione dei sistemi di equazioni differenziali lineari ordinarie*, nel vol. I, serie VIII, dei « Rendiconti » della Classe di Scienze fisiche dell'Acc. Naz. dei Lincei (1946)].

l'operatore aggiunto di E_{hk} e porremo

$$E = \begin{pmatrix} E_{11} \cdots E_{1p} \\ \cdots\cdots\cdots \\ E_{p1} \cdots E_{pp} \end{pmatrix} \quad , \quad E^* = \begin{pmatrix} E^*_{11} \cdots E^*_{p1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ E^*_{1p} \cdots E^*_{pp} \end{pmatrix},$$

dicendo E^* la *matrice aggiunta* della matrice E e questa *autoaggiunta* se riesce $E \equiv E^*$. Se con una lettera maiuscola denoteremo un vettore a p componenti, con la lettera minuscola corrispondente munita, rispettivamente degli indici $1, 2, \cdots, p$, ne designeremo le componenti, talchè, se, per esempio, $U, U_1, U^{(1)}$ denotano vettori a p componenti, queste verranno denotate, rispettivamente, con $u_1, u_2, \cdots, u_p$; $u_{11}, u_{12}, \cdots, u_{1p}$; $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \cdots, u_p^{(1)}$. Designeremo con $\{U\}$ e $\{U\}^*$ gli aggregati dei vettori U, a p componenti, reali o complesse, funzioni, del punto $P(x_1, x_2, \cdots, x_r)$, continue in D con tutte le loro derivate parziali dei primi n ordini e in $D - \mathfrak{F}D$ con quelle d'ordine $1 + n$, per i quali, rispettivamente, i vettori $E[U]$ e $E^*[U]$, di componenti

$$E_h[U] = \sum_{k=1}^{p} E_{hk}[u_k] \quad , \quad E^*_h[U] = \sum_{k=1}^{p} E^*_{kh}[u_k] \qquad (h = 1, 2, \cdots, p),$$

sono sommabili in D. Posto $\binom{n+r}{r} - 1 = n_r$, porremo per le successive derivate parziali di un vettore U di $\{U\}$ e di $\{U\}^*$, dei primi n ordini,

$$U \equiv U^{(0)} \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial x_1} \equiv U^{(1)} \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial x_2} \equiv U^{(2)}, \cdots, \frac{\partial^n U}{\partial x_r^n} \equiv U^{(n_r)}.$$

Presi, comunque, un vettore U in $\{U\}$ e uno V in $\{U\}^*$, si ha, in ogni punto di $D - \mathfrak{F}D$,

$$U \times E^*[V] - V \times E[U] = \sum_{h=1}^{p} u_h \sum_{k=1}^{p} E^*_{kh}[v_k] - \sum_{h=1}^{p} v_h \sum_{k=1}^{p} E_{hk}[u_k] =$$

$$\sum_{h=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} (u_k E^*_{hk}[v_h] - v_h E_{hk}[u_k]),$$

e, comunque si fissi un dominio regolare T, contenuto in $D - \mathfrak{F}D$, mediante successive integrazioni per parti,

$$\int_T (u_k E^*_{hk}[v_h] - v_h E_{hk}[u_k])\, dT = \int_{\mathfrak{F}T} \sum_{i=0}^{n_r} \sum_{j=0}^{n_r} b^{ij}_{hk} u^{(i)}_k v^{(j)}_h \, d\sigma,$$

donde

$$(2) \qquad \int_T (U \times E^*[V] - V \times E[U])\, dT = \int_{\mathfrak{F}T} \sum_{h,k}^{1,p} \sum_{i,j}^{0,n_r} b^{ij}_{hk} u^{(i)}_k v^{(j)}_h \, d\sigma,$$

ove le b^{ij}_{hk} sono determinate funzioni dipendenti dai coefficienti degli operatori E_{hk} e dal dominio T, continue in ogni punto di $\mathfrak{F}D$ che non giaccia in

una varietà singolare per $\mathfrak{F}T$, limitate in $\mathfrak{F}T$. Passando al limite nella (2), per $T \to D$, si perviene alla *formola di Green-Betti*:

$$(3) \qquad \int_D (U \times E^*[V] - V \times E[U])\, dT = \int_{\mathfrak{F}D} \sum_{h,k}^{1,p} \sum_{i,j}^{0,n_r} b_{hk}^{ij}\, u_k^{(i)}\, v_h^{(j)}\, d\sigma .$$

Se la matrice E è autoaggiunta, scambiando in questa formola U con V, si deduce che deve risultare identicamente

$$\int_{\mathfrak{F}D} \sum_{h,k}^{1,p} \sum_{i,j}^{0,n_r} \left(b_{hk}^{ij} + b_{kh}^{ji}\right) u_k^{(i)}\, v_h^{(j)}\, d\sigma = 0,$$

comunque si assumano U e V in $\{U\} \equiv \{U\}^*$, onde segue che su $\mathfrak{F}T$ deve aversi $b_{hk}^{ij} + b_{kh}^{ji} = 0$ e la (3) conduce al *teorema di reciprocità di Betti* espresso dalla formola

$$(4) \qquad \int_D U \times E[V]\, dT + \int_{\mathfrak{F}D} \sum_{h,k}^{1,p} \sum_{i \leqq j}^{0,n_r} b_{hk}^{ij}\, u_k^{(j)}\, v_h^{(i)}\, d\sigma = \int_D V \times E[U]\, dT + \int_{\mathfrak{F}D} \sum_{h,k}^{1,p} \sum_{i \leqq j}^{0,n_r} b_{hk}^{ij}\, v_k^{(j)}\, u_h^{(i)}\, d\sigma .$$

2. LE MATRICI FONDAMENTALI. – Assegnato un vettore F, sommabile in D, si consideri ora il seguente sistema di p equazioni lineari a derivate parziali nelle p funzioni incognite $u_1, u_2, \cdots, u_p$, componenti di un vettore U di $\{U\}$,

$$(5) \qquad E[U] = F .$$

Per ogni vettore V di $\{U\}^*$ la (3) fornisce

$$(6) \qquad \int_D U \times E^*[V]\, dT = \int_D F \times V\, dT + \int_{\mathfrak{F}D} \sum_{h,k}^{1,p} \sum_{i,j}^{0,n_r} b_{hk}^{ij}\, u_k^{(i)}\, v_h^{(j)}\, d\sigma ,$$

onde, se immaginiamo scritta questa eguaglianza per un'infinità numerabile di vettori V_λ di $\{U\}^*$ ($\lambda = 1, 2, \cdots$), il teorema:

I. – a) *Se esiste un sistema* $\{V_\lambda\}$ ($\lambda = 1, 2, \cdots$) *di vettori di* $\{U\}^*$ *tali che il sistema* $\{E^*[V_\lambda]\}$ *sia chiuso in* $\{U\}$, *due soluzioni della* (5) *che siano coincidenti con le loro derivate parziali omonime dei primi n ordini sulla* $\mathfrak{F}D$, *coincidono in tutto* D. b) *Se si possiede un sistema* $\{V_\lambda\}$ *di vettori di* $\{U\}^*$ *tali che i vettori* $E^*[V_\lambda]$ *siano di norma sommabile in* D *e il sistema* $\{E^*[V_\lambda]\}$ *ivi hilbertianamente completo, la conoscenza sulla* $\mathfrak{F}D$, *per una soluzione* U *della* (5), *di essa e delle sue derivate parziali dei primi n ordini, determina la soluzione in tutto* D *e ne consente l'effettivo calcolo*.

Nell'ipotesi b) possiamo supporre che il sistema V_λ sia tale che il trasformato $\{E^*[V_\lambda]\}$ sia ortonormale in D, ed allora, posto $E^*[V_\lambda] = W_\lambda$, si trova, per il calcolo di $u_l(P)$ ($l = 1, 2, \cdots, p$):

$$(7) \qquad u_l(P) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \overline{w}_{\lambda l}(P) \left[\int_D F(P') \times V_\lambda(P')\, dT(P') + \int_{\mathfrak{F}D} \sum_{h,k}^{1,p} \sum_{i,j}^{0,n_r} b_{hk}^{ij}(P')\, u_k^{(i)}(P')\, v_{\lambda h}^{(j)}(P')\, d\sigma(P') \right] (7).$$

Si supponga ora, per esempio, che, per ogni fissato punto P *interno* a D, le serie

$$(8) \qquad \sum_{\lambda=1}^{\infty} \overline{w}_{\lambda l}(P)\, V_\lambda(P') \qquad (l = 1, 2, \cdots, p),$$

riescano convergenti in media in D e che, posto

$$(9) \qquad g_{lk}(P, P') = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \overline{w}_{\lambda l}(P)\, v_{\lambda k}(P'),$$

le serie seguenti, per ogni derivata parziale j^{ma} rispetto alle coordinate di P',

$$(10) \qquad \sum_{\lambda=1}^{\infty} \overline{w}_{\lambda l}(P)\, v_{\lambda k}^{(j)}(P') \qquad (l, k = 1, 2, \cdots, p\ ;\ j = 0, 1, \cdots, n_r),$$

risultino convergenti in media su $\mathfrak{F}D$, avendosi ivi quasi ovunque

$$(11) \qquad g_{lk}^{(j)}(P, P') = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \overline{w}_{\lambda l}(P)\, v_{\lambda k}^{(j)}(P');$$

si trarrà allora dalle (7)

$$(12) \qquad u_l(P) = \int_D \sum_{k=1}^{p} g_{lk}(P, P')\, f_k(P')\, dT(P') + \int_{\mathfrak{F}D} \sum_{h,k}^{1,p} \sum_{i,j}^{0,n_r} b_{hk}^{ij}(P')\, g_{lh}^{(j)}(P, P')\, u_k^{(i)}(P')\, d\sigma(P').$$

Con la matrice $((g_{lk}(P, P')))$ si ottiene, come diremo, una *matrice fondamentale competente al sistema* (5). Osserviamo che se il sistema di vettori $\{V_\lambda\}$ verifica le ipotesi del teorema I b), le verifica anche il sistema $\{V_\lambda + \Phi_\lambda\}$, Φ_λ designando un'arbitraria soluzione del sistema omogeneo $E^*[V] = 0$. Disponendo di Φ_λ si potrà ricercare, sostituendo i vettori V_λ coi $V_\lambda + \Phi_\lambda$, di realizzare le ipotesi contemplate per le serie (8) e (10), onde addivenire ad una matrice fondamentale. Osserviamo pure che se $((g_{lk}(P, P')))$ è una tale matrice, lo è pure $((g_{lk}(P, P') + \gamma_{lk}(P, P')))$, posto che $\gamma_{lk}(P, P')$ sia, per ogni indice l, la componente k^{ma} di un vettore $\Gamma_l(P, P')$, tale che, fissato comunque P in $D - \mathfrak{F}D$, sia, come funzione di P', soluzione del sistema

(7) Con $\overline{w}_{\lambda l}(P)$ designamo la funzione complessa coniugata di $w_{\lambda l}(P)$.

omogeneo $E^*[V] = 0$. Posto infatti, nella (6), $\Gamma_l(P, P')$ in luogo di V, si ottiene

$$0 = \int_D \sum_{k=1}^{p} \gamma_{lk}(P, P') f_k(P') d\tau(P') + \int_{\mathfrak{F}D} \sum_{h,k}^{1,p} \sum_{i,j}^{0,n_r} b_{hk}^{ij}(P') \gamma_{ih}^{(i)}(P, P') u_k^{(i)}(P') d\sigma(P'),$$

onde, sommando membro a membro con la (12), quanto abbiamo asserito.

Si noti la non essenzialità delle ipotesi di convergenza delle serie (8) e (10) e del verificarsi della (11). Ciò che conta, per il calcolo numerico, è la convergenza, con un opportuno procedimento di sommazione, delle serie fornenti le $u_l(P)$, per ogni punto interno a D, serie che si ottengono, da quelle, con integrazione termine a termine, rispetto al punto P', di serie da esse dedotte secondo quanto indica la (7), Introdurremo perciò sempre la serie (8), prescindendo da qualsivoglia convergenza di essa e delle (10), e dicendo che $((g_{lk}(P, P')))$ è *una matrice fondamentale competente al sistema* (5), scrivendo

$$g_{lk}(P, P') \sim \sum_{\lambda=1}^{\infty} \overline{w}_{\lambda l}(P) v_{\lambda k}(P'),$$

intenderemo soltanto significare che, per ogni punto interno a D, sussiste la (7), con un opportuno procedimento di sommazione della serie al secondo membro.

Meccanica. — *Statica dei mezzi elastici viscosi e sue applicazioni.* Nota II (*) del Corrisp. G. KRALL.

In una Nota I ho annunciati alcuni risultati non certo ortodossi della statica dei mezzi elastici viscosi. Ho segnalata l'importanza della nozione di *carico critico* o più precisamente di *moltiplicatore critico per una assegnata distribuzione di carichi*. Comincio quindi con il precisarne la definizione nello spirito delle equazioni integrali; preparo così in pari tempo l'algoritmo adatto alla soluzione dei problemi di cui qui si passa a trattare.

6. NOZIONE DI MOLTIPLICATORE CRITICO λ_{cr} PER UNA ASSEGNATA DISTRIBUZIONE DI CARICO ASSIALE. – Supponiamo che sull'asta agisca uno sforzo assiale $N = \lambda \cdot n(\xi)$ con λ fattore con le dimensioni di una forza, $n = n(\xi)$, funzione, puro numero, di ξ.

Per N costante in tutto l'intervallo $0 - L$ (caso di Eulero) si ha $n = 1$ e ogni valore del fattore λ soddisfacente la disuguaglianza, con ovvi simboli,

$$\lambda < \lambda_1 = \pi^2 \frac{E\mathfrak{J}}{L^2}$$

(*) Presentata nella seduta dell' 8 febbraio 1947.

comporta la stabilità. Il caso dell'eguaglianza è critico nel senso noto; λ_1 è un *moltiplicatore critico della distribuzione* $n = \text{cost.} = 1$. Rilevando che una tale anticipazione è fatta solo a titolo di orientamento in quanto tutto scaturirà automaticamente, supponiamo che, per una causa qualsiasi, ad esempio per l'esistenza di un carico trasversale $p(\xi)$ l'asta si infletta. Si ha allora in luogo della (5).

$$w = \int_0^L G(x\xi)\, p(\xi)\, d\xi + \lambda \int_0^L n(\xi) \frac{\partial G}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \xi}\, d\xi \tag{7}$$

Derivando rispetto ad x, posto per la rotazione ω in x,

$$\omega = \frac{\partial w}{\partial x}$$

e

$$\omega_0(x) = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^L G(x,\xi)\, p(\xi)\, d\xi = \int_0^L \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x} p(\xi)\, d\xi \tag{8}$$

la (7) diviene [1]

$$\omega(x) = \omega_0(x) + \lambda \int_0^L n(\xi) \frac{\partial^2 G}{\partial x\, \partial \xi} \omega(\xi)\, d\xi . \tag{7a}$$

La funzione

$$\Omega(x,\xi) = \frac{\partial^2 G(x\xi)}{\partial x\, \partial \xi} \tag{9}$$

è manifestamente *funzione di influenza per la rotazione* in x provocata dal momento $M = 1$ in ξ. Inutile dire che si ha in conformità con il teorema di reciprocità

$$\Omega(x,\xi) = \Omega(\xi,x) .$$

Inoltre, scelta una distribuzione di momenti $m = m(x)$, arbitraria salvo ad esser a quadrato integrabile, ammesso che sia $n(\xi) > 0$ in ogni caso, sarà

$$\iint n(\xi) \cdot \Omega(x,\xi)\, m(x)\, m(\xi) > 0 \tag{10}$$

Tutto ciò premesso la (7a) che riscriviamo nella forma

$$\omega(x) = \omega_0(x) + \lambda \int_0^L n(\xi)\, \Omega(x,\xi)\, \omega(\xi)\, d\xi \tag{7b}$$

può esser caratterizzata come *equazione integrale* del tipo di Fredholm di 2ª specie, non omogenea a *nucleo polare* (per l'esistenza di $n(\xi) > 0$) simmetrico positivo definito secondo Hilbert–Schmidt come prova la (10). In

(1) Cfr. cit. (6) della Nota I, fasc. 3, 1947.

riguardo alla (7 *b*) possiamo fare affermazioni notevoli sulle sue soluzioni. Precisamente, preso riferimento all'equazione omogenea

$$\omega(x) = \lambda \int_0^L n(\xi)\,\Omega(x,\xi)\,\omega(\xi)\,d\xi \tag{7 c}$$

che si ottiene annullando ω_0 (termine noto), si ha:

a) esistenza di infinite soluzioni $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\varrho, \cdots$; diverse da zero corrispondentemente ad infiniti valori $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\varrho, \cdots$; di λ. Esse soddisfano la proprietà di ortonormalità

$$\int_0^L n(\xi)\,\omega_\varrho(\xi)\,\omega_\tau(\xi)\,d\xi = \begin{cases} 1 & \text{per } \varrho = \tau, \\ 0 & \text{per } \varrho \neq \tau. \end{cases} \tag{11}$$

b) esistenza di soluzioni stabili per $\omega_0(x) \neq 0$ purchè $\lambda < \lambda_1$, questa condizione può venir meno quando sia ω_0 ortogonale alla ω_1 secondo la (11), $\lambda_1 \cdot n(x)$ costituisce la distribuzione critica di carico.

Per $n(x) = 1$ si ha per l'asta semplicemente appoggiata

$$\lambda_1 = \pi^2 \frac{E\mathfrak{J}}{L^2} \tag{12}$$

e per i successivi valori λ_ϱ,

$$\lambda_\varrho = \varrho^2 \pi^2 \frac{E\mathfrak{J}}{L^2} \qquad (\varrho = 2, 3, \cdots;) \tag{12 a}$$

Per le ω_ϱ, si ha

$$\omega_\varrho = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \frac{n\pi}{L} x.$$

La soluzione della (7 *b*) si ricava sfruttando le ω_ϱ. Posto infatti

$$\omega_0 = \sum_\varrho \gamma_\varrho^{(0)} \omega_\varrho \tag{13}$$

con $\gamma_\varrho^{(0)}$ coefficenti noti calcolati alla Fourier secondo la

$$\gamma_\varrho^{(0)} = \int_0^L n\,\omega_0\,\omega_\varrho\,dx, \tag{14}$$

si sviluppi l'incognita funzione ω pur essa in serie delle ω_ϱ

$$\omega = \sum_\varrho A_\varrho\,\omega_\varrho \tag{15}$$

incogniti essendo i coefficenti A_ϱ. Introducendo lo sviluppo (15) nella (7 *b*) si ha, tenendo presente la (7 *c*) scritta per $\lambda = \lambda_\varrho$, con che $\omega = \omega_\varrho$,

$$A_\varrho = \frac{\gamma_\varrho^{(0)}}{1 - \dfrac{\lambda}{\lambda_\varrho}}. \tag{15 a}$$

La (15) diviene in conformità

$$\omega = \sum_{\varrho} \frac{\gamma_{\varrho}^{(0)}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_{\varrho}}} \omega_{\varrho} . \tag{13 a}$$

Da quì appare che deve essere $\lambda \neq \lambda_{\varrho}$ per ogni valore di ρ. Per la stabilità si richiede inoltre che sia $\lambda < \lambda_1$.

7. Equazioni per la flessopressione nei sistemi di materiale viscoso. Metodo generale di integrazione. – Lo stesso criterio che è portato dalla (5) alla (6) conduce a generalizzare per siffatti sistemi la (6) o (7 *b*) nella equazione

$$\omega(x,t) = \omega_0(x,t) + \lambda \int_0^L n(\xi)\,\Omega(x,\xi)\,\omega(\xi,t)\,d\xi + \int_0^t \Phi(\tau)\cdot\omega_0(x,\tau)\,d\tau \tag{16}$$

$$+ \lambda \int_0^t \Phi(\tau) \int_0^L n(\xi)\,\Omega(x,\xi)\,\omega(\xi,\tau)\,d\tau\,d\xi .$$

È questa l'equazione generale delle aste presso-inflesse costruite con materiali viscosi. Si tratta di un'equazione integrale di Fredholm rispetto a x, di Volterra (molto particolarizzata, però) rispetto a t.

Per risolverla deriviamo rispetto a t. Posto $\frac{\partial}{\partial t} = (\ )^{\cdot}$ risulta

$$\dot{\omega} = \dot{\omega}_0 + \lambda \int_0^L n\,\Omega\,\dot{\omega}\,d\xi + \Phi(l)\,\omega_0 + \lambda\Phi(l) \int_0^l n\,\Omega\,\omega\,d\xi . \tag{16 a}$$

Riprendiamo lo sviluppo (15) e consideriamo i coefficenti A_{ϱ} come incognite funzioni di t. Introdotte nella (16 *a*) si ha, tenendo presenti le (1) e la (7 *c*) scritta per $\lambda = \lambda_{\varrho}$, risulta

$$A_{\varrho}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{\varrho}}\right) - A_{\varrho}\frac{\lambda}{\lambda_{\varrho}}\Phi(l) - \left(\dot{\gamma}_{\varrho}^{(0)} + \Phi(l)\,\gamma_{\varrho}^{(0)}\right) = 0 \tag{16 b}$$

ovvero, posto

$$\varphi_1^{(\varrho)} = \frac{\lambda}{\lambda_{\varrho} - \lambda}\Phi(l) \quad , \quad \varphi_2^{(\varrho)} = \frac{\dot{\gamma}_{\varrho}^{(\cdot)} + \Phi(l)\,\gamma_{\varrho}^{(0)}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_{\varrho}}}$$

$$A_{\varrho} - \varphi_1^{(\varrho)} A_{\varrho} - \varphi_2^{(\varrho)} = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \cdots; \tag{16 c}$$

La soluzione di queste equazioni lineari del 1° ordine tali che

$$\sum_{\varrho} A_{\varrho}(0)\,\omega_{\varrho} = \sum_{\varrho} \frac{\gamma_{\varrho}^{0}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_{\varrho}}} \omega_{\varrho} = \omega(0)$$

ssendo $\omega(0)$ la configurazione iniziale (per $\tau = t = 0$) data dalla (15) è,

$$17) \quad A_\varrho(t) = \frac{\gamma_\varrho^{(0)}}{1-\varkappa_\varrho}\left\{1 + \frac{1}{\varkappa_\varrho}\left(e^{-\alpha\frac{\varkappa_\varrho}{1-\varkappa_\varrho}(e^{-t}-1)} - 1\right)\right\}, \quad \varkappa_\varrho = \frac{\lambda}{\lambda_\varrho},$$

Noto il coefficente $A_\varrho(t)$ l'originaria posizione (15), cioè

$$17\,a) \qquad \omega(x,t) = \sum_\varrho A_\varrho(t)\,\omega_\varrho(x)$$

orge la soluzione della (16 *a*), che in $t = 0$ si identifica con la soluzione tatica ordinaria (13 *a*). Da questa si ha, derivando rispetto ad x, la curvatura in ogni punto x e quindi i momenti flettenti.

Dalle rotazioni, per integrazione, si calcola la linea elastica $w(x)$. In onformità con le (17) (17 *a*) si è portati a scrivere limitatamente al 1° termine, elazioni analoghe per gli spostamenti w ed i momenti m. Chiamati con w_0 d m_0 i valori dovuti alla sola flessione, si ha, tralasciando la scrittura di ermini correttivi,

$$18) \quad w \simeq \left\{1 + \frac{1}{\varkappa_1}\left(e^{\alpha\frac{\varkappa_1}{1-\varkappa_1}(e^{-t}-1)} - 1\right)\right\}\frac{w_0}{1-\varkappa_1}$$

$$m \simeq \left\{1 + \frac{1}{\varkappa_1}\left(e^{\alpha\frac{\varkappa_1}{1-\varkappa_1}(e^{-t}-1)} - 1\right)\right\}\frac{m_0}{1-\varkappa_1}.$$

Per $\alpha = 0$ (assenza di viscosità) seguono le relazioni notissime, del Timoshenko,

$$18\,a) \qquad w \simeq \frac{w_0}{1-\varkappa_1}, \quad m \simeq \frac{m_0}{1-\varkappa_1}.$$

OSSERVAZIONE. – Dunque, la viscosità è sempre pericolosa quando si anno sforzi assiali; per attenuarla occorre far piccolo $\varkappa_1$ quindi, poichè λ quel che è, grande λ_1 cioè il minimo tra i *moltiplicatori che renderebbero ritica* la distribuzione di sforzi assiali che cimentano la struttura.

Perciò un arco incastrato teme assai meno la viscosità che non un arco 3 cerniere che, a parità di condizioni, ha un λ_1 di molto inferiore. Meglio ncora se l'arco incastrato è del tipo solidale con i timpani, di cui esempio pecifico è il ponte del Risorgimento sul Tevere a Roma così felicemente ntuito da Hennebique.

Questo svantaggio degli archi a 3 cerniere fu già riconosciuto dal Dischinger [2] che pur fu assertore assieme con Mörsch, Geckeler ed altri, di tutta una molto seguìta tendenza proprio per gli archi staticamente determinati (3 cerniere).

8. CEDIMENTI NON ELASTICI DEI VINCOLI. – Consideriamo il caso notevole di un vincolo sovrabbondante che cede con legge assegnata nel tempo.

(2) FR. DISCHINGER, *Untersuchung über die Knicksicherheit, el. Verformung w. Kriechen bei Bogenbrücken, Bauingenieur.*, pp. 487–320, 539–552, 595–621 (1937).

Fissiamo l'attenzione sull'asta appoggiata agli estremi con un appoggio intermedio nel punto $x = \xi_0$.

Se l'appoggio cede di una quantità Δ, si generano sforzi corrispondenti ad una forza Y_0, applicata sulla trave senza quel tale appoggio, tale che

$$Y_0 G(\xi_0, \xi_0) = \Delta$$

quindi

$$Y_0 = \frac{\Delta}{G(\xi_0, \xi_0)}. \tag{19}$$

Sin qui nulla è da osservare.

Ma supponiamo che un cedimento Δ, relativo alla congiungente rettilinea dei 2 appoggi di estremità, si inizi ad esempio dal disarmo, quindi all'istante $\tau = t = 0$ e prosegua con legge assegnata $\Delta = \Delta(t)$ che preciseremo nella forma

$$\Delta = \Delta_0 (1 - e^{-\mu t}). \tag{20}$$

Allora, anche la reazione dell'appoggio sarà funzione $Y = Y(t)$ di t e dovrà essere con il solito significato di Φ, posto $G(\xi_0, \xi_0) = \delta_0$,

$$Y(t)\,\delta_0 + \int_0^t Y(\tau)\,\delta_0\,\Phi(\tau)\,d\tau = \Delta(t), \tag{21}$$

ovvero, con una derivazione rispetto a t,

$$\dot{Y}\delta_0 + Y\delta_0\,\Phi(t) - \dot{\Delta}(t) = 0. \tag{22}$$

Per $\mu = 1$,

$$Y(t) = \frac{\Delta_0}{\delta_0}\frac{1}{\alpha}\left\{1 - e^{-\alpha(1-e^{-t})}\right\}, \tag{23}$$

Per $t \to \infty$

$$Y(\infty) = \frac{\Delta_0}{\delta_0}\frac{1}{\alpha}\left\{1 - e^{-\alpha}\right\}.$$

Dunque, nel caso particolare considerato, gli sforzi addittivi dovuti ad un cedimento non elastico del vincolo intermedio di un sistema in materiale viscoso si calcolano moltiplicando per $\frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha}$ i valori desunti in via ordinaria. Se il sistema è giovane, come si vede, poichè $\alpha \simeq 3$, riesce ad adattarsi.

9. Dispersione viscosa di una distorsione di Volterra. – Le distorsioni applicate agli archi costituiscono una ricercatezza costruttiva magnificata da molti progettisti. Secondo Guidi, l'unica distorsione utile negli archi è quella data in chiave, generalmente non tanto per i suoi effetti

distorcenti quanto per disarmare nel modo più brillante e sicuro un ponte di notevoli dimensioni.

Si tratta di far vedere che, al solito, il Maestro aveva ragione. Fissiamo l'attenzione su un sistema lineare ciclico, un anello ad esempio. Un momento distorcente $M = 1$ provochi una rotazione ω_0 delle 2 facce ottenute con un taglio e cernierate su un asse opportuno trasversale al piano di figura. Un momento $\mathfrak{M}$ provocherà una rotazione $\Delta\omega$, e viceversa, data da

$$\mathfrak{M}\omega_0 = \Delta\omega .$$

Se il materiale è viscoso varrà invece l'equazione

$$\mathfrak{M}\omega_0 + \omega_0 \int_0^t \mathfrak{M}\Phi\, d\tau = \Delta\omega \tag{24}$$

e quindi, fissata la $\Delta\omega$,

$$\mathfrak{M} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} e^{-\alpha(e^{-t_1} - e^{-t})} \quad , \quad (t \geq t_1) \tag{25}$$

Per $t \to \infty$ si ha

$$\mathfrak{M} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} e^{-\alpha e^{-t_1}} \tag{25 a}$$

e per $t_1 = 0$ (beton giovanissimo)

$$\mathfrak{M} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} e^{-\alpha}. \tag{25 b}$$

Non occorre altro per rilevare come, per esser sempre $\alpha > 2$ (salvo particolarissimi accorgimenti nella confezione del calcestruzzo, su cui praticamente non si può soffermarsi), l'effetto della distorsione va dissolvendosi con il tempo. In ogni caso può esser talvolta utile considerarla istessamente per aiutare provvisoriamente il sistema nei suoi anni giovani.

Il ritiro implica notoriamente una distorsione; per quanto precede, questa si attenua fortemente e favorevolmente; le distorsioni di ritiro sono sempre preoccupanti per i sistemi rigidi, proprio quelli per i quali è elevato lo spettro critico λ_ρ ($\rho = 1, 2, \cdots$;). Ma il ritiro ha luogo quando il materiale è giovane e quindi viscoso sicchè tutto va per il meglio [3].

(3) Cfr. G. KRALL, *Dell'impostazione del progetto nella costruzione dei ponti.* Ed. La Bussola, Roma 1947. *Ponti in cemento armato, cosidetti arditi,* in «Tecnica Italiana», 1947, fasc. 1.

Astronomia. — *Moto dei satelliti attorno al Sole.* – Parte II. *Concavità o convessità della traiettoria verso il Sole.* Nota (*) del Socio G. Silva.

4. Per distinguere il tipo [*a*] della traiettoria descritta da un satellite attorno al Sole dagli altri due tipi, conviene ricorrere ad una espressione il cui segno dipenda dall'essere la traiettoria concava o convessa verso il Sole. A questo scopo ho dato altrove (1) la definizione di curvatura di una linea sghemba relativa a un punto dato o a una data direzione. Se si indica con Q il punto della linea, con S il punto dato, con $\mathbf{M}$ il versore di S — Q, o più generalmente di una direzione orientata comunque definita, con k la prima curvatura in Q, con $\boldsymbol{n}$ il versore della normale principale orientata verso il centro di curvatura, la curvatura K della linea, relativa al punto S o alla direzione $\mathbf{M}$, nel punto Q, è definita dalla relazione

$$(13_1) \qquad K = k\,\boldsymbol{n}\times\mathbf{M}$$

ed evidentemente essa è positiva o negativa, a seconda che la linea è concava o convessa verso S o, in generale, nella direzione $\mathbf{M}$.

Rappresentiamo con apici le derivazioni rispetto al parametro al quale è riferita l'equazione della linea (tempo t nel caso attuale) e indichiamo con V ed A i moduli di Q′ (velocità) e di Q″ (accelerazione), con $\boldsymbol{t}$ ed $\boldsymbol{a}$ i loro versori, con $A_t = dV/dt$ e con $A_n = V^2 k$ le componenti dell'accelerazione secondo la tangente e la normale principale, ed infine con $\boldsymbol{b}$ il versore della binormale. Il formulario seguente dimostra il modo di giungere all'espressione vettoriale finale della curvatura K relativa alla direzione $\mathbf{M}$ e dà la serie dei vettori di cui si devono calcolare successivamente le componenti per giungere al valore numerico di K.

$$Q' = V\boldsymbol{t} \quad , \quad Q'' = A\,\boldsymbol{a} = A_t\boldsymbol{t} + A_n\,\boldsymbol{n},$$

$$\mathbf{U} = Q' \wedge Q'' = V A_n\,\boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{n} = V^3 k\,\boldsymbol{b},$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{U} \wedge Q' = V^4 k\,\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{t} = V^4 k\,\boldsymbol{n},$$

$$(13_2) \qquad V^4 K = \mathbf{W}\times\mathbf{M} = (Q'\times Q')(Q''\times\mathbf{M}) - (Q'\times Q'')(Q'\times\mathbf{M}).$$

Introducendo il vettore Q — S di modulo R e di versore — $\mathbf{M}$, si può anche scrivere

$$(13_3) \qquad RV^4 K = Q' \wedge (Q' \wedge Q'')\times(Q - S) = [(Q - S) \wedge Q'] \times [Q' \wedge Q''].$$

(*) Presentata nella seduta del 12 aprile 1947.

(1) G. Silva, *Concavità, convessità e curvatura di una linea relative a un punto dato o a una data direzione.* «Atti e Mem. Ist. Veneto», tomo CIV, parte II (1944–45); *Curvatura relativa a una data direzione o a un punto dato di una linea qualsiasi.* Questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. I (1946).

Le espressioni vettoriali (13_2), (13_3) possono facilmente ridursi ad espressioni scalari, introducendo le coordinate (5) riferite al Sole e le loro derivate prime e seconde. Si ottiene

$$(13_4)\quad \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(x'^2+y'^2+z'^2)\,K=\Sigma\, x[x'(y'y''+z'z'')-x''(y'^2+z'^2)]=$$
$$=(xx'+yy'+zz')(x'x''+y'y''+z'z'')-(x'^2+y'^2+z'^2)(xx''+yy''+zz''),$$

la sommatoria del secondo membro essendo estesa ai termini che si ottengono facendo ruotare circolarmente le lettere x, y, z.

Osserviamo qui incidentalmente che, per essere il versore $\boldsymbol{a}$ dell'accelerazione sul piano osculatore della linea, si può scrivere

$$\boldsymbol{n}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{a})+\boldsymbol{t}\cos(\boldsymbol{t},\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a},$$

da cui, moltiplicando tutti i termini internamente per $\mathbf{M}$, si ha

$$(13_5)\qquad \cos(\boldsymbol{n},\mathbf{M})\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{a})=\cos(\boldsymbol{a},\mathbf{M})-\cos(\boldsymbol{t},\mathbf{M})\cos(\boldsymbol{t},\boldsymbol{a}).$$

Poichè $\boldsymbol{a}$ ed $\boldsymbol{n}$ formano fra loro un angolo acuto, o al più un angolo retto in corrispondenza a un eventuale flesso della linea, il primo membro della (13_5) ha il segno del $\cos(\boldsymbol{n},\mathbf{M})$, che determina nel modo più diretto la concavità o la convessità della linea nella direzione $\mathbf{M}$. Le considerazioni di carattere cinematico della Mem. I, a cui si è fatto ricorso per tale determinazione, si fondano invece prevalentemente sul segno del primo termine al secondo membro della (13_5), cioè sul coseno dell'angolo fra l'accelerazione e la direzione QS; la presenza, nello stesso membro, del secondo termine sta a dimostrare la difficoltà di giungere a risultati definitivi con le esclusive considerazioni predette, tanto utili d'altra parte per la loro semplicità.

5. Benchè il calcolo numerico di K, o meglio di una qualunque delle quantità H a secondo membro delle varie relazioni (13), fatto a mezzo delle espressioni e dei suggerimenti dati alla fine del N. 2, basti a far riconoscere, con il segno del risultato, se la traiettoria è concava o convessa verso il Sole in un suo qualunque punto Q, il problema di contraddistinguere il tipo $[a]$ della traiettoria dai tipi $[b]$ e $[c]$ a mezzo dei soli elementi $a, \alpha, e, \varepsilon, i$, lasciando arbitrariamente variabili gli altri tre w, ω, t_0, potrà dirsi completamente risolto soltanto quando siano trovate condizioni necessarie e sufficienti, analoghe alle condizioni necessarie (3) e (4), o coincidenti con esse, che permettano di assicurare che la traiettoria non può mai, o deve sempre essere del tipo $[a]$.

Dal punto di vista teorico, l'introduzione della curvatura K relativa ad S e delle corrispondenti grandezze H rende molto semplice anche tale soluzione generale. Basta infatti ricorrere ad un procedimento del tutto analogo a quello indicato al N. 3 della Parte I di questa Nota per la grandezza G, e cioè basta:

1° risolvere le equazioni

$$(14)\qquad \frac{\partial H}{\partial v}=0\ ,\quad \frac{\partial H}{\partial \varphi}=0\ ,\quad \frac{\partial H}{\partial w}=0\ ,\quad \frac{\partial H}{\partial \omega}=0\ ;$$

2° verificare quali delle soluzioni trovate soddisfano la diseguaglianza

$$(15) \qquad \frac{d^2 H}{dt^2} = \frac{\partial^2 H}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + 2\,\frac{\partial^2 H}{\partial v\,\partial \varphi}\,\frac{dv}{dt}\,\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi^2}\left(\frac{d\varphi}{dt^2}\right) > 0;$$

3° calcolare in corrispondenza ad esse le espressioni dei minimi H_m, rispetto al tempo, di H;

4° riconoscere fra queste espressioni quella che assume il più grande valore $H_{m\cdot M}$ ed il più piccolo $H_{m\cdot m}$. Le diseguaglianze

$$(3') \qquad H_{m\cdot M} < 0, \qquad (4') \qquad H_{m\cdot m} > 0$$

sono allora le condizioni necessarie e sufficienti cercate.

Anche in questo caso ragioni di simmetria dimostrano che, nelle circostanze particolari dei § 7, § 8 della Mem. I, le (14) sono soddisfatte, e le corrispondenti considerazioni di carattere cinematico avvalorano la convinzione che alle circostanze suddette corrispondano effettivamente i valori $H_{m\cdot M}$, $H_{m\cdot m}$ sopra definiti, ma il fatto non è dimostrato rigorosamente ed è inoltre possibile – e l'esempio del N. 7 ne sarà una prova irrecusabile – che una stessa funzione, minima per eccentricità limitate, possa divenire massima per eccentricità notevoli, assumendo invece il valore minimo in circostanze che ben difficilmente si possono prevedere finchè si considerano eccentricità molto piccole.

6. Dal punto di vista pratico, sfortunatamente, il procedimento indicato al numero precedente, è assai complesso e già nella Mem. I ho ritenuto preferibile rinunciare alla massima generalità del problema dimostrando che la diseguaglianza.

$$(16) \qquad \frac{n^2}{\nu^2} < \frac{\alpha}{a}\,\frac{(1-e)^2}{(1+\varepsilon)^2}\,|\cos i|,$$

che può sostituire la (3) quando in questa si trascuri il massimo valore del rapporto ρ/r di fronte all'unità, è condizione non soltanto necessaria, ma anche sufficiente per assicurare che la linea descritta dalla proiezione Q_1 del satellite sul piano dell'orbita del pianeta, diviene convessa verso il Sole a tutte le congiunzioni, e quindi che essa non può mai essere del tipo [*a*].

Similmente, la diseguaglianza (4) è condizione necessaria e sufficiente perchè la medesima linea, certamente concava verso il Sole quando Q e Q_1 sono a questo in opposizione, sia pure concava verso il Sole ad ogni congiunzione. Il problema di contraddistinguere il tipo [*a*] della traiettoria dagli altri due tipi, semplificato con la sostituzione della traiettoria di Q_1 a quella di Q, può ritenersi così raggiunto con le (16) e (4), purchè si possa escludere la possibilità che fra un'opposizione e la congiunzione successiva, o viceversa, la traiettoria possa da concava divenire convessa e ritornare concava.

Questo tipo singolare di traiettoria dovrebbe presentare, fra le due sizigie consecutive, o due punti di stazionarietà, o un punto di stazionarietà e uno di flesso, o due punti di flesso. I primi due casi sono senz'altro da esclu-

dere, almeno quando riferiamo la stazionarietà alla direzione PS in luogo della $Q_1 S$; infatti, ad ogni punto di stazionarietà la velocità trasversa cambia di segno, il moto dovrebbe quindi poter divenire retrogrado e di conseguenza, insieme con la diseguaglianza (4), dovrebbe valere la contraria della (2) e le due diseguaglianze darebbero allora

$$\alpha (1 - \varepsilon^2) > a (1 - e^2).$$

Ciò dimostrerebbe che il particolare raggio vettore ρ corrispondente al parametro dell'orbita del satellite supererebbe l'analogo raggio vettore r del pianeta, il che è assolutamente da escludere.

Non altrettanto può dirsi del terzo caso, quando si lasciano assumere alle eccentricità valori sufficientemente grandi, e qui vogliamo dimostrare che il terzo caso si può effettivamente presentare quando il valore dell'eccentricità dell'orbita del pianeta supera $2/3$.

7. Sia dunque verificata la (4) e supponiamo che in un particolare istante: 1° il satellite Q passi al periastro, 2° il suo raggio vettore PQ attraversi il piano dell'orbita del pianeta (a meno che non sia $i = 0$, nel quale caso esso appartiene sempre a detto piano); 3° il detto raggio vettore PQ sia normale a quest'orbita e sia orientato verso l'interno di essa. In tale istante la proiezione Q_1 coincide con Q; la velocità relativa di Q_1 nel suo moto attorno al pianeta P, quella di trascinamento, cioè la velocità di P, e quella assoluta di Q_1, nel suo moto attorno al Sole, hanno la medesima direzione ortogonale a PQ; inoltre il verso di quest'ultima velocità è, come in ogni altro punto, quello diretto, avendo già riconosciuto che, se vale la (4), deve valere anche la (2).

Nell'istante medesimo l'accelerazione relativa di Q_1 nel suo moto attorno a P ha la stessa massima intensità $A_Q = \alpha v^2/(1 - \varepsilon)^2$ del satellite Q ed è orientata secondo la $Q_1 P$, normale alla tangente di entrambe le orbite ellittiche e quindi anche a quella della traiettoria di Q_1 relativa al Sole; l'accelerazione di trascinamento, cioè l'accelerazione del pianeta, d'intensità $A_P = a^3 n^2/r^2$, forma con la detta normale $Q_1 P$ un angolo eguale a $90+\chi$, se χ è l'angolo che il raggio vettore SP del pianeta fa con la tangente all'orbita che esso descrive, sicchè l'accelerazione assoluta di Q_1, nel suo moto rispetto al Sole, ha per componente sulla normale stessa, orientata come si è supposto da Q_1 verso P,

$$A_n = A_Q - A_P \operatorname{sen} \chi. \tag{17}$$

La (4) assicura che A_Q, pur raggiungendo nel caso considerato il suo massimo valore, rimane inferiore al minimo valore di A_P, per il quale $\operatorname{sen}\chi = 1$, ma non esclude che possa superare la componente $A_P \operatorname{sen}\chi$, quando $\operatorname{sen}\chi < 1$, pur non essendo minimo A_P. Se ciò avviene, A_n è positiva, quindi la traiettoria nel punto Q_1 ha il suo centro di curvatura nella direzione orientata $Q_1 P$ e, poichè questa forma l'angolo ottuso $90+\chi$ con la direzione PS, la traiettoria di Q_1 rivolge a questa direzione la convessità.

D'altra parte, valendo la (4), essa è concava, rispetto alla medesima direzione PS, sia alla congiunzione, sia all'opposizione, tra loro contigue, che delimitano l'intervallo a cui appartiene il punto Q, e perciò tale intervallo deve contenere anche i due flessi, previsti al numero precedente.

Per riconoscere se una tale eventualità può presentarsi ricorriamo alle formole seguenti, facilmente deducibili da quelle del moto ellittico,

$$\operatorname{tang}\chi = \frac{r\,dv}{dr} = \frac{1 + e\cos v}{e\operatorname{sen} v} = \frac{a(1-e^2)}{r\,e\operatorname{sen} v} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e\operatorname{sen} u}$$

$$\operatorname{sen}\chi = \sqrt{\frac{\operatorname{tang}^2\chi}{1+\operatorname{tang}^2\chi}} = \sqrt{\frac{1-e^2}{1-e^2\cos^2 u}}$$

$$A_P = \frac{a^3 n^2}{r^2} = \frac{an^2}{(1-e\cos u)^2}$$

$$A_P \operatorname{sen}\chi = \frac{an^2\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{(1-e\cos u)^5\,(1+e\cos u)}}.$$

Il minimo di $A_P \operatorname{sen}\chi$ viene dunque raggiunto quando è massimo il prodotto sotto il segno di radice dell'ultimo denominatore e ciò avviene quando $u = 180^0$, se $e \leq 2/3$, oppure quando $e\cos u = -2/3$, se $e \geq 2/3$. Nel primo

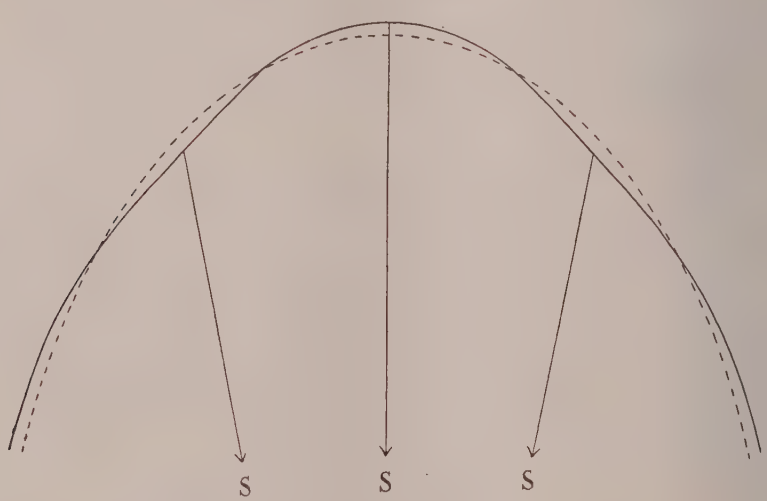


Fig. 3.

caso il minimo di $A_P \operatorname{sen}\chi$ coincide con il minimo di A_P e la condizione (4) assicura che l'espressione (17) è negativa: nel secondo caso, per $u_0 = \arccos(-2/3\,e)$, risulta

$$A_P \operatorname{sen}\chi = \left(\frac{3}{5}\right)^3 an^2\sqrt{5(1-e^2)}$$

e questo valore minimo della componente $A_P \operatorname{sen} \chi$ è minore del minimo $an^2/(1+e)^2$ di A_P. Ne viene che, se il massimo A_Q rimane compreso fra questi due minimi, la (4) rimane soddisfatta e tuttavia, risultando positiva l'espressione (17), la traiettoria di Q_1 è convessa rispetto alla direzione PS in quel punto che soddisfa alle condizioni indicate all'inizio di questo numero e che corrisponde al valore u_0 dell'anomalia eccentrica del pianeta. La fig. 3 rappresenta questo caso per $i = \varepsilon = 0$, $e = 0.8$, $\alpha/a = 1/50$, $n/\nu = 1/3.928$.

Chimica. — *Adsorbimento attivato e reazioni chimiche superficiali*(*). Nota di G. Natta e N. Agliardi, presentata(**) dal Corrisp. G. Natta.

Le relazioni che sussistono tra adsorbimento attivato e attività dei catalizzatori ci hanno indotto ad approfondire lo studio dei catalizzatori a base di ossido di zinco che presentano un comportamento specifico in molte reazioni della chimica organica sintetica.

Durante tale ricerca, si era osservato in numerose esperienze, ed in accordo con altri autori(1) che non risulta praticamente possibile con ossido di zinco di diverse provenienze ottenere curve di adsorbimento attivato dell'idrogeno in funzione del tempo che siano riproducibili, neanche ripetendo le prove sullo stesso campione di ossido di zinco dopo averne tentato la degasazione completa in identiche condizioni.

La quantità di idrogeno adsorbita in prove successive, intervallate da degasazione a temperatura più elevata, tende in generale ad aumentare, come è noto, se si eleva la temperatura sino ad un certo limite, e ciò è connesso alla natura dell'adsorbimento attivato, ma diminuisce se si confrontano prove effettuate alla stessa temperatura. Si era in un primo tempo attribuito quest'ultimo fenomeno ad un processo di cristallizzazione dell'ossido di zinco. In qualche altra esperienza invece non si è avuta una diminuzione, ma un aumento dell'idrogeno adsorbito e si sono notati comportamenti irregolari e delle anomalie nei risultati, che non possono essere attribuiti alla sola ricristallizzazione dell'ossido di zinco.

A. Nasini, F. Tetaz(2) avevano osservato che durante la degasazione fatta a temperatura di circa 370–380°, dopo prove di adsorbimento eseguite a temperatura inferiore, non si aveva un ricupero totale dell'idrogeno, e attribuivano tale mancato ricupero a formazione di acqua. Tale formazione di acqua è stata successivamente confermata anche dalle nostre misure. Si potrebbe perciò pensare che la irriproducibilità delle curve di adsorbi-

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica industriale del Politecnico di Milano e Centro studi di Chimica industriale del C. N. R.

(**) Nella seduta dell'8 marzo 1947.

(1) H. S. Taylor e collaboratori, (« Journ. Amer. Chem. Soc. », *52*, 697 (1936) e prec.; Brunauer e collaboratori, (« Journ. Amer. Chem. Soc. », *64*, 751 (1942) e prec.

(2) A. Nasini e F. Tetaz, *Comunicazioni private agli autori.*

mento sia dovuta ad una alterazione della superficie del mezzo adsorbente per reazione chimica.

Siccome secondo la termodinamica classica non risulta possibile ridurre in modo apprezzabile l'ossido di zinco con idrogeno alle temperature sopra indicate, abbiamo ritenuto interessante riprendere le esperienze attrezzandoci in modo da poter determinare sperimentalmente la quantità di acqua di reazione. Infatti le determinazioni di Nasini–Tetaz, basate solo sulla differenza tra volume di idrogeno introdotto e quello ricuperato attraverso

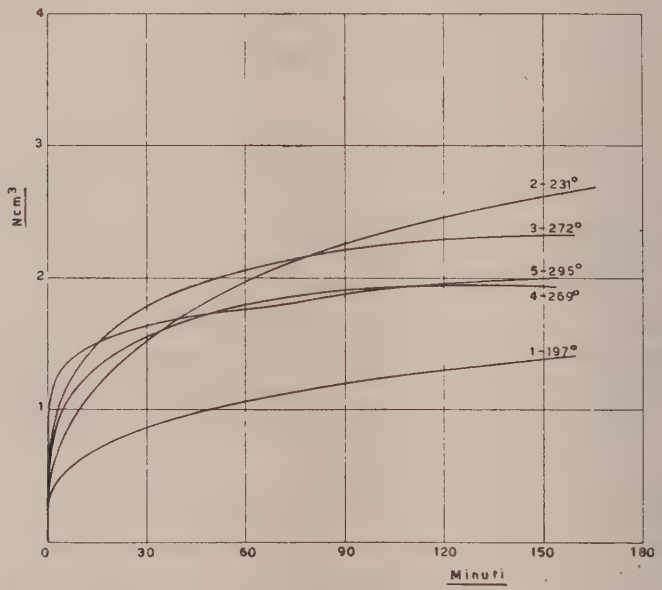


Fig. 1. Adsorbimento attivato di H_2 su ossido di zinco. Pressione: circa 280 mm Hg (i numeri che precedono la temperatura si riferiscono alla successione delle prove).

un tubo ad anidride fosforica, potrebbero fornire dati in difetto a causa di una eventuale incompleta degasazione. Si è confermato ciò nelle nostre misure sperimentali nelle quali si è effettuata la degasazione ad una temperatura più alta di quelle sperimentate da Nasini–Tetaz.

Risultati sperimentali. – In figura 1 sono riprodotte alcune curve di absorbimento in funzione del tempo, contraddistinte da numeri progressivi corrispondenti all'ordine successivo delle prove.

In alcune esperienze, e precisamente per le curve 2 e 3, si è determinata l'acqua per pesata con l'apparecchio descritto precedentemente [3] su campioni che avevano già subìto precedenti trattamenti di adsorbimento e deadsorbimento con azoto ed idrogeno puri e che non vennero mai nel

(3) N. Agliardi, « Ricerca Scientifica e Ricostruzione », *16*, 278 (1946).

frattempo a contatto con l'aria. È quindi da escludere che l'acqua formata sia dovuta a reazione con ossigeno adsorbito.

Tabella.

	Prova A	Prova B
Temp. di adsorbimento	231.5°C	272°C
Volume di gas introdotto sul catalizzatore	34.09 Ncm³	28.93 Ncm³
Volume di gas adsorbito	4.97 »	3.35 Ncm³
Durata dell'adsorbimento	86.5 ore	34.75 ore
Pressione di adsorbimento	285.5 mm Hg	250 mm Hg
Desorpzione a 231.5°C	30.33 Ncm³	(272°) 26.70 Ncm³
» a 383	31.70 »	(383°) 27.76 Ncm³
Durata della desorpzione	9.25 ore	8.75 ore
Acqua pesata espressa in Ncm³ di vapore	1.4 Ncm³	1.2 Ncm³
Totale desorbito	33.10 »	28.96 Ncm³
Gas rimasto nel catalizzatore	0.99 »	—

I valori sperimentali dei volumi di gas presentano una precisione del 0,01 Ncm³, quelli dell'acqua pesata di 0,2 Ncm³.

Si potrebbe pensare che le quantità pesate di acqua sviluppata possano risultare in difetto per eventuale non valutabile adsorbimento da parte della superficie del vetro della apparecchiatura. Ma tale causa di errore dovrebbe risultare trascurabile, poichè al ripetersi delle prove tale quantità dovrebbe mantenersi pressapoco costante.

Discussione dei risultati. – In base ai dati della letteratura [4] la costante di equilibrio $Kp = \frac{P_{H_2O}}{P_{H_2}}$ della reazione di riduzione dell'ossido di zinco con idrogeno risulta alle temperature che corrispondono ai limiti da noi considerati:

Temp.	Kp
231°	$3 \cdot 10^{-9}$
272°	$2{,}5 \cdot 10^{-8}$
383°	$3{,}7 \cdot 10^{-6}$

(4) Schackerl, « Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk », N. 255 (1938).

In base ai dati sperimentali relativi alle prove di desorpzione si calcolano invece, nella totalità del gas ricuperato (comprendendo quello contenuto come gas nella camera di adsorbimento e quello di desorpzione) dei rapporti H_2O/H_2 di $4,4 \cdot 10^{-2}$ nel caso A e di $4,3 \cdot 10^{-2}$ in quello B) che sono dell'ordine di grandezza di diecimila volte superiore a quelli teorici, pur riferendosi alla temperatura massima di desorpzione.

Questi risultati, che a prima vista sembrano in contrasto col 2° principio della termodinamica, possono essere spiegati in base a due diversi ordini di considerazioni:

1° L'equilibrio termodinamico si riferisce alla riduzione dell'ossido di zinco massivo. In un catalizzatore esistono dei centri attivi, ai quali normalmente si attribuiscono posizioni particolari sulle superficie del reticolo cristallino. Si deve ritenere che le molecole di ossido di zinco presenti nei centri attivi siano associate al reticolo cristallino in modo più blando che le molecole interne al reticolo e che quindi la loro reattività risenta delle variazioni di energia libera connesse all'energia reticolare. I valori della costante di equilibrio da noi trovati sono giustificabili ammettendo una differenza nella diminuzione di energia dell'ordine di grandezza delle 10.000 cal. per la reazione dei centri attivi con idrogeno rispetto a quella dell'ossido di zinco massivo.

Tale valore risulterebbe molto inferiore al valore del calore di sublimazione calcolato da Hüttig [5] che risulta di almeno 129.000 cal.

Sebbene riteniamo che il valore di Hüttig possa risultare errato in eccesso perchè determinato in base alla tensione di vapore a temperatura elevata (1723°K), alla quale è probabile abbia luogo una dissociazione dei vapori dello ZnO, cionondimeno si può ritenere attendibile un valore dell'ordine di grandezza delle 100.000 calorie, che dovrebbe corrispondere, essendo trascurabile il lavoro esterno, alla energia reticolare. Tale nostra supposizione venne confermata da M. Pourbaix [6] che trova nella sublimazione una quasi totale dissociazione del vapore di ZnO.

L'ipotesi che una differenza di ΔF per la reazione di riduzione di alcune specie di molecole rispetto a quelle dell'ossido massivo si possa attribuire alla presenza di molecole di ZnO non regolarmente associate al reticolo, appare quindi giustificata.

2° Si deve ammettere che sussista un equilibrio fisico tra fase gassosa e fase adsorbita, e che i rapporti tra le concentrazioni di H_2 e H_2O in fase adsorbita corrispondano in generale a valori numerici diversi della costante di equilibrio calcolata per le concentrazioni in fase gassosa. Data la maggiore adsorbibilità dell'acqua la concentrazione relativa di questa in fase adsorbita deve essere maggiore che in fase gassosa. Se si effettuasse la degasazione in modo così rapido da non consentire che si ristabilisse l'equilibrio tra la fase solida e quella gassosa, potrebbero presentarsi delle concentra-

(5) G. Hüttig., « Z. Anorg. Chem. », *207*, 273 (1932).
(6) M. Pourbaix, « Bull.Soc. Chim. Belg. », *53*, 159 (1944).

zioni di vapor acqueo in fase vapore, maggiori di quelle che corrisponderebbero all'equilibrio di riduzione dell'ossido di zinco.

Se si tien conto però che noi abbiamo effettuata la degasazione in un tempo molto lungo e che abbiamo usato nell'adsorbimento idrogeno ed ossido di zinco secchi, appare meno probabile che le alte concentrazioni di vapore siano dovute a quest'ultima causa ed appare più attendibile la prima ipotesi, che ammette una maggiore riducibilità dell'ossido attivo rispetto di quello massivo.

Ci siamo limitati in questa Nota a mettere in evidenza il fenomeno riservandoci di approfondirlo attraverso misure di desorpzione a temperature diverse ed in condizioni meglio controllate. Possiamo però già fin d'ora concludere che la riduzione dell'ossido di zinco attivo da parte dell'idrogeno può iniziarsi alla bassa temperatura in cui avviene l'adsorbimento attivato, in condizioni in cui non sarebbe possibile teoricamente in base alle note costanti di equilibrio della reazione di riduzione dell'ossido di zinco.

Chimica. — *Influenza di promotori sull'adsorbimento attivato dell'ossido di zinco.* Nota (*) di G. Natta e N. Agliardi, presentata (**) dal Corrisp. G. Natta.

L'ossido di zinco trova largo impiego, anche nell'industria, come catalizzatore in reazioni di idrogenazione (sintesi dell'alcole metilico da ossido di carbonio ed idrogeno, di alcoli superiori, ecc.) ed in reazioni di deidrogenazione (stirolo da etilbenzolo, ecc.) in tutti quei casi in cui si vogliano evitare reazioni di idrogenazione troppo intensa che portino a formazione di idrocarburi o di deidrogenazione o di piroscissione che portino a separazione di carbonio elementare.

I catalizzatori costituiti da solo ossido di zinco presentano però il grave inconveniente di possedere una attività limitata nel tempo e si è attribuito tale fenomeno alla facile ricristallizzabilità dell'ossido di zinco, favorita dalla temperatura.

Si rende perciò necessario l'impiego di catalizzatori contenenti sostanze estranee che agiscono da promotori. Sulla causa che determina l'esaltazione della attività catalitica, che si riscontra in presenza di adatti promotori, le opinioni sono diverse.

La scuola tedesca ed in particolare Mittasch, Schwab e Pietsch (1) attribuiscono l'attività dei catalizzatori misti ad un fenomeno topochimico, ossia alla presenza di particolari centri attivi costituiti dalle superficie di contatto del promotore con la sostanza base del catalizzatore. Il promotore

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica industriale del Politecnico di Milano e Centro studi di Chimica Industriale del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'8 marzo 1947.

(1) G. M. Schwab, *Katalyse von Standpunkt der chemischen Kinetik.* Akad. Verlag. 1929, *Handbuch der Katalyse.* Akad. Verlag. Gesell. 1942.

non avrebbe perciò un'azione puramente fisica di ritardare ed evitare i fenomeni di ricristallizzazione ma avrebbe un'azione diretta nei fenomeni di catalisi venendo a far parte dei centri attivi.

Tale concetto si vede sviluppato anche nella descrizione di molti brevetti su reazioni catalizzate.

Uno di noi [2] aveva invece attribuito, per il caso dell'ossido di zinco, l'azione attivante o stabilizzante dei promotori ad una causa prevalentemente meccanica.

Date le relazioni che sussistono tra attività catalitica e capacità di adsorbimento attivato, si è voluto ora esaminare il comportamento di catalizzatori attivati con ossido di cromo (che è uno dei migliori promotori per l'ossido di zinco), rispetto a quelli senza promotori, nei fenomeni di adsor-

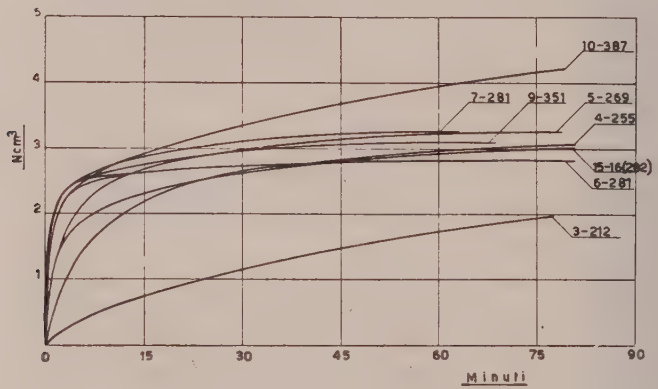


Fig. 1. – Catalizzatore A. (ZnO). – Adsorbimento attivato di H_2 a varie temperature (I numeri che precedono la temperatura di adsorbimento indicano la successione delle prove). Pressione iniziale = circa 300 mm Hg.

bimento dell'idrogeno. Nella letteratura non si hanno dati di adsorbimento su catalizzatori a base di ossido di zinco con piccole quantità di cromo. Già Taylor [3] e Garner e Kingman [4] hanno trovato per il cromito di zinco un adsorbimento di circa il 20 % superiore che con ossido di zinco puro.

Anche misure inedite di Sartori, denotano un maggiore adsorbimento dell'ossido di carbonio su di un catalizzatore misto $ZnO—MgO—Cr_2O_3$, rispetto agli ossidi puri preparati per decomposizione termica del formiato e dell'acetato di zinco.

Parte sperimentale. – Noi abbiamo esaminato 3 catalizzatori:

A) Ossido di zinco preparato per calcinazione sotto vuoto ($10^{-4} \div 10^{-5}$ mm) per alcune ore del carbonato basico di zinco. Questo ultimo è stato preparato per precipitazione di una soluzione al 20 % di solfato di zinco

(2) G. Natta, « Giorn. Chim. Ind. Appl. », *12*, 1930.
(3) H. S. Taylor e collaboratori, « Journ. Am. Chem. Soc. », *56*, 586 (1934) e prec.
(4) Garner, Kingman, « Trans. Faraday Soc. », *27*, 322 (1931).

versata in una soluzione bollente, pure al 20%, di un eccesso (4 volte molecolare) di carbonato sodico. Il precipitato è stato mantenuto per 15' all'ebollizione nelle acque madri, lasciato decantare per 14 ore, filtrato, spappolato nel doppio peso di acqua, scaldato a 80°, filtrato, ripetendo per 5 volte consecutive quest'ultima operazione di lavaggio, essiccato in stufa a 130°. Il prodotto è stato impastato con acqua, trafilato in cilindretti di mm 3 di diametro e 6 di lunghezza, essiccato a 150°.

B) Una parte del carbonato basico di zinco seccato a 130° proveniente dalla preparazione precedente, è stata macinata mescolandola con anidride cromica, impastata con poca acqua, trafilata, essiccata in stufa a 150°, ridotta per 2 ore e mezzo a 300° con idrogeno fluente, raffreddata sotto

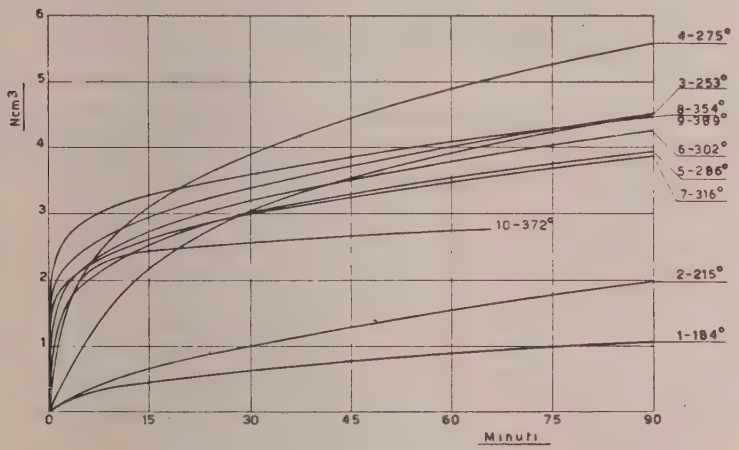


Fig. 2. – Catalizzatore B. ($ZnO + 4{,}77\ \% Cr_2O_3$). – Adsorbimento attivato di H_2 a varie temperature. Pressione iniziale = circa 300 mm Hg.

idrogeno, evacuata a 420° sotto vuoto ($10^{-4} \div 10^{-5}$ mm). Il tenore in ossido cromico (Cr_2O_3) del catalizzatore è risultato del 4,77 %.

C) Del carbonato basico di zinco, proveniente da altra preparazione identica alla precedente, è stato mescolato con minore quantità di acido cromico, operando come in *B*) Il tenore in Cr_2O_3 è risultato dell'1,26 %.

In tutte le prove si è usata la stessa quantità di catalizzatore (20 g. riferiti al carbonato basico secco) e si è usata la procedura indicata in una Nota precedente, con la differenza che le prove sono state effettuate a volume costante e pressione variabile. L'idrogeno elettrolitico impiegato è stato purificato con pirogallolo.

Nelle figg. 1, 2, 3 sono raccolti dei fasci di curve corrispondenti a prove di adsorbimento effettuate sui campioni e nelle condizioni indicate nelle corrispondenti didascalie. Il numero d'ordine delle prove corrisponde alla successione delle prove stesse. Ogni prova è stata preceduta da evacuazione a 400° per la durata di alcune ore (in media 6 ore).

Nelle figg. 4 e 5 sono indicati i volumi di idrogeno adsorbiti in funzione della temperatura e dopo diversi tempi.

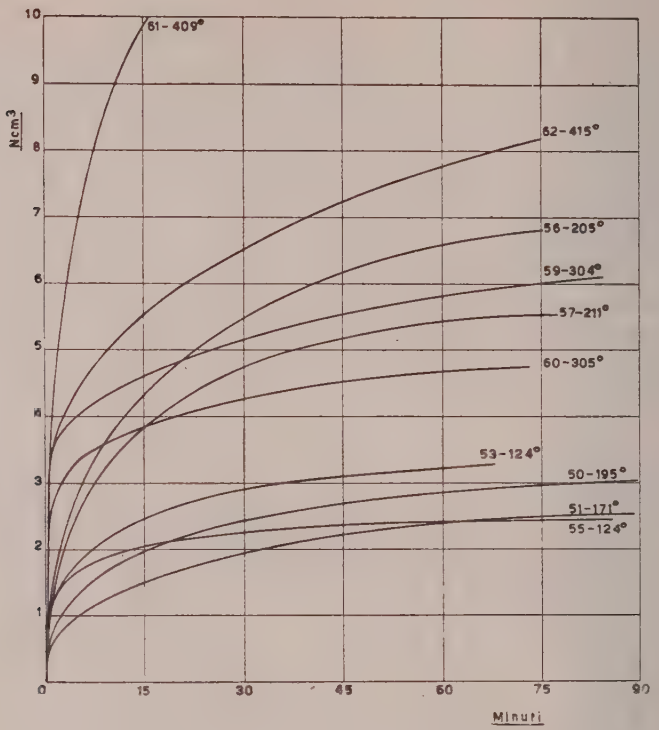


Fig. 3. – Catalizzatore C. (ZnO + 1,26 % Cr_2O_3). – Adsorbimento attivato di H_2 a varie temperature. Pressione iniziale = circa 300 mm Hg.

Discussione dei risultati. – 1° *Volume di idrogeno adsorbito in funzione della temperatura.* A parità di altre condizioni, con i catalizzatori contenenti ossido di cromo come promotore si osservano volumi maggiori di idrogeno adsorbito, che non possono venire attribuiti solo al potere adsorbente, relativamente modesto, dell'ossido di cromo.

Per quanto riguarda l'influenza della temperatura vengono confermati i risultati di Taylor e collaboratori [5] che rilevano un primo massimo nell'adsorbimento attivato tra 270 e 280°.

La presenza del 4 % di ossido di cromo come promotore non sposta apprezzabilmente la posizione del massimo, sebbene la quantità di gas adsorbito sia maggiore, a parità di altre condizioni, rispetto al catalizzatore non contenente ossido di cromo.

Anche le curve del volume adsorbito, in funzione del tempo, presentano, con il variare della temperatura, spostamenti analoghi.

Si può dedurre da queste osservazioni che i catalizzatori contenenti il promotore si comportano come se differissero da quelli che non lo contengono per una maggiore estensione della superficie adsorbente.

(5) H. S. Taylor e collaboratori, « Journ. Am. Chem. Soc. », *58*, 677)1936) e prec.

Variazione del volume adsorbito in funzione del tempo. – Tutti i tentativi da noi fatti per giungere ad una espressione matematica che rappresentasse la cinetica dell'adsorbimento attivato, non ci hanno consentito di trovare nessuna equazione che, a parte i coefficienti, potesse soddisfare le diverse curve sperimentali ottenute su di uno stesso campione di catalizzatore.

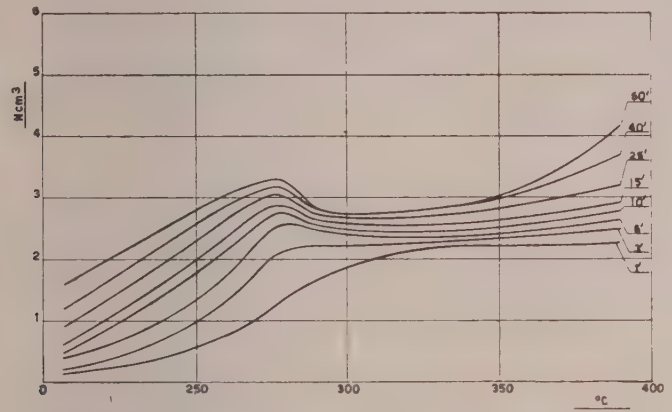


Fig. 4. – Catalizzatore A. – Adsorbimento attivato di H_2 in funzione della temperatura dopo vari tempi (in minuti).

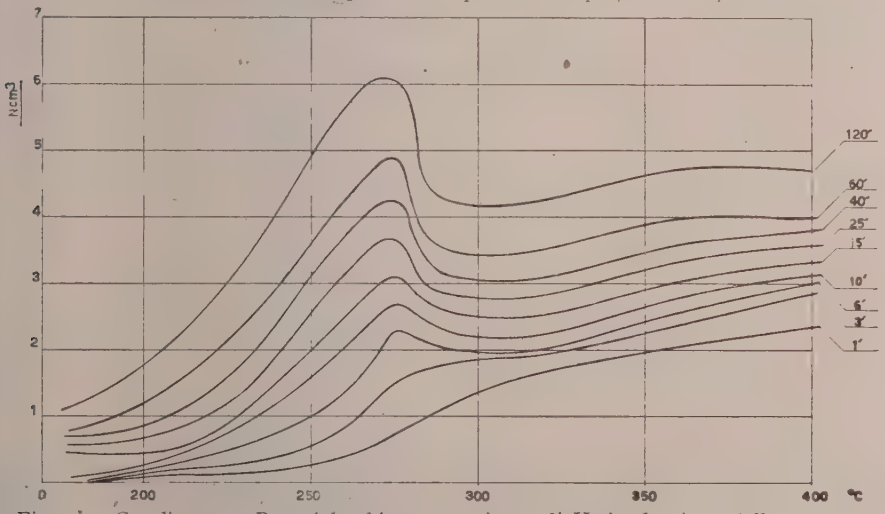


Fig. 5. – Catalizzatore B. – Adsorbimento attivato di H_2 in funzione della temperatura dopo vari tempi (in minuti).

L'equazione cinetica proposta da Sartori [6] e da questo verificata a temperatura di 430°, non risulta, in base ai nostri dati sperimentali, applicabile ai fasci di curve ottenuti a temperatura più bassa.

In qualche caso si era giunti per una determinata curva ad una equazione matemàtica soddisfacente, ma la stessa non risultava applicabile ad altre curve, pur variandone i coefficienti. Considerando solo il tratto iniziale

(6) G. SARTORI, «Gazzetta Chimica Italiana», *67*, 69, 98 (1937).

delle curve eseguite a basse temperature si ottenne un buon accordo con l'equazione:

$$\frac{dx}{dt} = K'(a - x) - K'' x$$

dove x rappresenta la quantità di idrogeno adsorbito.

Per il catalizzatore B, esprimendo x in Ncm³, t in primi, i coefficenti risultarono:

$a = 8, k' = 3{,}2 \cdot 10^{-3}, k'' = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ a 215°: un accordo ancora discreto si ha a 253° assumendo

$$a = 10, k' = 2{,}1 \cdot 10^{-2}, k'' = 2{,}22 \cdot 10^{-2}.$$

In fig. 6 sono confrontati i risultati calcolati con quelli sperimentali.

Il fatto che tale equazione, che corrisponde ad un processo reversibile di 1° ordine, non sia applicabile a temperature alte, può essere dovuto al

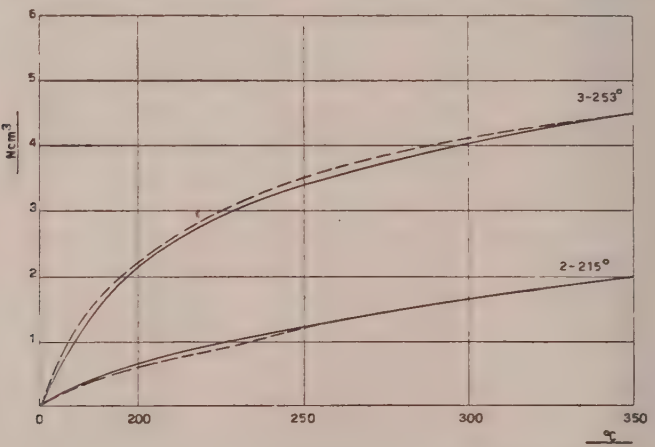


Fig. 6. – Catalizzatore B. – Confronto tra i risultati sperimentali e quelli calcolati (i numeri si riferiscono alla fig. 2).

——— valori sperimentali
- - - - - - - - - valori calcolati

sovrapporsi di un altro processo fisico di diffusione dell'idrogeno nell'interno del catalizzatore, oppure ad un processo chimico di reazione successiva. Infatti si nota un lento procedere dell'adsorbimento e non si giunge all'equilibrio neanche dopo tempi di 300 ore. Però ogni tentativo di esprimere il fenomeno con un'espressione matematica, fatto sia nell'uno che nell'altro senso non ha fornito risultati accettabili.

Nel confronto dei catalizzatori con e senza promotore possiamo considerare due tratti distinti delle curve. Il primo, a forte pendenza, corrispondente ai primi 15', il secondo a pendenza molto minore ai tempi successivi. Quest'ultimo dopo 40–50' assume un andamento quasi rettilineo.

I catalizzatori, contenenti promotore, presentano una minore pendenza nel primo tratto, maggiore nel secondo. Sembrerebbe che il promotore (per

lo meno nel nostro caso in cui esso è stato fissato alla superficie dei granuli) aumenti la superficie del catalizzatore, ma rallenti il processo di adsorbimento riferito all'unità di superficie.

Effetto dell'invecchiamento. – È noto nell'impiego industriale dei catalizzatori a base di ossido di zinco, che l'aggiunta di ossido di cromo, come promotore, ne aumenta e ne stabilizza l'attività nei riguardi dell'invecchiamento.

Sebbene le condizioni sperimentali nelle prove di adsorbimento, intercalate da periodi di desorpzione, non siano paragonabili a quella dell'impiego pratico di un catalizzatore, che lavora anche per mesi consecutivi in condizioni quasi stazionarie, cionondimeno fenomeni di invecchiamento dovrebbero apparire in entrambi i casi.

In realtà si è osservato in tutte le prove di adsorbimento, considerate in ordine successivo, sia con promotore che senza, una tendenza alla diminuzione dei volumi di idrogeno fissati nelle stesse condizioni di pressione e temperatura, col progredire del numero delle prove eseguite con lo stesso campione. Non sappiamo quanto i risultati sperimentali possano essere influenzati dalla variazione delle condizioni della superficie dalla eventuale presenza di piccole quantità di idrogeno non desorbito nella degasazione precedente.

Se si considera la fig. 3, nella quale tutte le prove sono state ripetute, si osserva costantemente che ogni curva successiva è più bassa della precedente, fatta alla stessa temperatura. Aumentando la temperatura aumenta la quantità adsorbita, ma aumenta anche il divario fra le due prove successive effettuate a temperatura costante.

I catalizzatori contenenti promotore, anche dopo 10 giorni di prove, presentano maggiore proprietà adsorbenti di quelli senza promotore.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi. — *Sulla indipendenza delle funzioni misurabili.* Nota di G. OTTAVIANI, presentata (*) dal Corrisp. F. P. CANTELLI.

1. È noto che il Cantelli ha introdotto il concetto di funzioni misurabili, indipendenti (o moltiplicabili) o dipendenti (1), il quale permette di dare ai diversi teoremi di Calcolo delle probabilità, anche nelle loro generalizzazioni, una precisa rappresentazione nella teoria delle funzioni misurabili.

Due funzioni $f(t)$, $g(t)$, definite in un intervallo che, senza limitare la generalità dell'esposizione, possiamo supporre costituito dall'intervallo (0 , 1),

(*) Nella seduta dell'11 gennaio 1947.

(1) Cfr., in particolare, F. P. CANTELLI, *Una teoria astratta del Calcolo delle probabilità.* Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari «G.I.I.A.», 1932, n. 2; F. P. CANTELLI, *Su una teoria astratta del Calcolo delle probabilità e sulla sua applicazione al teorema detto delle «probabilità 0 e 1».* «G.I.I.A.», 1939, nn. 1–2; F. P. CANTELLI, *Osservazioni sulla Nota «Su una teoria astratta del Calcolo delle probabilità...».* «G. I. I.A.», 1940, n. 1; G. OTTAVIANI, *Sulla teoria astratta del Calcolo delle probabilità proposta dal Cantelli.* «G.I.I.A.», 1939, nn. 1–2.

e ivi misurabili secondo Lebesgue, si dicono indipendenti tra loro in detto intervallo se, per qualsiasi valore delle grandezze x, y, la misura dell'insieme comune all'insieme dei punti t dell'intervallo (0, 1) nei quali è $f(t) < x$ e all'insieme dei punti t dell'intervallo (0, 1) nei quali è $g(t) < y$, è uguale al prodotto delle misure dei due insiemi

$$(1) \quad m\{E[f(t) < x] \cdot E[g(t) < y]\} = m\{E[f(t) < x]\} \cdot m\{E[g(t) < y]\}.$$

Com'è noto, la condizione (1) equivale alla condizione

$$(1') \quad m\{E[f(t) \varepsilon i] \cdot E[g(t) \varepsilon b]\} = m\{E[f(t) \varepsilon a]\} \cdot m\{E[g(t) \varepsilon b]\}$$

che si riferisce all'insieme $E[f(t) \varepsilon a]$ dei punti t nei quali $f(t)$ assume un valore compreso in un insieme a, costituito o da un intervallo, aperto o chiuso, o da una successione di un numero finito o infinito di intervalli distinti di $(-\infty, \infty)$ (boreliano semplice), oppure ottenuto da boreliani mediante le operazioni di somma, differenza e passaggio al limite (insieme di Borel) oppure tale che, comunque si fissi un numero positivo σ, si possano in corrispondenza determinare due insiemi di Borel a', a'', uno contenente a e uno contenuto in a, tali che sia $m\{E[f(t) \varepsilon a']\} - m\{E[g(t) \varepsilon a'']\} < \sigma$, e analogamente per l'insieme b.

2. Con questo concetto sono connessi diversi problemi, riguardanti la esistenza delle funzioni indipendenti.

Consideriamo le funzioni $f(t)$, misurabili in (0, 1), per cui la misura dell'insieme $E[f(t) < x]$ sia una assegnata funzione $F(x)$ (queste funzioni, pertanto, esprimendoci in modo intuitivo, differiranno tra loro per un diverso ordinamento delle ordinate $f(t)$, che conservi la misura, uguale a $F(x)$, dell'insieme dei punti t le cui ordinate siano minori di x), e le funzioni $g(t)$, misurabili in (0, 1), per cui la misura dell'insieme $E[g(t) < y]$ sia un'assegnata funzione $G(y)$.

Si può studiare se si possono determinare tra esse una funzione $f(t)$ e una funzione $g(t)$ indipendenti tra loro, cioè tali che la misura dell'insieme comune $E[f(t) < x] \cdot E[g(t) < y]$ sia eguale alla funzione $F(x) \cdot G(y)$.

Si può studiare, analogamente, se è possibile determinare due funzioni $f(t)$, $g(t)$, misurabili in (0, 1), per cui la misura dell'insieme comune $E[f(t) < x] \cdot E[g(t) < y]$ sia un'assegnata funzione $F(x, y)$ diversa da $F(x) \cdot G(y)$ (funzioni dipendenti, secondo la particolare legge $F(x, y)$).

Questi problemi hanno avuto risposta affermativa, anche se si estendono a un numero finito o ad una successione di funzioni, indipendenti o dipendenti [2].

Assegnata una funzione $f(t)$, misurabile in (0, 1), non è, invece, sempre possibile ricercare un'altra funzione $g(t)$, tra quelle misurabili in (0, 1) e tali che la misura dell'insieme $E[g(t) < y]$ sia un'assegnata funzione $G(y)$,

(2) Cfr. il 1°, 2° e 4° lavoro citati in (2), e A. DENJOY, *Sur les variables ponderés multipliables de M. Cantelli*. «Comptes Rendus», t. 196, A. 1933, p. 1712.

a quale sia indipendente da $f(t)$ [3]. Riesce utile quindi ricercare per quali funzioni $f(t)$ esistano funzioni $g(t)$ con essa indipendenti. Questo argomento fu indicato dal Fréchet nel Colloquio di Calcolo delle probabilità di Ginevra del 1937, nella discussione relativa ad un lavoro sulle funzioni indipendenti presentato dallo Steinhaus [4], e di esso mi sono già occupato in un precedente lavoro [5], al quale fa seguito questa Nota.

È immediata, in quanto è la stretta rappresentazione nella teoria delle funzioni misurabili del corrispondente risultato di Calcolo delle probabilità, una condizione necessaria e sufficiente, rilevata dal Kac [6], per la indipendenza delle due funzioni misurabili $f(t)$, $g(t)$, costituita dalla relazione

$$\int_0^1 e^{i[uf(x)+ug(x)]}\,dx = \int_0^1 e^{iuf(x)}\,dx \cdot \int_0^1 e^{iug(x)}\,dx\,,$$

valida qualunque sia il valore delle due variabili reali t, u.

Però tale criterio, riportato appunto nel lavoro di Steinhaus, è di natura analitica e perciò mal si presta a dar conto della forma strutturale delle funzioni indipendenti, per cui è utile fornire a tale scopo dei particolari criteri, seguendo in ciò l'osservazione del Fréchet.

Presenta difficoltà la ricerca di due funzioni continue indipendenti, all'infuori dei casi appresso indicati. Sono continue e indipendenti le funzioni $x = f(t)$, $y = g(t)$, costituenti la rappresentazione parametrica di una curva del Peano, che gode della proprietà di riempire il quadrato $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

È noto inoltre che le funzioni composte $f_1(t) = \varphi(f(t))$, $g_1(t) = \psi(g(t))$, definite in $(0, 1)$, sono indipendenti sia se $f(t)$, $g(t)$ sono misurabili e indipendenti, e $\varphi(x)$, $\psi(y)$ sono continue [7], sia se $f(t)$, $g(t)$ sono continue e indipendenti – come ad esempio le funzioni del Peano – e $\varphi(x)$, $\psi(y)$, sono misurabili; è mediante il secondo caso che il Denjoy, nel lavoro già citato [3], ha risolto il problema, accennato all'inizio del 2° paragrafo di questa Nota, della possibilità di costruire due funzioni misurabili indipendenti.

3. Mostriamo ora che condizione necessaria perchè due funzioni continue siano indipendenti, è che la curva, continua, del piano (x, y), rappresentata dalle due equazioni parametriche $x = f(t)$, $y = g(t)$, ricopra il rettangolo $m_1 \leq x \leq M_1$, $m_2 \leq y \leq M_2$ (essendo m_1, M_1; m_2, M_2, rispettiva-

(3) Cfr. il § 6 del 4° lavoro citato in (2).

(4) H. STEINHAUS, *La théorie et les applications des fonctions indépendantes au sens stochastique.* « Actualités scientifiques et industrielles », n. 738, Paris, Hermann; B. DE FINETTI, *Resoconto critico del Colloquio di Ginevra intorno alla teoria delle probabilità.* « G.I.I.A. », 1938, n. 1.

(5) Cfr. G. OTTAVIANI, *Sulle funzioni indipendenti.* « G.I.I.A. », 1940, nn. 3–4.

(6) Cfr. M. KAC, *Sur les fonctions indépendantes.* « Acta Mathematica », 1936. Cfr. pure F. P. CANTELLI, *Le moderne vedute sulla teoria delle probabilità nei suoi rapporti con l'analisi.* « Relazioni della XXVIII Riunione della S.I.P.S. », Pisa, 1939.

(7) Cfr. il 1° lavoro cit. in (5).

mente i valori minimo e massimo delle funzioni $f(t)$, $g(t)$), cioè sia tale che ad ogni punto (x_0, y_0) del rettangolo corrisponda almeno un valore t_0, del parametro t, per cui $x_0 = f(t_0)$, $y_0 = g(t_0)$, proprietà analoga a quella delle funzioni del Peano.

Infatti, essendo x_0 uno dei valori della funzione continua $x = f(t)$, l'insieme dei punti t, $E[f(t) \varepsilon a_n]$, dove a_n indica l'intervallo $x_0 - \frac{1}{n} \leq x \leq x_0 + \frac{1}{n}$, è costituito da un boreliano, di misura positiva; procedendo in modo analogo per $g(t)$, segue dalla (1') che l'insieme prodotto $E_n = E[f(t) \varepsilon a_n] \cdot E[g(t) \varepsilon b_n]$, che è un boreliano, è di misura pur esso positiva. Essendo i boreliani $E_n, E_{n+1}, \cdots$ contenuti ciascuno nel precedente, esistono uno o più punti t appartenenti a qualsiasi boreliano della successione; è facile vedere, tenendo conto che la curva è continua, che si può scegliere come valore t_0 uno qualunque di questi punti, in quanto soddisfa le condizioni $x_0 = f(t_0)$, $y_0 = g(t_0)$.

Nel caso generale di due funzioni misurabili $f(t)$, $g(t)$ indipendenti, si può porre in evidenza una proprietà analoga.

Infatti, si fissi comunque un insieme di valori a, tra quelli ai quali si riferisce la (1'), tale che il corrispondente insieme dei punti t di (0, 1) nei quali $f(t)$ assume un valore compreso in a, cioè $E[f(t) \varepsilon a]$, abbia una misura positiva.

Si consideri, poi, l'insieme $\bar{b}$ dei valori che la $g(t)$ assume in corrispondenza ai punti t di $E[f(t) \varepsilon a]$ e si ricopra $\bar{b}$ con un qualsiasi insieme b di valori, appartenente alla classe di quegli insiemi b cui si riferisce la (1'); allora *condizione necessaria perchè le due funzioni siano indipendenti è che l'insieme b coincida con l'insieme dei valori che la $g(t)$ assume in corrispondenza ai punti t dell'intervallo* (0, 1) (trascurando però al più un opportuno insieme di punti t di misura nulla).

In tal caso infatti l'insieme $E[g(t) \varepsilon b]$, dei punti t di (0, 1) in corrispondenza ai quali $g(t)$ assume uno dei valori di b, contiene $E[f(t) \varepsilon a]$ cosicchè il primo membro della (1') coincide con $m\{E[f(t) \varepsilon a]\} > 0$; segue, pertanto, dalla (1') che deve essere $m\{E[g(t) \varepsilon b]\} = 1$, altrimenti la (1') non sarebbe soddisfatta e le due funzioni sarebbero dipendenti.

Questo risultato permette di affermare, dal punto di vista geometrico, che, considerando i punti del piano (x, y) forniti dalla rappresentazione parametrica $x = f(t)$, $y = g(t)$, quelli aventi come ascisse dei valori x che costituiscono un insieme a (tale che $m\{E[f(t) \varepsilon a]\} > 0$), hanno come ordinate dei valori y tali che qualunque insieme b che li ricopra è costituito da tutti i valori che può assumere la funzione $g(t)$ in (0, 1), salvo al più quelli corrispondenti a un insieme di punti t di misura nulla.

Resta così chiarito perchè, nel caso che le funzioni $x = f(t)$, $y = g(t)$ rappresentino una curva, questa presenti un carattere « patologico », come ad esempio una curva del Peano.

4. Per la ricerca della indipendenza o dipendenza di due funzioni misurabili $f(t)$, $g(t)$, può essere utile considerare due casi ovvii, nei quali si può affermare la dipendenza delle funzioni date.

Il primo è il caso in cui si possano determinare due insiemi a, b di valori, tra quelli ai quali si riferisce la (1'), tali che l'insieme $E[f(t) \varepsilon a]$ dei punti t nei quali $f(t)$ è un valore di a, e l'insieme dei punti t nei quali $g(t)$ è un valore di b, abbiamo misura non nulla e siano esterni tra loro, a prescindere da un insieme di punti di misura nulla; in tal caso il 1° membro della (1') è nullo, mentre il secondo è non nullo.

Il secondo deriva dalla proprietà posta in evidenza nel paragrafo precedente ed è pertanto il caso in cui si possano determinare due insiemi a e b di valori, tra quelli ai quali si riferisce la (1'), il primo tale che l'insieme $E[f(t) \varepsilon a]$ sia di misura positiva, e il secondo tale che contenga i valori che la $g(t)$ assume nei punti t di $E[f(t) \varepsilon a]$ ma sia solo una parte dell'insieme di valori che la $g(t)$ assume in (0 , 1), anche trascurando un insieme di punti t di misura nulla.

È facile dare degli esempi di classi di funzioni $f(t)$, $g(t)$ che non sono indipendenti tra loro nell'intervallo (0 , 1), in quanto la dipendenza di esse apparisce dalle considerazioni fatte.

Mi limito in questa Nota a considerare l'esempio seguente, trascurando per brevità facili generalizzazioni.

Se una funzione $g(t)$, *definita nell'intervallo* (0 , 1) , *è ivi assolutamente continua e non è costante, non esiste alcuna funzione* $f(t)$ *indipendente dalla prima* (salvo al più delle funzioni che assumono solo un numero finito di valori diversi in tutto l'intervallo (0 , 1), a prescindere dai valori che assumono in un insieme di punti di misura nulla). Da questo risultato segue, in particolare, che *non possono esistere due funzioni, una assolutamente continua e l'altra continua in* (0 , 1) , *non costanti, le quali siano indipendenti tra loro.*

La dimostrazione si ottiene facilmente, riferendosi al secondo caso considerato, e precisamente facendo vedere che esso è verificato quando una delle due funzioni assuma almeno una infinità numerabile di valori diversi, anche se si trascuri un insieme di punti t di misura nulla, e l'altra funzione sia assolutamente continua.

5. Senza dilungarmi ad esporre la genesi del concetto di funzioni indipendenti, già contenuta in un precedente lavoro sul medesimo argomento [8], credo opportuno farne un breve cenno, a mostrare l'utilità di quel concetto per gli stretti legami col Calcolo delle probabilità. Esso ha infatti la sua origine nel concetto di variabili casuali indipendenti.

La teoria astratta del Calcolo delle probabilità costituisce un ramo della moderna analisi, ponendo in modo completo un legame tra quello e la teoria delle funzioni misurabili. Venne proposta dal Cantelli nel 1932 in un primo lavoro espressamente in modo elementare, in quanto « non vi sono speciali difficoltà per illustrare la portata astratta dei vari teoremi del Calcolo delle probabilità anche nelle loro generalizzazioni », come è dichiarato nel detto lavoro, e successivamente completata in altri lavori [9].

(8) Cfr. loc. cit. (6).
(9) Cfr. loc. cit. (2).

In questa teoria un evento casuale è rappresentato da un insieme, per esempio lineare, di punti, misurabile secondo Lebesgue, contenuto nello intervallo (0 , 1), la cui misura rappresenta la probabilità dell'evento. Una variabile X, definita nel modo più generale [10], è rappresentata da una funzione $f(t)$, definita nell'intervallo (0 , 1) e ivi misurabile, tale che la misura dell'insieme dei punti t dell'intervallo (0 , 1) nei quali $f(t)$ è minore di un numero assegnato x fornisce la funzione di ripartizione $F(x)$ di X, cioè la probabilità che la variabile casuale X assuma in una prova un valore minore di x. Una successione di variabili casuali, indipendenti o dipendenti, si può sempre rappresentare per mezzo di una corrispondente successione di funzioni misurabili, indipendenti o dipendenti.

Quanto precede mostra l'importanza che acquistano le ricerche nel campo delle funzioni misurabili, per la loro corrispondenza con la teoria astratta del Calcolo delle probabilità, e come quest'ultimo debba essere considerato ormai un ramo della analisi pura, suscettibile di nuove ampie ricerche.

Matematica. — *Le approssimazioni nella risoluzione delle equazioni differenziali ordinarie.* – II. *Applicazioni.* Nota [*] di E. Bajada, presentata [**] dal Corrisp. G. Sansone.

6. – Applichiamo le considerazioni precedenti alla ricerca dell'integrale superiore dell'equazione differenziale di Müller:

$$y' = |y|^{\frac{1}{2}},$$

che presenta il caso di Peano [1]. Supporremo per semplicità $|y| \leq 1$, e quindi per quanto riguarda gli integrali uscenti dall'origine sarà:

$$y(x) \leq x \quad \text{per} \quad x > 0 \text{ e,}$$

$$\left| y\left(x + \frac{\delta}{n}\right) - y(x) \right| \leq \frac{\delta}{n}.$$

Inoltre siccome, per y_1 e y_2 positivi è:

$$|y_1^{\frac{1}{2}} - y_2^{\frac{1}{2}}| \leq |y_1 - y_2|^{\frac{1}{2}},$$

(10) Cfr. F. P. Cantelli, *La tendenza a un limite nel senso del Calcolo delle probabilità*. « Rendiconti Circolo Matem. di Palermo », 1916.

(*) La numerazione dei paragrafi e delle note continua quella della Nota I.

(**) Nella seduta dell'8 febbraio 1947.

(1) Cfr. M. Müller, *Neure Untersuchungen über den Fundamentalsatz...* « Jahr. der Deutsch. Math. ver. », *37* (1928) [pp. 33–48], p. 46 oppure G. Sansone, loc. cit., vol. II, p. 68. La dimostrazione che $\frac{x^2}{4}$ è l'integrale superiore si può dare molto semplicemente facendo uso dei teoremi di confronto e della dipendenza degli integrali rispetto ai valori iniziali, oppure facendo uso d'un teorema d'unicità.

e se:

$$|y_1 - y_2| < 7\frac{\delta}{n},$$

è:

$$2\,|y_1^{\frac{1}{2}} - y_2^{\frac{1}{2}}| < 6\left(\frac{\delta}{n}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Per ottenere l'integrale superiore dell'equazione di Müller basta considerare le approssimazioni:

$$y_n(x) = x, \quad \text{per} \quad x_0 \leq x \leq x_0 + \frac{\delta}{n},$$

$$y_n(x) = \frac{\delta}{n} + \int_0^{x-\frac{\delta}{n}} y_n^{\frac{1}{2}}(x)\,dx + \int_0^{x-\frac{\delta}{n}} 6\left(\frac{\delta}{n}\right)^{\frac{1}{2}} dx, \quad \text{per} \quad x_0 + \frac{\delta}{n} \leq x,$$

dove δ è un qualunque numero positivo prefissato tale che $\frac{\delta^2}{5} \leq 1$.

Possiamo sempre supporre che n sia tanto grande da fare sì che:

$$\left(\frac{\delta}{n}\right)^{\frac{1}{4}} < \frac{1}{6},$$

e mostreremo che $y_n(x)$ è sempre minore della quantità:

$$\left[\frac{x}{2} + 3\left(\frac{\delta}{n}\right)^{\frac{1}{4}} x + \left(\frac{\delta}{n}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^2.$$

Questo avviene senz'altro per $0 \leq x \leq \frac{\delta}{n}$. Facciamo vedere che se ammettiamo che per:

$$(r-1)\frac{\delta}{n} \leq x \leq r\frac{\delta}{n},$$

sia:

$$y_n(x) < \left[\frac{x}{2} + 3\left(\frac{\delta}{n}\right)^{\frac{1}{4}} x + \left(\frac{\delta}{n}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^2,$$

questa stessa relazione varrà anche per $r\frac{\delta}{n} \leq x \leq (r+1)\frac{\delta}{n}$.

Infatti è:

$$y_n(x) = y_n\left(r\frac{\delta}{n}\right) + \left[\frac{x^2}{4} + 3\,\frac{x^2}{2}\left(\frac{\delta}{n}\right)^{\frac{1}{4}} x + \left(\frac{\delta}{n}\right)^{\frac{1}{4}}\right]_{(r-1)\frac{\delta}{n}}^{x-\frac{\delta}{n}} + 6\left(\frac{\delta}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\left(x - r\frac{\delta}{n}\right).$$

ossia:

$$y_n(x) \leq \left[\frac{r\frac{\delta}{n}}{2} + 3r\frac{\delta}{n}\left(\frac{\delta}{n}\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{\delta}{n}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^2 + \left[\frac{\left(x-\frac{\delta}{n}\right)^2}{4} - \frac{(r-1)^2\left(\frac{\delta}{n}\right)^2}{4}\right] +$$

$$+ 3\left[\frac{\left(x-\frac{\delta}{n}\right)^2}{2}\left(\frac{\delta}{n}\right)^{\frac{1}{4}} - \frac{(r-1)^2}{2}\left(\frac{\delta}{n}\right)^2\left(\frac{\delta}{n}\right)^{\frac{1}{4}}\right] + \left[\left(x-\frac{\delta}{n}\right)\left(\frac{\delta}{n}\right)^{\frac{1}{4}} - (r-1)\left(\frac{\delta}{n}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{\delta}{n}\right] +$$

$$+ 6\left(\frac{\delta}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\left(x - r\frac{\delta}{n}\right).$$

e con semplice calcolo che per brevità omettiamo, viene:

$$y_n(x) \leq \left[\frac{x}{a} + 3\left(\frac{\delta}{n}\right)^{\frac{1}{2}}x + \left(\frac{\delta}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2.$$

Quando n tende all'infinito, se con $y(x)$ indichiamo una funzione d'accumulazione dell'insieme $\{y_n(x)\}$, sarà:

$$y(x) \leq \frac{x^2}{4}.$$

Siccome d'altra parte come è facile verificare la funzione $y = \frac{x^2}{4}$ è una soluzione dell'equazione di Müller ed $y(x)$ per quanto abbiamo dimostrato in precedenza è l'integrale superiore $y_M(x)$, dell'equazione stessa, uscente dall'origine avremo:

$$y(x) = y_M(x) = \frac{x^2}{4}.$$

7. Vediamo adesso come si possano sfruttare le considerazioni svolte per giungere per via diretta ai teoremi di unicità per le soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie.

È chiaro che se la soluzione dell'equazione differenziale (1), relativa ad una data condizione iniziale, è unica, l'integrale superiore e l'integrale inferiore coincidono.

Viceversa se l'integrale superiore e l'integrale inferiore, uscenti da un medesimo punto, coincidono in tutto un intervallo $(x_0, x_0 + \delta)$, in questo intervallo la soluzione uscente da quel punto iniziale è evidentemente unica. Siccome d'altra parte nei numeri precedenti abbiamo esposto un metodo che permette di costruire due successioni di funzioni che tendono uniformemente all'integrale superiore e all'integrale inferiore rispettivamente, avremo:

« Condizione necessaria e sufficiente affinchè un'equazione differenziale ordinaria sotto forma esplicita, abbia su un dato intervallo un'unica soluzione, soddisfacente ad una data condizione iniziale, è che su questo intervallo le successioni di funzioni $y_n(x)$ e $\bar{y}_n(x)$ relative all'integrale superiore e all'integrale inferiore, costruite nel modo già esposto, abbiano medesima funzione limite ».

Si otterrà per tanto un criterio d'unicità per la soluzione dell'equazione differenziale (1) ogni qualvolta si saranno date delle condizioni, le quali, se soddisfatte, permettono d'assicurare che le due successioni $\{y_n(x)\}$ e $\{\bar{y}_n(x)\}$ ammettono medesima funzione limite.

Supponiamo per esempio che la $f(x, y)$ sia lipschitziana rispetto a y, uniformemente rispetto a x, nel campo C; che sia cioè:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M |y_1 - y_2|$$

ed inoltre

$$|f(x, y)| \leq M, \quad \text{per} \quad (x, y) \text{ in C},$$

dove M si può sempre pensare maggior d'uno.

È noto che in queste condizioni per ogni punto (x_0, y_0) del campo C esiste una ed una sola soluzione di (1) uscente da questo punto.

La prova di questo fatto, per quanto riguarda l'unicità, si ottiene mediante dei teoremi di confronto e delle disuguaglianze notevoli.

Seguendo però il metodo delle approssimazioni successive del Picard, il Goursat [2] ottenne direttamente questa proposizione senza perciò fare uso di altri teoremi. Faremo vedere qui come essa si possa ottenere con la stessa semplicità seguendo le nostre considerazioni generali ottenendone contemporaneamente anche l'esistenza.

Consideriamo le approssimazioni:

$$y_n(x) = y_0 + M\frac{\delta}{n}, \quad \text{per} \quad x_0 \leq x \leq x_0 + \frac{\delta}{n},$$

$$y_n(x) = y_0 + M\frac{\delta}{n} + \int_{x_0}^{x-\frac{\delta}{n}} f\left[x + \frac{\delta}{n}, y_n(x)\right] dx + 7M^2 \int_{x_0}^{x-\frac{\delta}{n}} \frac{\delta}{n} dx,$$

$$\text{per} \quad x_0 + \frac{\delta}{n} \leq x \leq x_0 + \delta,$$

relative all'integrale superiore; e le approssimazioni:

$$\bar{y}_n(x) = y_0 - M\frac{\delta}{n}, \quad \text{per} \quad x_0 \leq x \leq x_0 + \frac{\delta}{n},$$

$$\bar{y}_n(x) = y_0 - M\frac{\delta}{n} + \int_{x_0}^{x-\frac{\delta}{n}} f\left[x + \frac{\delta}{n}, \bar{y}_n(x)\right] dx - 7M^2 \int_{x_0}^{x-\frac{\delta}{n}} \frac{\delta}{n} dx,$$

$$\text{per} \quad x_0 + \frac{\delta}{n} \leq x \leq x_0 + \delta.$$

Osserviamo subito che

$$y_n(x) - \bar{y}_n(x) = 2M\frac{\delta}{n}, \quad \text{per} \quad x_0 \leq x \leq x_0 + \frac{\delta}{n}.$$

(2) Cfr. E. GOURSAT, *Cours d'Analyse Mathématique*. To. II (Paris, 1905), p. 372.

Supponiamo che per $x_0 + (r-1)\frac{\delta}{n} \leqq x \leqq x_0 + r\frac{\delta}{n}$ sia:

$$|y_n(x) - \bar{y}_n(x)| < M\frac{\delta}{n}\left(1 + 15\,M\frac{\delta}{n}\right)^r.$$

Per $x_0 + r\frac{\delta}{n} \leqq x \leqq x_0 + (r+1)\frac{\delta}{n}$, sarà:

$$y_n(x) = y_n\left(x + r\frac{\delta}{n}\right) + \int_{x_0+(r-1)\frac{\delta}{n}}^{x-\frac{\delta}{n}} f\left[x + \frac{\delta}{n}, y_n(x)\right] dx + 7\,M^2 \int_{x_0+(r-1)\frac{\delta}{n}}^{x-\frac{\delta}{n}} \frac{\delta}{n}\,dx,$$

$$\bar{y}_n(x) = \bar{y}_n\left(x + r\frac{\delta}{n}\right) + \int_{x_0+(r-1)\frac{\delta}{n}}^{x-\frac{\delta}{n}} f\left[x + \frac{\delta}{n}, \bar{y}_n(x)\right] dx - 7\,M^2 \int_{x_0+(r-1)\frac{\delta}{n}}^{x-\frac{\delta}{n}} \frac{\delta}{n}\,dx;$$

e quindi facendo la differenza membro a membro:

$$y_n(x) - \bar{y}_n(x) = y_n\left(x + r\frac{\delta}{n}\right) - \bar{y}_n\left(x + r\frac{\delta}{n}\right) +$$

$$+ \int_{x_0+(r-1)\frac{\delta}{n}}^{x-\frac{\delta}{n}} \left\{ f\left[x + \frac{\delta}{n}, y_n(x)\right] - f\left[x + \frac{\delta}{n}, \bar{y}_n(x)\right] \right\} dx + 14\,M^2 \frac{\delta}{n} \int_{x_0+(r-1)\frac{\delta}{n}}^{x-\frac{\delta}{n}} dx,$$

così che:

$$|y_n(x) - \bar{y}_n(x)| \leqq \left| y_n\left(x + r\frac{\delta}{n}\right) - \bar{y}_n\left(x + r\frac{\delta}{n}\right) \right| +$$

$$+ M\frac{\delta}{n}|y_n(x) - \bar{y}_n(x)| + 14\,M^2\left(\frac{\delta}{n}\right)^2.$$

e per quanto abbiamo ammesso vero per $x_0 + (r-1)\frac{\delta}{n} \leqq x \leqq x_0 + r\frac{\delta}{n}$, sarà:

$$|y_n(x) - \bar{y}_n(x)| \leqq M\frac{\delta}{n}\left(1 + 15\,M\frac{\delta}{n}\right)^r \left[1 + M\frac{\delta}{n} + 14\,M\frac{\delta}{n}\right] \leqq M\frac{\delta}{n}\left(1 + 15\,M\frac{\delta}{n}\right)^{r+1},$$

e la relazione ammessa vera per r rimane vera anche per $r+1$, dimodochè, vista vera per $r = 1$, sarà:

$$|y_n(x) - \bar{y}_n(x)| \leqq M\frac{\delta}{n}\left[1 + 15\,M\frac{\delta}{n}\right]^n.$$

Siccome, per n tendente all'infinito il limite del secondo membro dell'ultima relazione tende a zero, il nostro asserto risulta completamente, dimostrato.

Il procedimento esposto in questo numero è stato applicato ad un caso notevole ma ormai classico dell'unicità della soluzione.

Si può osservare facilmente che lo stesso procedimento si può applicare in casi ben più generali e sempre con considerazioni molto elementari come mi riprometto di far vedere successivamente.

Matematica. — *Sull'integrazione delle equazioni dell'elasticità* (*). Nota di G. FICHERA, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

Già da tempo il prof. Picone nei suoi scritti (1) introduce un nuovo generale procedimento d'integrazione per le equazioni lineari a derivate parziali, fondato essenzialmente sull'impiego della formola di Green e che conduce alla risoluzione dei classici problemi al contorno per dette equazioni, previa la conoscenza di taluni sistemi di funzioni verificanti certe condizioni. In alcuni recenti lavori (2) L. Amerio, basandosi su un notevole teorema da lui dimostrato, che assegna le *condizioni di compatibilità* fra i dati al contorno nei problemi che si considerano, perviene alla effettiva costruzione di tali sistemi di funzioni per le equazioni del secondo ordine di tipo ellittico, per l'equazione del calore e per l'equazione $\Delta_{2k} u = f$.

In un lavoro in corso ho ricercato se tali procedimenti d'integrazione siano applicabili ai sistemi di equazioni lineari alle derivate parziali e precisamente ho preso in esame il classico sistema relativo all'equilibrio di un corpo elastico, isotropo e omogeneo.

Quantunque taluni dei problemi al contorno che si pongono per tale sistema siano di natura diversa da quelli che si considerano per le equazioni su menzionate, sono pervenuto ed estendere i risultati acquisiti per tali equazioni al suddetto sistema. In questa Nota esporrò il metodo seguìto e i risultati ottenuti.

Sia C un corpo elastico, isotropo e omogeneo nello spazio xyz. Indichiamo con $\mathbf{F} \equiv (X, Y, Z)$ il vettore che rappresenta la forza per unità di massa agente all'interno del corpo e con $\mathbf{T} \equiv (T_x, T_y, T_z)$ il vettore che rappresenta la forza per unità di superficie; sia inoltre $\boldsymbol{s} \equiv (u, v, w)$ lo spostamento di un punto P di C in uno stato di deformazione del corpo. Posto

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

è ben noto dalla teoria matematica dell'elasticità che le condizioni d'equilibrio nell'interno di C sono espresse dalle seguenti equazioni, nelle quali

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta dell'8 marzo 1947.

(1) Cfr. M. PICONE, *Appunti d'Analisi superiore*. [Rondinella, Napoli (1940)], pp. 752–765; *Nuovi metodi risolutivi per i problemi d'integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali* etc. [« R. Acc. delle Scienze di Torino » (1940)].

(2) Cfr. L. AMERIO, *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta_2 u - \lambda^2 u = f$ *in un dominio di connessione qualsiasi*. [« Istituto lombardo di Scienze e Lettere », vol. LXXVIII, fasc. I (1944-1945)]; *Sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico*. [Pubblicaz. N. 165 dell'« I.N.A.C. »]; *Sull'equazione di propagazione del calore*. [« Rend. di matematica e delle sue applicazioni » (1946)]; *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta_{2k} u = f$. [« Annali di Matematica pura e applicata » (1945)].

L e K sono costanti elastiche caratteristiche del corpo stesso (costanti di Lamé) aventi valore positivo.

$$(1)\qquad \begin{cases} K\Delta_2 u + (L+K)\dfrac{\partial\Theta}{\partial x} + X = 0 \\ K\Delta_2 v + (L+K)\dfrac{\partial\Theta}{\partial y} + Y = 0 \\ K\Delta_2 w + (L+K)\dfrac{\partial\Theta}{\partial z} + Z = 0\,, \end{cases}$$

mentre, indicata con n la normale in un punto della superficie del corpo rivolta verso l'interno del corpo stesso, le condizioni d'equilibrio in superficie sono:

$$(2)\qquad \begin{cases} (L+K)\Theta\cos(n,x) + K\dfrac{du}{dn} + K\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\cos(n,y) - \dfrac{\partial v}{\partial y}\cos(n,x)\right) + \\ \qquad + K\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\cos(n,z) - \dfrac{\partial w}{\partial z}\cos(n,x)\right) + T_x = 0 \\ (L+K)\Theta\cos(n,y) + K\dfrac{dv}{dn} + K\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\cos(n,z) - \dfrac{\partial w}{\partial z}\cos(n,y)\right) + \\ \qquad + K\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos(n,x) - \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos(n,y)\right) + T_y = 0 \\ (L+K)\Theta\cos(n,z) + K\dfrac{dw}{dn} + K\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\cos(n,x) - \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos(n,z)\right) + \\ \qquad + K\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}\cos(n,y) - \dfrac{\partial v}{\partial y}\cos(n,z)\right) + T_z = 0\,. \end{cases}$$

I tre problemi fondamentali che si pongono per la determinazione delle configurazioni d'equilibrio di un corpo elastico sono i seguenti:

integrare il sistema d'equazioni alle derivate parziali (1) essendo assegnati sul contorno Σ del corpo uno dei seguenti tre tipi di dati

1° le componenti di spostamento u, v, w;

2° le componenti della forza superficiale T_x, T_y, T_z;

3° su una parte di Σ u, v, w e sulla restante parte T_x, T_y, T_z.

Chiameremo il primo *problema degli spostamenti*, il secondo *problema delle forze superficiali*, il terzo *problema misto*.

Indichiamo con $\boldsymbol{s}_1(M,P)$, $\boldsymbol{s}_2(M,P)$, $\boldsymbol{s}_3(M,P)$ i tre vettori, introdotti dal Somigliana, *soluzioni fondamentali* del sistema omogeneo associato al sistema (1) e diciamo $\mathbf{T}_1(M,P)$, $\mathbf{T}_2(M,P)$, $\mathbf{T}_3(M,P)$ le forze superficiali, che, per le (2), corrispondono rispettivamente agli spostamenti $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_3$, pensati come funzioni del punto M. Detto $\boldsymbol{s} \equiv (u, v, w)$ un vettore soluzione del sistema (1) è ben noto che per ogni punto P interno a C sussistono le seguenti tre formole del Somigliana:

$$
(3)\quad
\begin{cases}
8\pi K u(P) = \int_C [\mathbf{F} \times \boldsymbol{s}_1(M,P)]\, dc(M) + \int_\Sigma [\mathbf{T} \times \boldsymbol{s}_1(M,P)]\, d\sigma(M) - \\
\qquad\qquad - \int_\Sigma [\boldsymbol{s} \times \mathbf{T}_1(M,P)]\, d\sigma(M) \\
8\pi K v(P) = \int_C [\mathbf{F} \times \boldsymbol{s}_2(M,P)]\, dc(M) + \int_\Sigma [\mathbf{T} \times \boldsymbol{s}_2(M,P)]\, d\sigma(M) - \\
\qquad\qquad - \int_\Sigma [\boldsymbol{s} \times \mathbf{T}_2(M,P)]\, d\sigma(M) \\
8\pi K w(P) = \int_C [\mathbf{F} \times \boldsymbol{s}_3(M,P)]\, dc(M) + \int_\Sigma [\mathbf{T} \times \boldsymbol{s}_3(M,P)]\, d\sigma(M) - \\
\qquad\qquad - \int_\Sigma [\boldsymbol{s} \times \mathbf{T}_3(M,P)]\, d\sigma(M) .
\end{cases}
$$

Detto poi P′ un punto esterno a C, per il ben noto *teorema di reciprocità* del Betti si ha

$$
(4)\quad
\begin{cases}
0 = \int_C [\mathbf{F} \times \boldsymbol{s}_1(M,P')]\, dc(M) + \int_\Sigma [\mathbf{T} \times \boldsymbol{s}_1(M,P')]\, d\sigma(M) - \\
\qquad\qquad - \int_\Sigma [\boldsymbol{s} \times \mathbf{T}_1(M,P')]\, d\sigma(M) \\
0 = \int_C [\mathbf{F} \times \boldsymbol{s}_2(M,P')]\, dc(M) + \int_\Sigma [\mathbf{T} \times \boldsymbol{s}_2(M,P')]\, d\sigma(M) - \\
\qquad\qquad - \int_\Sigma [\boldsymbol{s} \times \mathbf{T}_2(M,P')]\, d\sigma(M) \\
0 = \int_C [\mathbf{F} \times \boldsymbol{s}_3(M,P')]\, dc(M) + \int_\Sigma [\mathbf{T} \times \boldsymbol{s}_3(M,P')]\, d\sigma(M) - \\
\qquad\qquad - \int_\Sigma [\boldsymbol{s} \times \mathbf{T}_3(M,P')]\, d\sigma(M) .
\end{cases}
$$

Le (3) e le (4) vengono di solito dimostrate facendo l'ipotesi della continuità in tutto C, frontiera inclusa, delle funzioni u, v, w e delle loro derivate parziali prime. Noi invece ricercheremo le soluzioni del sistema (1) nella classe più generale di vettori $\boldsymbol{s}$ per cui valgono le (3) e le (4), classe che verremo a ben precisare. Supporremo intanto che il solido C nello stato di non deformazione sia schematizzabile in un dominio limitato dello spazio xyz, la cui frontiera Σ sia costituita da un numero finito di superficie chiuse $\Sigma_0, \cdots, \Sigma_1, \Sigma_p$ a due a due prive di punti in comune ed essendo Σ_0 il contorno esterno e $\Sigma_1, \cdots, \Sigma_p$ quelli interni. Ciascuna delle dette superficie sia inoltre decomponibile in un numero finito di porzioni di superficie regolari aperte rappresentabili parametricamente con funzioni continue e dotate di derivate

parziali prime e seconde continue. Supporremo inoltre che le tre funzioni X , Y , Z siano hölderiane in C.

Indichiamo, con $\{\boldsymbol{s}\}$ la classe dei vettori $\boldsymbol{s}$ definiti in $C-\Sigma$ per ciascuno dei quali sono soddisfatte le seguenti proprietà

a) all'interno di C sono verificate le (1);

b) fissato quasi ovunque su Σ un punto M, condotta la normale a Σ in M, presso un punto P in essa, contenuto in C, e considerati i due vettori $\boldsymbol{s}(P)$ e $\mathbf{T}(P)$, del quale ultimo le componenti sono definite dalle (2), esistono finiti i limiti.

$$(5)\qquad \lim_{P\to M} \boldsymbol{s}(P) = \mathbf{S}(M) \quad , \quad \lim_{P\to M} \mathbf{T}(P) = \mathcal{T}(M)$$

e le componenti di $\mathbf{S}(M)$ e di $\mathcal{T}(M)$ sono funzioni sommabili su Σ;

c) in ogni punto P interno a C si ha:

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} 8\pi K u(P) &= \int_C [\mathbf{F}\times \boldsymbol{s}_1(M,P)]\,dc(M) + \int_\Sigma [\mathcal{T}\times \boldsymbol{s}_1(M,P)]\,d\sigma(M) - \\ &\quad - \int_\Sigma [\mathbf{S}\times \mathbf{T}_1(M,P)]\,d\sigma(M) \\ 8\pi K v(P) &= \int_C [\mathbf{F}\times \boldsymbol{s}_2(M,P)]\,dc(M) + \int_\Sigma [\mathcal{T}\times \boldsymbol{s}_2(M,P)]\,d\sigma(M) - \\ &\quad - \int_\Sigma [\mathbf{S}\times \mathbf{T}_2(M,P)]\,d\sigma(M) \\ 8\pi K w(P) &= \int_C [\mathbf{F}\times \boldsymbol{s}_3(M,P)]\,dc(M) + \int_\Sigma [\mathcal{T}\times \boldsymbol{s}_3(M,P)]\,d\sigma(M) - \\ &\quad - \int_\Sigma [\mathbf{S}\times \mathbf{T}_3(M,P)]\,d\sigma(M), \end{aligned}\right.$$

mentre per ogni punto P′ esterno a C si ha

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} 0 &= \int_C [\mathbf{F}\times \boldsymbol{s}_1(M,P')]\,dc(M) + \int_\Sigma [\mathcal{T}\times \boldsymbol{s}_1(M,P')]\,d\sigma(M) - \\ &\quad - \int_\Sigma [\mathbf{S}\times \mathbf{T}_1(M,P')]\,d\sigma(M) \\ 0 &= \int_C [\mathbf{F}\times \boldsymbol{s}_2(M,P')]\,dc(M) + \int_\Sigma [\mathcal{T}\times \boldsymbol{s}_2(M,P')]\,d\sigma(M) - \\ &\quad - \int_\Sigma [\mathbf{S}\times \mathbf{T}_2(M,P')]\,d\sigma(M) \\ 0 &= \int_C [\mathbf{F}\times \boldsymbol{s}_3(M,P')]\,dc(M) + \int_\Sigma [\mathcal{T}\times \boldsymbol{s}_3(M,P')]\,d\sigma(M) - \\ &\quad - \int_\Sigma [\mathbf{S}\times \mathbf{T}_3(M,P')]\,d\sigma(M). \end{aligned}\right.$$

Porremo al modo seguente per i vettori della classe $\{\boldsymbol{s}\}$ i tre problemi fondamentali dell'equilibrio del solido elastico C:

Problema degli spostamenti. – Determinare un vettore $\boldsymbol{s}$ di $\{\boldsymbol{s}\}$ avendo assegnato su Σ il vettore $\mathbf{S}$ di componenti ivi sommabili;

Problema delle forze superficiali. – Determinate un vettore $\boldsymbol{s}$ di $\{\boldsymbol{s}\}$ avendo assegnato su Σ il vettore $\mathcal{T}$ di componenti ivi sommabili;

Problema misto. – Determinare un vettore $\boldsymbol{s}$ di $\{\boldsymbol{s}\}$ avendo assegnato su una parte Σ' di Σ il vettore $\mathbf{S}$ e sulla restante parte Σ''; il vettore $\mathcal{T}$, supposti sempre di componenti sommabili.

Ho potuto dimostrare che ciascuno dei problemi considerati equivale alla risoluzione di un sistema di equazioni integrali di Fischer–Riesz e pertanto può ritenersi acquisita la conoscenza numerica delle soluzioni dei detti problemi (3). A tale risultato si perviene facilmente una volta stabilito il fondamentale teorema di cui qui riporto l'enunciato.

TEOREMA. – *Se* $\mathbf{S}(M)$ *e* $\mathcal{T}(M)$ *sono due vettori di componenti sommabili su* Σ *verificanti le equazioni* (7), *il vettore* $\boldsymbol{s}$, *le cui componenti* u, v, w *sono definite dalle* (6), *appartiene alla classe* $\{\boldsymbol{s}\}$.

In virtù di tale teorema, possiamo affermare che *il sistema di equazioni integrali* (7) *costituisce una nuova e più compatta traduzione analitica delle condizioni d'equilibrio di un corpo elastico*, condizioni che venivano altrimenti espresse dalle (1) e delle (2).

Detto P'_0 un punto esterno al dominio limitato da Σ_0 e $P'_1, P'_2, \cdots, P'_p$ punti interni ai dominî limitati rispettivamente da $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_p$ indichiamo con $\{\varphi_i\}$ la successione di vettori derivati di ogni ordine dei vettori $S_h(M, P)$ $(h = 1, 2, 3)$ rispetto alle coordinate del punto P, calcolati nei punti P'_j $(j = 0, 1, \cdots, p)$. Indichiamo con $\{\psi_i\}$ quella ottenuta in modo analogo con i vettori derivati di $\mathbf{T}_h(M, P')$ ordinati come i vettori φ_i. Data l'analiticità delle funzioni di P′ che compaiono ai secondi membri del sistema (7), si ha che detto sistema è equivalente al seguente di Fischer–Riesz

$$(8)\qquad \int_\Sigma (\mathcal{T} \times \varphi_i)\, d\sigma - \int_\Sigma (\mathbf{S} \times \psi_i)\, d\sigma + \int_C (\mathbf{F} \times \varphi_i)\, dv = 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots)$$

la cui considerazione permette la effettiva risoluzione dei tre problemi fondamentali dell'elasticità. Si ha infatti:

Problema degli spostamenti. – È noto il vettore $\mathbf{S}$. Le (8) forniscono allora le coordinate di Fourier del vettore incognito $\mathcal{T}$ rispetto al sistema $\{\varphi_i\}$. Una volta determinato $\mathcal{T}$ le (6) forniscono la soluzione del problema;

Problema delle forze superficiali. – È noto il vettore $\mathcal{T}$. Le (8) dànno in tal caso le coordinate di Fourier del vettore incognito $\mathbf{S}$ rispetto al sistema $\{\psi_i\}$;

(3) Cfr. M. PICONE, *Vedute unitarie sul calcolo delle soluzioni delle equazioni alle derivate parziali della Fisica-matematica.* [«Atti del I Convegno di Matematica applicata», 4–6 giugno 1936)].

Problema misto. – Su una parte Σ' di Σ è assegnato lo spostamento $\mathbf{S}'$ sulla restante parte Σ'' la intensità della forza superficiale $\mathcal{T}''$. Poniamo:

$$\omega_i \begin{cases} = \varphi_i & \text{su} \quad \Sigma', \\ = -\psi_i & \text{su} \quad \Sigma'', \end{cases}$$

$$q_i = \int_{\Sigma'} (\mathbf{S}' \times \psi_i)\, d\sigma - \int_{\Sigma''} (\mathcal{T}'' \times \varphi_i)\, d\sigma - \int_C (\mathbf{F} \times \varphi_i)\, dc\,.$$

Consideriamo il seguente sistema di Fischer–Riesz nel vettore incognito $\mathbf{R}$:

$$\int_{\Sigma} (\mathbf{R} \times \omega_i)\, d\sigma = q_i \qquad (i = 1, 2, \cdots).$$

Se $\mathbf{R}$ è soluzione di tale sistema, poniamo

$$\mathbf{S} \begin{cases} = \mathbf{S}' & \text{su} \quad \Sigma' \\ = \mathbf{R} & \text{su} \quad \Sigma'' \end{cases}, \qquad \mathcal{T} \begin{cases} = \mathbf{R} & \text{su} \quad \Sigma' \\ = \mathcal{T}'' & \text{su} \quad \Sigma''. \end{cases}$$

I vettori $\mathbf{S}$ e $\mathcal{T}$ così definiti verificano le (8) cioè le (7) e pertanto, sostituendoli nelle (6), si ottiene la soluzione del problema.

Matematica. — *Sopra una classe di reti e di superficie, in relazione con le congruenze di rette di Waelsh.* Nota di F. Marcus, presentata (*) dal Socio E. Bompiani.

È noto (1) che nello spazio proiettivo E_3, una superficie, è determinata da un sistema completamente integrabile

$$(1) \qquad \begin{cases} x_{uv} + a x_u + b x_v + c x = 0 \\ x_{uu} + m x_{vv} + p x_u + q x_v + r x = 0 \end{cases}$$

x, y, z, t, essendo coordinate omogenee del punto x che, al variare di u e v, descrive la superficie. Indicando con

$$(2) \qquad \begin{cases} x_i = (x_{i-1})_v + a_{i-1}\, x_{i-1} \\ x_{-i} = (x_{-i+1})_u + b_{-i+1}\, x_{-i+1} \end{cases}$$

le trasformate successive di Laplace di x, nel senso delle linee v e u, si può transformare (1_2) nella

$$(3) \qquad x_{-2} + m x_2 + \alpha x_{-1} + \beta x_1 + \gamma x = 0\,.$$

Siano h_i, h_{-i}, k_i, k_{-i} gli invarianti di Darboux della rette (x) e delle sue succesive transformate di Laplace. Indichiamo con $(x\, x_i)$ le coordinate di

(*) Nella seduta dell'8 marzo 1947.

(1) G. Tzitzeica, *Géometrie diff. proj. des réseaux*, p. 55.

Plücker del raggio di una congruenza, di rette, che ha come falde focali, le superficie x e x_1. Una congruenza di rette è di Waelsh [2], se alle linee asintotiche di una falda focale, corrisponde sull'altra, un sistema di linee coniugate. Con queste notazioni si possono dimostrare i seguenti risultati:

Le rette $(x\,x_1)$ e $(x\,x_{-1})$ *descrivono delle congruenze di Waelsh se*

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_v + h_1 + k_{-1} = 0 \\ \left(\dfrac{\beta}{m}\right)_u + h_1 + k = 0 \end{array}\right. \tag{4}$$

e dalle condizioni d'integrabilità del sistema (1) *risulta*

$$(\log m)_{uv} = 2\,(k - h)\,. \tag{5}$$

Se una delle rette $(x\,x_1)$ *e* $(x\,x_{-1})$, *descrive una congruenza di Waelsh ed è anche soddisfatta la* (5), *allora l'altra retta genera pure una congruenza di Waelsh.*

Dalle formole di ricorrenza (2) risulta

$$x_{uu} = x_{-2} - (b + b_{-1})\,x_{-1} + (b^2 - b_u)\,x$$

$$x_{vv} = x_2 - (a + a_1)\,x_1 + (a^2 - a_v)\,x\,.$$

Sostituendole in (1_2) ed identificando con (3) risulterà

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha = p - (b + b_{-1}) \\ \dfrac{\beta}{m} = \dfrac{q}{m} - (a + a_1)\,. \end{array}\right. \tag{6}$$

Ma [3]

$$\left\{\begin{array}{l} b_{-1} = b - (\log k)_u \quad ; \quad a_1 = a - (\log h)_v \\ h_1 = 2h - k - (\log h)_{uv} \quad ; \quad k_{-1} = 2k - h - (\log k)_{uv} \end{array}\right. \tag{6'}$$

e tenendo conto di (4) avremo finalmente

$$\left(\frac{p}{2}\right)_v = \left(\frac{q}{2m}\right)_u = c - ab\,. \tag{7}$$

Le prime equazioni (7) sono invarianti per ogni transformazione $x = \rho x'$. Potremo dunque normalizzare le coordinate x e rendere

$$p = q = ab - c = 0\,. \tag{8}$$

Abbiamo dunque il seguente risultato:

(2) L. BIANCHI, *Lezioni di Geometria diff.* Vol. I, Parte II, p. 490.

(3) G. TZITZEICA, Opera cit.

Le tangenti coniugate di una superficie, descrivono congruenze di Waelsh, se con una normalizzazione $x = \rho x'$ *si può ridurre il sistema* (1) *alla forma*

$$(1') \qquad \begin{cases} x'_{uv} + a' x'_u + b' x'_v + a' b' x' = 0 \\ x'_{uv} + m x'_{vv} + r' x' = 0 . \end{cases}$$

Inversamente, supponiamo che le coordinate del punto che descrive una superficie, siano soluzioni del sistema completamente integrabile (1).

Per ipotesi $h = a'_u$; $k = b'_v$ dunque

$$\alpha_v = (\log k)_{uv} - 2k$$

$$\left(\frac{\beta}{m}\right)_u = (\log h)_{uv} - 2h .$$

Tenendo conto di (6′) risulterà

$$(4') \qquad \begin{cases} \alpha_v - k_1 + h = 0 \\ \left(\frac{\beta}{m}\right)_u + k + h_1 = 0 . \end{cases}$$

Ciò dimostra, che in questo caso, le tangenti coniugate alle linee coordinate descrivono delle congruenze di Waelsh.

Consideriamo adesso il caso che gli invarianti di Darboux di (1′) siano uguali. Risulterà allora da (5) $(\log m)_{uv} = 0$. Cioè $m = UV$ con $U = U(u)$ e $V = V(v)$. Con un cambiamento dei parametri che non cambi le linee di coordinate, potremo rendere (8) $m = 1$.

Perciò la rete (x) *è una rete isoterma-coniugata, con le tangenti che al variare di* u *e* v, *descrivono delle congruenze di Waelsh.*

Chiameremo queste reti, reti di Waelsh.

Le reti (x_1) e (x_{-1}) sono pure reti isoterme coniugate. In questo caso la superficie, è deteminata dal sistema completamente integrabile

$$(1'') \qquad \begin{cases} x_{uv} + a x_u + b x_v + abx = 0 \\ x_{uu} + x_{vv} + rx = 0 . \end{cases}$$

In un altra Nota faremo vedere che in generale, queste reti sono analoghe, a quelle studiate da H. Ionas [4], da un altro punto di vista. Le superficie (1″) sono analoghe alle superficie di Ionas, che nel sistema di coordinate asintotiche, sono caratterizzate da $\beta_u = \gamma_v$, β e γ essendo i ben noti coefficienti del sistema canonico di Fubini [5].

(4) G. Fubini–E. Cêch, *Introduction a la Géom. Proj. diff. des surfaces*, p. 124.

(5) G. Fubini–E. Cêch, *Geometria proiett. diff. delle superficie*. Zanichelli, Bologna, tomo I, p. 106.

Matematica. — *Sulle condizioni che determinano gli integrali di un sistema di due equazioni differenziali ordinarie del primo ordine.* Nota di G. STAMPACCHIA, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

È noto il seguente problema (*di valori al contorno*): assegnati, comunque, due valori y_0, z_0 determinare una soluzione $y = y(x)$, $z = z(x)$ del sistema di due equazioni differenziali

$$(1) \qquad \begin{cases} y' = f(x; y, z) \\ z' = g(x; y, z) \end{cases}$$

soddisfacente alle condizioni (1):

$$(2) \qquad y(a) = y_0 \quad , \quad z(b) = z_0 \qquad (a < b).$$

Introdotto nello spazio a tre dimensioni un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, pensando $x = x$; $y = y(x)$; $z = z(x)$ come le equazioni parametriche di una curva, il problema precedente equivale a cercare le curve integrali del sistema (1) che si appoggiano alle rette:

$$r) \begin{cases} x = a \\ y = y_0 \end{cases} \quad , \quad s) \begin{cases} x = b \\ z = z_0 \end{cases}$$

ortogonali fra loro e contenute rispettivamente nei due piani $x = a$, $x = b$.

Posta in tali termini la questione, viene naturale domandarsi se esistono curve integrali del sistema (1) che si appoggino a due rette contenute nei piani $x = a$, $x = b$ e non più necessariamente ortogonali fra loro. Ciò equivale, analiticamente, a ricercare le soluzioni del sistema (1) che soddisfano alle condizioni:

$$(3) \qquad \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \beta_1 z(a) + \gamma_1 = 0 \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 z(b) + \gamma_2 = 0 \end{cases}.$$

In generale, può domandarsi se il problema ammette soluzione quando si richiede che le curve integrali si appoggino a due curve qualsiasi contenute negli stessi piani $x = a$, $x = b$.

Mostreremo che questo problema è risolubile sotto opportune ipotesi per le funzioni $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ e sulle curve in questione.

(*) Nella seduta dell'8 marzo 1947.

(1) O. NICOLETTI, *Sulle condizioni iniziali che determinano gli integrali ecc.*. « Atti Accad. Sc. Torino », vol. XXXIII (1898); R. CACCIOPPOLI, *Un teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale.* « Rend. Acc. dei Lincei » (6), II (1930), pp. 794–799; A. MINZONI, *Su un problema ai limiti per un sistema di due equazioni differenziali del 1° ordine.* « Rend. Sem. Mat. Padova », anno IX (1938); G. SCORZA DRAGONI, *Teoremi di unicità, ecc.* « Rend. Sem. Mat. Padova ». Anno XII (1941); S. CINQUINI, *Sopra il problema di Nicoletti per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie.* « Ann. Sc. Normale Sup. Pisa », ser. II (X) (1941).

1. TEOREMA n. 1. – 1) *Siano* $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ *due funzioni definite per ogni* x *di* (a,b) *e per ogni coppia di numeri reali* y,z *e tali che ciascuna di esse, per ogni* x *fissato, risulti continua rispetto ad* y,z *e, per ogni coppia* y,z *fissata, risulti quasi continua rispetto ad* x.

2) *Esista una funzione* $\varphi(x)$, *non negativa, integrabile* (2) *nell'intervallo* (a,b), *in modo che in tutto il campo* Γ:

$$\Gamma: \quad a \leq x \leq b \quad , \quad |y| < +\infty \quad ; \quad |z| < +\infty$$

siano verificate le diseguaglianze:

$$\left\{ \begin{array}{l} |f(x,y,z)| \\ |g(x,y,z)| \end{array} \right\} \leq \varphi(x). \tag{5}$$

Allora se $a \leq a_1 < a_2 \leq b$ *il sistema*:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x) = y(a) + \displaystyle\int_a^x f(x\,;y(x),z(x))\,dx \\ \\ z(x) = z(a) + \displaystyle\int_a^x g(x\,;y(x),z(x))\,dx \end{array} \right. \tag{1'}$$

ammette in (a,b) *almeno una soluzione* $y = y(x)$, $z = z(x)$ *con* $y(x), z(x)$ *assolutamente continue e tali che sia*

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 y(a_1) + \beta_1 z(a_1) + \gamma_1 = 0 \\ \alpha_2 y(a_2) + \beta_2 z(a_2) + \gamma_2 = 0 \end{array} \right. \tag{3}$$

ove

$$\left| \begin{array}{cc} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{array} \right| \neq 0 \tag{4}$$

a) Supponiamo, in un primo tempo, che per il sistema (1') valga un criterio di unicità rispetto ai valori iniziali. Allora da ogni punto $P \equiv (a_1, y, z)$ della retta

$$r) \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 y + \beta_1 r + \gamma_1 = 0 \\ x = a_1 \end{array} \right.$$

parte una sola curva integrale C_P definita, per la (5), in tutto l'intervallo (a,b), di equazioni:

$$C_P \equiv \{ x = x \quad ; \quad y = y(x) \quad ; \quad z = z(x) \}.$$

Essendo $y(x), z(x)$ funzioni assolutamente continue in (a,b) (3) la lunghezza L_{C_P} dell'arco di C_P per $a_1 \leq x \leq a_2$ è data dall'espressione

$$L_{C_P} = \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1 + [y'(x)]^2 + [z'(x)]^2}\,dx \leq \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1 + 2[\varphi(x)]^2}\,dx \tag{6}$$

(2) Nel senso di LEBESGUE.

(3) C. CARATHEODORY, *Vorlesungen über reelle Functionen* (1927) pp. 665, Leipzig.

Proiettando ora il piano $x = a_1$ sul piano $x = a_2$ nella direzione dell'asse x, alla retta r corrisponde una retta r' che incontra la retta

$$s) \quad \begin{cases} \alpha_2 y + \beta_2 z + \gamma_2 = 0 \\ x = a_2 \end{cases}$$

in un punto P'_0 [per la (4)], corrispondente di un punto P_0 di r. Introduciamo sulla retta r (e quindi sulla retta r') un sistema di ascisse λ assumendo $P_0\,[P'_0]$ come origine ed uno dei due versi come positivo.

Poichè il piano $x = a_2$ è diviso dalla retta s in due semipiani σ_1 e σ_2, in ciascuno dei quali vi è una delle semirette r'_1, r'_2 della retta r' determinate rispettivamente da $\lambda > 0$ e $\lambda < 0$, prendendo $\bar{\lambda}$ sufficientemente grande in modulo esistono in σ_1 e σ_2 rispettivamente due punti $P'(\bar{\lambda}), P'(-\bar{\lambda})$ di r' che hanno distanza da s maggiore di

$$\int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1 + 2\,[\varphi(x)]^2}\, dx.$$

Pertanto le curve integrali uscenti da $P(-\bar{\lambda}), P(\bar{\lambda})$ di r (corrispondenti di $P'(-\bar{\lambda}), P'(\bar{\lambda})$ di r') per la (6) raggiungono il piano $x = a_2$ in punti che sono rispettivamente in σ_2 e σ_1.

Poichè le curve integrali variano con continuità rispetto ai valori iniziali esiste di certo almeno un valore λ_0 di $(-\bar{\lambda}, \bar{\lambda})$ per cui la curva integrale uscente da $P(\lambda_0)$ raggiunge il piano $x = a_2$ in un punto di s.

Il teorema con l'ipotesi dell'unicità è pertanto dimostrato.

b) Passiamo a provare il teorema in generale. Consideriamo pertanto per ogni punto P della retta r di coordinate (a_1, ξ, η) $[\alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 = 0]$ e per δ fissato, la curva di equazioni [4]:

$$C_{P,\delta} \begin{cases} x = x \qquad a_1 \leq x \leq a_2 \\ y(x) = \xi\,(a_1 \leq x \leq a_1 + \delta) \;\; ; \;\; y(x) = \xi + \displaystyle\int_{a_1}^{x-\delta} f(x; y(x), z(x))\, dx \\ \qquad\qquad (a_1 + \delta \leq x \leq a_2) \\ z(x) = \eta\,(a_1 \leq x \leq a_1 + \delta) \;\; ; \;\; z(x) = \eta + \displaystyle\int_{a_1}^{x-\delta} f(x; y(x), z(x))\, dx \\ \qquad\qquad (a_1 + \delta \leq x \leq a_2) \end{cases}$$

Essendo le funzioni $y(x), z(x)$ assolutamente continue, la curva C_P è rettificabile e si ha

$$(6) \qquad L_{C_{P,\delta}} \leq \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1 + 2\,[\varphi(x)]^2}\, dx$$

(4) L. TONELLI, *Sulle equazioni funzionali del tipo di Volterra*. « Bull. of the Calcutta Math. Soc. », *20* (1928) pp. 31–48; il procedimento è riportato in G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*. Vol I, cap. I, Bologna.

quindi, con ragionamento analogo a quello fatto in a), esiste per ogni δ almeno una curva che si appoggia alle due rette r ed s.

Se δ assume i valori $\delta_n = \frac{a_2 - a_1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ si ottiene una successione di curve

$$C_1, C_2, \cdots, C_n, \cdots \tag{7}$$

che si appoggiano alle rette r ed s.

Le funzioni che definiscono le curve della successione risultano per la (5), come si vede facilmente, ugualmente continue e poichè le curve si appoggiano ad un segmento finito della retta r anche ugualmente limitate; è possibile allora per un noto teorema estrarre dalla (7) una successione parziale

$$C_{n_1}, C_{n_2}, \cdots, C_{n_n}, \cdots \tag{7'}$$

di curve che convergono uniformemente verso una curva rettificabile C_0 di equazioni parametriche:

$$C_0 \equiv \{ x = x \quad ; \quad y = y_0(x) \quad ; \quad z = z_0(x) \}\ a_1 \leq x \leq a_2$$

che soddisfa al sistema (1) e alle condizioni (3) e che può prolungarsi in (a, b). Infatti dalle

$$y_{n_n}(x) = \xi_{n_n} + \int_{a_1}^{x - \delta_{n_n}} f(x; y_{n_n}(x), z_{n_n}(x))\, dx$$

$$z_{n_n}(x) = \eta_{n_n} + \int_{a_1}^{x - \delta_{n_n}} g(x; y_{n_n}(x), z_{n_n}(x))\, dx$$

segue per un noto teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale, che esistono i limiti per $n \to +\infty$ degli integrali a secondo membro e quindi anche $\lim_{n \to +\infty} \xi_{n_n} = \xi_0$, $\lim_{n \to +\infty} \eta_{n_n} = \eta_0$ e passando al limite per $n \to +\infty$ si ha:

$$y_0(x) = \xi_0 + \int_{a_1}^{x} f(x; y_0(x), z_0(x))\, dx$$

$$z_0(x) = \eta_0 + \int_{a_1}^{x} g(x; y_0(x), z_0(x))\, dx$$

ma essendo

$$\alpha_2 y_{n_n}(a_2) + \beta_2 z_{n_n}(a_2) + \gamma_2 = 0$$

segue

$$\alpha_2 y_0(a_2) + \beta_2 z_0(a_2) + \gamma_2 = 0$$

e quindi il teorema è completamente dimostrato [5].

5 Il teorema del n. 1 si può ottenere anche dai teoremi noti con un cambiamento delle funzioni incognite: ma abbiamo data tale dimostrazione perchè in tal modo risulta immediatamente il teorema n. 2.

Osservazione. – Notiamo che la dimostrazione contenuta in *b*) non ricorre ad alcuna approssimazione delle funzioni $f(x,y,z)$ e $g(x,y,z)$ (il che, a mio parere, rappresenta una maggiore semplificazione della dimostrazione).

2. Conservando, per il momento, l'ipotesi (5), cerchiamo di estendere il teorema precedente al caso in cui si richiede che le curve integrali del sistema (1') si appoggino a due curve contenute nei piani $x = a_1$ ed $x = a_2$.

Osserviamo, a proposito, che nella dimostrazione del teorema n. 1 la ipotesi che le curve [6] sono delle rette (non parallele, per la (4) è stata sfruttata per i seguenti fatti:

I°) *la curva s divide il piano* $x = a_2$ *in due regioni* σ_1 *e* σ_2.

II°) *nella proiezione sul piano* $x = a_2$ *nella direzione dell'asse x della curva r nella curva r', esistono due punti di r' rispettivamente nelle regioni* σ_1 *e* σ_2 *la cui distanza da s è non minore di*

$$\int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1 + 2\,[\varphi(x)]^2}\, dx\,.$$

Mediante queste osservazioni il teorema n. 1 viene senz'altro esteso:

TEOREMA n. 2. – *Sotto le stesse ipotesi* 1) *e* 2) *del teorema n. 1, se* $a \leq a_1 < a_2 \leq b$ *il sistema* (1') *ammette almeno una curva integrale* $C \equiv \{x = x\,;\ y = y(x)\,;\ z = z(x)\}\ a \leq x \leq b$ *con* $y(x)$ *e* $z(x)$ *assolutamente continue, e tali che si appoggi a due curve r ed s contenute rispettivamente nei piani* $x = a_1$, $x = a_2$ *se r ed s soddisfano alle ipotesi* I) *e* II) *sopra enunciate.*

Esempio. – Nel campo Γ:

$$\Gamma:\quad 0 \leq x \leq 1\quad,\quad y < +\infty\quad,\quad z < +\infty$$

il sistema

$$\begin{cases} y' = x \operatorname{sen} y \cos z \\ z' = \cos y \operatorname{sen} z \end{cases}$$

ammette almeno una soluzione in $(0\,,1)$ tale che

$$y^2(0) + z^2(0) = 4$$
$$y^2(1) + z^2(1) - 4z(1) = 0$$

Infatti in Γ

$$\left\{ \begin{array}{l} |x \operatorname{sen} y \cos z| \\ |\cos y \operatorname{sen} z| \end{array} \right\} \leq 1$$

ed

$$r)\ \begin{cases} y^2 + z^2 = 4 \\ x = 0 \end{cases}\quad,\quad s)\ \begin{cases} y^2 + z^2 - 4z = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

soddisfano all'ipotesi 1, evidentemente ed alla II) perchè i due punti $(2\,,0)$, $(-2\,,0)$ di r distano da s di $2 > \int_0^1 \sqrt{1+2}\, dx = \sqrt{3}$.

(6) Di cui una nel senso di JORDAN.

Di più, esistono evidentemente in generale almeno due curve integrali soddisfacenti al problema.

3. Facciamo cadere l'ipotesi 2) sostituendola con la seguente:

2 a) *Esistano due funzioni* $\varphi(x), \psi(x)$ *non negative, integrabili nell'intervallo* (a, b) *in modo che in tutto il campo* Γ:

$$\Gamma: \quad a \leq x \leq b \qquad |y| < +\infty \qquad |z| < +\infty$$

siano verificate le diseguaglianze:

$$(5') \qquad \left\{ \begin{matrix} |f(x;y,z)| \\ |g(x;y,z)| \end{matrix} \right\} \leq \varphi(x)\{|y| + |z|\} + \psi(x).$$

Supponiamo anche qui, per semplicità, che valga un criterio di unicità rispetto ai valori iniziali.

Seguendo la linea di dimostrazione del numero precedente è evidente che la (6) non vale più necessariamente, occorre sostituirla con un'altra analoga. Diciamo pertanto a_1, ξ, η, le coordinate di un punto generico P della curva r. Se $x = x$; $y = y(x)$; $z = z(x)$ sono le equazioni della curva integrale uscente da P (a_1, ξ, η) si ha per le (5')

$$|y(x)| + |z(x)| \leq |\xi| + |\eta| + 2\int_{a_1}^{x} \{\varphi(x)(|y(x)| + |z(x)|) + \psi(x)\}\, dx$$

e allora, per un noto lemma di Gronwall [7],

$$|y(x)| + |z(x)| \leq \{|\xi| + |\eta| + 2\int_{a_1}^{a_2} \psi(x)\, dx\}\, e^{2\int_{a_1}^{a_2} \varphi(x)\, dx}$$

e quindi

$$\left\{ \begin{matrix} |f(x;y(x),z(x))| \\ |g(x;y(x),z(x))| \end{matrix} \right\} \leq \varphi(x)\, e^{2\int_{a_1}^{a_2} \varphi(x)\, dx} \left\{ |\xi| + |\eta| + 2\int_{a_1}^{a_2} \psi(x)\, dx \right\} + \psi(x)$$

allora per l'assoluta continuità delle funzioni si ha:

$$(6') \qquad L_{C_P} \leq \int_{a_1}^{a_2} \left[1 + 2 \left\{ \varphi(x)\, e^{2\int_{a_1}^{a_2} \varphi(x)\, dx} \left(|\xi| + |\eta| + 2\int_{a_1}^{a_2} \psi(x)\, dx \right) \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx.$$

Posto $\rho = |\xi| + |\eta|$, supponiamo che ρ possa assumere valori grandi a piacere, cioè

III) *la curva* r *sia illimitata nei due sensi* [8].

(7) E. KAMKE, *Differentialgleichungen reeller Functionen*. Leipzig (1930) p. 93.

(8) Intendiamo dire che comunque si prenda un quadrato ed un punto P di r, ciascun arco in cui vien divisa r da P abbia un punto almeno esterno al quadrato.

Allora in corrispondenza di $\varepsilon > 0$ prendiamo ρ_ε sufficientemente grande in modo che

$$\frac{L_{C_\rho}}{\rho} < 2\int_{a_1}^{a_2} \varphi(x)\,dx\, e^{2\int_{a_1}^{a_2}\varphi(x)\,dx} + \varepsilon = \Theta + \varepsilon$$

cioè

$$L_{C_\rho} < \rho_\varepsilon(\Theta + \varepsilon). \tag{6'}$$

D'altra parte, indicando con $d[P, s]$ la distanza di un punto P da s, sostituiamo all'ipotesi II) del numero precedente la seguente:

II, a) *nella proiezione sul piano* $x = a_2$, *nella direzione dell'asse* x, *della curva* r *nella curva* r' *esistono in ambedue le regioni* σ_1, σ_2 *punti* $P'(\xi, \eta)$ *di* r' *tali che la distanza* $d[P', s]$ *soddisfi alla limitazione*:

$$d[P', s] > \mu\rho = \mu(|\xi| + |\eta|)$$

essendo $\mu > 0$, o in particolare, *che* $d[P', s]$ *sia infinita dello stesso ordine di* ρ, *cioè*

$$\lim_{\rho \to +\infty} \frac{d[P', s]}{\rho} = \mu \neq 0.$$

Ma allora se $\Theta < \mu$ si ha, per opportuni valori di ε e quindi di ρ

$$L_{C_\rho} < (\Theta + \varepsilon)\rho < \mu\rho < d[P', s]$$

il che prova che esiste almeno un punto della curva r tale che la curva integrale uscente da esso raggiunge il piano $x = a_2$ nella regione σ_1 ed almeno un punto tale che la curva integrale uscente da esso raggiunge il piano $x = a_2$ nella regione σ_2.

Ragionando quindi come nella dimostrazione dei teoremi n. 1, e n. 2 si prova il seguente (9):

TEOREMA n. 3. – *Sotto le ipotesi* I), 2 a), *se* $a \leq a_1 < a_2 \leq b$, *il sistema* (1') *ammette in* (a, b) *almeno una curva integrale* $x = x$; $y = y(x)$; $z = z(x)$ *con* $y(x)$ *e* $z(x)$ *assolutamente continue e tale che si appoggi a due curve* r *ed* s *contenute rispettivamente nei piani* $x = a_1$, $x = a_2$ *se* r *ed* s *soddisfano alle ipotesi* I), II, a), III) *e se*:

$$\Theta = 2\int_{a_1}^{a_2} \varphi(x)\,dx\, e^{2\int_{a_1}^{a_2}\varphi(x)\,dx} < \mu.$$

4. Ritorniamo ora al caso in cui le curve r ed s siano le due rette:

$$r) \quad \begin{cases} \alpha_1 y + \beta_1 z + \gamma_1 = 0 \\ x = a_1 \end{cases}, \qquad s) \quad \begin{cases} \alpha_2 y + \beta_2 z + \gamma_2 = 0 \\ x = a_2 \end{cases}$$

(9) Per dimostrare il teorema nella generalità in cui esso è enunciato, si possono svolgere considerazioni analoghe a quelle svolte nel n. 1 *b*).

le ipotesi I), III) sono soddisfatte, in quanto alla ipotesi II, a), detto ϑ l'angolo delle due rette, si ha

$$\lim_{\varrho \to +\infty} \frac{d[P', s]}{\rho} = \operatorname{sen} \vartheta$$

e quindi il teorema precedente è valido se [10]

$$\Theta < \mu = \operatorname{sen} \vartheta = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2)}}.$$

NOTA: Il procedimento contenuto nel n. 1, *b*) fu da me introdotto nella tesi di laurea presentata nel novembre del 1944; esso è stato riportato in *A proposito di alcuni teoremi sulle equazioni differenziali ordinarie*, « Rend. Sem. Mat. di Padova », XV (1946) nota (67) p. 121 da G. SCORZA DRAGONI.

Meccanica. — *Sul problema generale della trave poggiata su suolo elastico.* – II. *Applicazioni* (*). Nota di E. VOLTERRA, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

Completo in questa Nota lo studio della trave poggiata su suolo elastico, applicando le formule generali trovate ad alcuni casi di interesse pratico.

Per le premesse ed il significato dei simboli mi riferisco alla precedente Nota I, pubblicata su codesti « Rendiconti ». Anche la numerazione delle formule è fatta in continuazione.

Si supponga che la funzione $p(x)$ rappresenti un carico totale w distribuito uniformemente su di una lunghezza $2l$ tra $x = a - l$ ed $x = a + l$.

Il caso di un carico concentrato discende immediatamente facendo tendere l a zero ed il caso di una distribuzione qualsivoglia di carico applicando il principio di sovrapposizione. Si otterrà perciò

$$p(x) = \begin{cases} = 0 & \text{per: } x < a - l \\ = \dfrac{w}{2l} & \text{per: } a - l \leq x \leq a + l \\ = 0 & \text{per: } x > a + l \end{cases}$$

da cui segue:

$$(7) \qquad P(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{w}{2l} \int_{a-l}^{a+l} e^{ixu}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{w}{2l} \frac{1}{iu} \left\{ e^{i(a+l)u} - e^{i(a-l)u} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, w\, e^{iau} \frac{\sin lu}{lu}$$

(10) Osserviamo, come già abbiamo fatto in nota (6), che in questo caso (condizioni ai limiti lineari) risultati più precisi si possono ottenere dai risultati noti sul problema di NICOLETTI con un semplice cambiamento delle funzioni incognite.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta dell'8 marzo 1947.

nel caso limite di un carico concentrato nel punto $x = a$ si otterrebbe

$$P(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} w e^{iau}.$$

a) *Soluzione secondo l'ipotesi del Winkler.* – Si ha in questo caso:

$$\pi(x) = \lambda y(x)$$

Dall'equazione (2) si vede che ciò corrisponde alla funzione di Green:

$$k(x) = \frac{1}{\lambda}\delta(x) \tag{8}$$

ove $\delta(x)$ è una funzione definita in questo modo:

$$\delta(x) = 0 \quad \text{per} \quad x \neq 0$$

$$\delta(x) = \infty \quad \text{per} \quad x = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1.$$

Si ottiene

$$k(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\lambda}$$

e la soluzione sarà:

$$y(x) = \frac{w}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{e^{i(a-x)u}}{EIu^4 + \lambda} \frac{\sin lu}{lu} \right\} du = \frac{w}{\pi}\int_{0}^{\infty} \left\{ \frac{\cos(a-x)u \dfrac{\sin lu}{lu}}{EIu^4 + \lambda} \right\} du. \tag{9}$$

b) *Soluzione secondo l'ipotesi dello Jodi.* – Si avrà questo caso:

$$k(x) = Ae^{-B|x|}$$

e quindi

$$\left\{ \begin{aligned} K(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-B|x|} e^{ixu}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} Ae^{-B|x|} e^{ixu}\, dx + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} Ae^{-B|x|} e^{ixu}\, dx = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{1}{B + iu} + \frac{1}{B - iu} \right\} = \frac{2AB}{\sqrt{2\pi}(B^2 + u^2)} \end{aligned} \right. \tag{10}$$

e la soluzione sarà

$$y(x) = \frac{w}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{e^{i(a-x)u} \dfrac{\sin lu}{lu}}{EIu^4 + \dfrac{B^2 + u^2}{2AB}} \right\} du = \frac{w}{\pi}\int_{0}^{\infty} \left\{ \frac{\cos(a-x)u \dfrac{\sin lu}{lu}}{EIu^4 + \dfrac{B^2 + u^2}{2AB}} \right\} du. \tag{11}$$

Il termine $EI\,u^4$ delle espressioni (9) ed (11) assicura la convergenza degli integrali.

c) *Calcolo dei precedenti integrali* (9) *e* (11). – Il prof. Aldo Ghizzetti mi comunica la seguente osservazione sul calcolo della trasformata di Fourier di una funzione. Sia $f(w)$ una funzione olomorfa della variabile complessa $w = u + iv$ che abbia un numero finito di punti singolari: $w_1, w_2, \cdots, w_\mu$ di ordinata positiva, un numero finito di poli di 1° ordine $u_1, u_2, \cdots, u_\nu$ sull'asse reale, e verifica l'uguaglianza:

$$\lim_{v \to \infty} [w f(w)] \quad (\text{per} \quad v \geqq 0) = 0 . \tag{12}$$

Detto $r_h(\xi)$ $(h = 1, 2, \cdots, \mu)$ il residuo di $e^{i\xi w} f(w)$ sul punto w_h, $s_k(\xi)$ $(k = 1, 2, \cdots, \nu)$ il residuo della stessa funzione nel punto u_k, si ha per ξ reale e non negativo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi u} f(u)\, du = 2\pi i \sum_{h=1}^{\mu} r_h(\xi) + \pi i \sum_{k=1}^{\nu} s_k(\xi), \tag{13}$$

l'integrale essendo inteso nel senso di Cauchy. Si ha

$$s_k(\xi) = e^{i\xi u_k} \lim_{w \to u_k} [(w - u_k) f(w)], \qquad (k = 1, 2, \cdots, \nu)$$

e tale formula vale anche per il calcolo di $r_h(\xi)$ quando w_h è un polo di 1° ordine: invece se w_h è un polo di ordine $n + 1$ si ha:

$$r_h(\xi) = \sum_{s=0}^{n} \frac{(i\xi)^{n-s} e^{i\xi w_h}}{s!\,(n-s)!} \lim_{w \to w_h} \frac{d^s}{dw^s} [(w - w_h)^{n+1} f(w)]\,(1).$$

Allora, riprendendo la (9) e scrivendola nel modo seguente

$$y(x) = \frac{w}{4\pi i l\, EI} \{ F(a - x + l) - F(a - x - l) \}$$

ove si è posto

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi u}\, du}{u(u^4 + k^4)}$$

con $k = \left(\frac{\lambda}{EI}\right)^{\frac{1}{4}}$ e si osservi che $F(-\xi) = -F(\xi)$ si ottiene, calcolando $F(\xi)$ col metodo precedente:

(1) Cfr., per esempio, PICONE, *Appunti d'Analisi superiore*, vol. I, pp. 55 e 56 [2ª edizione a cura di C. Miranda e F. Ghizzetti, Rondinella, Napoli (1946)].

$$y(x) = \begin{cases} = \dfrac{w}{4l\lambda}\left\{ e^{-\frac{k}{\sqrt{2}}(a-x+l)} \cos\dfrac{k}{\sqrt{2}}(a-x-l) - e^{-\frac{k}{\sqrt{2}}(a-x+l)} \cos\dfrac{k}{\sqrt{2}}(a-x+l) \right\} \\ \qquad\qquad (\text{per: } x \leq a-l) \\ = \dfrac{w}{4l\lambda}\left\{ 2 - e^{\frac{k}{\sqrt{2}}(a-x-l)} \cos\dfrac{k}{\sqrt{2}}(a-x-l) - e^{-\frac{k}{\sqrt{2}}(a-x+l)} \cos\dfrac{k}{\sqrt{2}}(a-x+l) \right\} \\ \qquad\qquad (\text{per: } a-l \leq x \leq a+l) \\ = \dfrac{w}{4l\lambda}\left\{ -e^{\frac{k}{\sqrt{2}}(a-x-l)} \cos\dfrac{k}{\sqrt{2}}(a-x-l) + e^{\frac{k}{\sqrt{2}}(a-x+l)} \cos\dfrac{k}{\sqrt{2}}(a-x+l) \right\} \\ \qquad\qquad (\text{per: } x \geq a+l). \end{cases}$$

Procedendo analogamente per la (11), si trova

$$y(x) = \begin{cases} = \dfrac{wA}{2lB}\left\{ e^{-p(a-x-l)}\left[\cos q(a-x-l) + \dfrac{\alpha}{\beta}\sin q(a-x-l)\right] - \right. \\ \qquad \left. - e^{-p(a-x+l)}\left[\cos q(a-x+l) + \dfrac{\alpha}{\beta}\sin q(a-x+l)\right] \right\} \\ \qquad\qquad (\text{per: } x \leq a-l), \\ = \dfrac{wA}{2lB}\left\{ 2 - e^{p(a-x-l)}\left[\cos q(a-x-l) - \dfrac{\alpha}{\beta}\sin q(a-x-l)\right] - \right. \\ \qquad \left. - e^{-p(a-x+l)}\left[\cos q(a-x+l) + \dfrac{\alpha}{\beta}\sin q(a-x+l)\right] \right\} \\ \qquad\qquad (\text{per: } a-l \leq x \leq a+l), \\ = \dfrac{wA}{2lB}\left\{ -e^{p(a-x-l)}\left[\cos q(a-x-l) - \dfrac{\alpha}{\beta}\sin q(a-x-l)\right] + \right. \\ \qquad \left. + e^{p(a-x+l)}\left[\cos q(a-x+l) - \dfrac{\alpha}{\beta}\sin q(a-x+l)\right] \right\} \\ \qquad\qquad (\text{per: } x \geq a+l) \end{cases}$$

dopo aver posto:

$$\alpha = \frac{1}{4AB\,EI} \quad , \quad \beta = \alpha\sqrt{8\,AB^3\,EI - 1} \quad (\text{si suppone } 8\,AB^3\,EI > 1)$$

$$p = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2} + \alpha\right)} \quad , \quad q = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2} - \alpha\right)}.$$

È da osservare che l'integrale (9) è lo stesso di quello che compare nella formula risolutiva data da von Karman e Biot[2]; basta nella (9) fare i seguenti cambiamenti: λ in k, l in a; w in $2pa$; $a-x$ in x. La $w(x)$ di von Karman e Biot è quindi esprimibile elementarmente.

(2) Vedi formula (6.12) di p. 346, op. cit.

Idraulica. — *Ulteriori precisazioni sull'uso dei coefficienti di Coriolis nelle equazioni del moto di corrente.* Nota di G. Nebbia, presentata (*) dal Socio U. Bordoni.

1. In una Memoria dal titolo *I coefficienti di Coriolis nelle equazioni del moto di corrente*, apparsa negli « Atti della Fondazione Politecnica per il Mezzogiorno d'Italia », vol. II, 1942, rilevata l'incompatibilità esistente tra le due espressioni del moto di corrente gradualmente varia di fluido reale che si deducono rispettivamente dal principio dell'energia e da quello delle quantità di moto, ne attribuivo la causa al diverso errore che si commette nell'impiegare in entrambe, quella stessa espressione della perdita unitaria di carico che, a parità di altre circostanze, si adotta nel moto uniforme.

L'argomento è stato successivamente oggetto di indagini del prof. Di Ricco (1), mie (2) e più recentemente del prof. Puppini (3). Poichè sussiste ancora qualche sostanziale differenza di vedute, reputo necessario riprenderlo brevemente per chiarire e confermare le basi su cui si fondano le mie Memorie innanzi citate.

2. L'espressione differenziale del teorema di Bernoulli

$$\frac{1}{2g}\frac{dv^2}{ds} = -\frac{d}{ds}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) \tag{1}$$

in cui i simboli hanno il significato ricorrente in idraulica, anche se per opportunità didattiche è talora dedotta per vie diverse, discende in sostanza direttamente dal secondo principio della dinamica:

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \mathbf{R} \tag{2}$$

applicato al punto materiale di fluido perfetto incomprimibile in moto permanente. Diamo in effetti all'elemento di fluido la configurazione di un cilindretto di base $d\sigma$ normale a $\boldsymbol{s}$ e di lunghezza ds, orientata come $\boldsymbol{v}$: la massa m diviene $\frac{\gamma}{g} d\sigma\, ds$ e la componente secondo $\boldsymbol{s}$ della risultante $\mathbf{R}$ delle forze agenti su m è a sua volta $-\gamma\frac{d}{ds}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right)\cdot d\sigma\, ds$; talchè la (2) ci conduce agevolmente alla relazione scalare:

$$\frac{\gamma}{g} d\sigma\, ds \frac{dv}{dt} = -\gamma\frac{d}{ds}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) d\sigma\, ds \tag{3}$$

(*) Nella seduta del 14 dicembre 1946.

(1) G. Di Ricco, *Sui coefficienti di Coriolis per il moto lineare.* « Ricerche di Ingegneria », gennaio–febbraio 1943.

(2) G. Nebbia, *Compatibilità della equazione specifica e della equazione globale per il moto di corrente.* « La Ricerca Scientifica », ottobre–novembre–dicembre 1943.

(3) U. Puppini, *Sulla equazione del regime permanente nelle correnti liquide.* « Atti della Accademia di Scienze di Bologna », 1944.

dalla quale, per essere, nel moto permanente, $\frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{ds}$, si deduce direttamente la (1).

L'espressione (2) del secondo principio della dinamica si interpreta anche come principio delle quantità di moto, e quindi la (1) può considerarsi come derivante dall'applicazione del principio stesso al punto materiale del fluido.

Allorchè, soddisfatte le condizioni necessarie per la gradualità del movimento, compendiate nella locuzione convenzionale di parallelismo dei filetti, ci proponiamo di estendere l'equazione di Bernoulli all'intera corrente, il procedimento che, in relazione alle precedenti interpretazioni, occorrerà seguire, consiste nell'applicare la (2) a tutti gli elementi $d\sigma\, ds$ che costituiscono lo straterello avente per base la sezione trasversale σ della corrente e per spessore ds. In altri termini, consideriamo questo straterello, compreso tra le due sezioni trasversali distanti ds, come un sistema di elementi vincolati, e ad esso applichiamo ancora il teorema delle quantità di moto

$$\Sigma m \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \Sigma \mathbf{R} \tag{4}$$

in cui il sommatorio del primo membro va esteso a tutte le masse del sistema e quello del secondo a tutte le forze esterne, attive e vincolari, agenti su di esse.

Nel nostro caso, dunque, in cui velocità e accelerazioni hanno la stessa direzione $\boldsymbol{s}$, dalla relazione vettoriale (4) potremo dedurre agevolmente la equivalente relazione scalare corrispondente alla (3), e, trattandosi di un sistema continuo, ai sommatori potremo sostituire gli integrali, nell'ovvia intesa che quello del primo membro dovrà essere esteso alla massa $\frac{\gamma\sigma}{g} ds$ dello straterello o, ciò che è lo stesso per fluido incomprimibile, al volume σds; quello del secondo, all'area σ della sezione trasversale. Si deduce dunque:

$$\frac{1}{2g}\int_{\sigma ds} \frac{dv^2}{ds}\, d\sigma\, ds = -\, ds \int_{\sigma} \frac{d}{ds}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) d\sigma\,. \tag{5}$$

E già a questo punto, tenuto presente che la massa del sistema a cui si applica la (4) va considerata costante, nel senso che non varia nè con s nè con t, e che quindi il campo σds deve a sua volta esser considerato costante, quando la legge di distribuzione delle v non varia con la s potremmo ritenere lecito invertire l'ordine delle operazioni di integrazione e di derivazione indicate nel primo membro della (5), con la esplicita avvertenza che, a inversione avvenuta, poichè si considera costante ds, nell'eseguire la derivazione occorrerà considerare costante anche σ.

Ad ogni modo, per maggiore chiarezza osserviamo che può porsi:

$$\frac{\gamma}{g} d\sigma\, ds \frac{dv}{dt} = \frac{\gamma}{g} \cdot v d\sigma \cdot \frac{dv}{ds} ds = \frac{\gamma}{g} dQ \cdot \frac{dv}{ds} ds\,.$$

E poichè $dQ = v\,d\sigma$ rappresenta la portata del tubicino di flusso di sezione trasversale $d\sigma$, alla precedente può darsi la consueta interpretazione: nel moto permanente di fluido incomprimibile la derivata sostanziale della quantità di moto dell'elemento $\frac{\gamma}{g}\,d\sigma\,ds$ di un tubicinio di flusso è eguale alla differenza tra le quantità di moto che la portata del tubo di flusso possiede rispettivamente nell'uscire dall'elemento di volume $d\sigma\,ds$ e nell'entrarvi.

Ne discende l'ovvia conseguenza

$$\frac{1}{2}\int_{\sigma ds}\frac{dv^2}{ds}\,d\sigma\,ds = ds\int_{Q}\frac{dv}{ds}\,dQ$$

essendo Q la portata dell'intera corrente; talchè, sostituendo in (5):

$$\frac{1}{g}\int_{Q}\frac{dv}{ds}\,dQ = -\int_{\sigma}\frac{d}{ds}\left(z+\frac{p}{\gamma}\right)d\sigma. \tag{5'}$$

Poichè, nelle nostre ipotesi di moto permanente gradualmente vario, $\frac{d}{ds}\left(z+\frac{p}{\gamma}\right)$ ha uno stesso valore in tutti i punti di σ, e il campo di integrazione Q è indipendente da s e gode della proprietà che in tutti i punti di ciascuno dei suoi elementi $dQ = v\,d\sigma$ la velocità v ha lo stesso valore che ha alla base $d\sigma$, risultano del tutto legittimi i seguenti passaggi:

$$\int_{\sigma}\frac{d}{ds}\left(z+\frac{p}{\gamma}\right)d\sigma = \sigma\,\frac{d}{ds}\left(z+\frac{p}{\gamma}\right)$$

$$\int_{Q}\frac{dv}{ds}\,dQ = \frac{d}{ds}\int_{Q} v\,dQ = \frac{d}{ds}\int_{\sigma} v^2\,d\sigma = \frac{d}{ds}\left(\beta V^2\sigma\right)$$

avendo indicato con V la velocità media definita dalla relazione

$$V = \frac{\int_{\sigma} v\,d\sigma}{\sigma} \tag{6}$$

e con β l'espressione:

$$\beta = \frac{\int_{\sigma} v^2\,d\sigma}{V^2\sigma} \tag{7}$$

fatte le debite sostituzioni, la (5') diviene dunque:

$$\frac{1}{g}\,\frac{d}{ds}\left(\beta V^2\sigma\right) = -\sigma\,\frac{d}{ds}\left(z+\frac{p}{\gamma}\right).$$

Dalla quale, nella ipotesi di β costante, si ricava:

$$\frac{\beta}{2g}\,\frac{dV^2}{ds} = -\frac{d}{ds}\left(z+\frac{p}{\gamma}\right) \tag{8}$$

mentre nella ipotesi di β funzione di s, si giunge, attraverso semplici passaggi, a:

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{d(\beta V^2)}{ds} + V^2\frac{d\beta}{ds}\right) = -\frac{d}{ds}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right). \tag{9}$$

Le (8) e (9) sono precisamente le relazioni dedotte, anche nelle mie precedenti Memorie, dal principio delle quantità di moto; relazioni che potrebbero ottenersi ancor più semplicemente applicando la prima equazione globale dell'equilibrio dinamico al volume $\sigma\, ds$.

3. Ma per l'estensione del teorema di Bernoulli si è adottato anche il procedimento indicato dalla seguente relazione:

$$\frac{1}{2g}\int_\sigma \frac{dv^2}{ds}\, d\sigma = -\int_\sigma \frac{d}{ds}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) d\sigma = -\sigma\frac{d}{ds}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right). \tag{10}$$

Tenuto conto che il campo di integrazione σ è funzione di s e ammesso che perciò, in base alla regola di derivazione di funzioni composte, possa porsi:

$$\frac{d}{ds}\int_\sigma v^2\, d\sigma = \int_\sigma \frac{dv^2}{ds}\, d\sigma + \beta V_c^2\frac{d\sigma}{ds} \tag{11}$$

in cui V_c^2 indica un opportuno valore medio della v^2 al contorno di σ, dalla (10), per β costante, si è giunti al seguente risultato:

$$\frac{\beta}{2g}\frac{dV^2}{ds} + \frac{\beta}{2g\sigma}(V^2 - V_c^2)\frac{d\sigma}{ds} = -\frac{d}{ds}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right). \tag{12}$$

E la (12), eccezione fatta per il particolarissimo caso di $V_c = V$, è incompatibile con la (8) dalla quale differisce per il termine in genere non trascurabile

$$\frac{\beta}{2g\sigma}(V^2 - V_c^2)\frac{d\sigma}{ds}.$$

4. D'altra parte, posto:

$$\alpha = \frac{\int_\sigma v^3\, d\sigma}{V^3\sigma}$$

dalla (1), moltiplicata per $v\, d\sigma = dQ$, cioè dalla:

$$\frac{1}{2g}\frac{dv^2}{ds}\cdot v\, d\sigma = -\frac{d}{ds}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right)\cdot v\, d\sigma \tag{13}$$

che può dedursi anche in applicazione del principio dell'energia all'elemento $\frac{\gamma}{g}\, d\sigma\, ds$, integrando al campo Q si ottengono, rispettivamente per α costante e per α variabile con s, le relazioni non controverse:

$$(14) \qquad \frac{\alpha}{2g}\frac{dV^2}{ds} = -\frac{d}{ds}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right)$$

$$(15) \qquad \frac{1}{2g}\frac{d(\alpha V^2)}{ds} = -\frac{d}{ds}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right).$$

Operiamo invece sulla (13) con lo stesso procedimento seguìto nel dedurre la (12), ossia integriamo dapprima al campo σ :

$$(16) \qquad \frac{1}{2g}\int_\sigma \frac{dv^2}{ds} v\, d\sigma = \frac{1}{2g}\frac{2}{3}\int_\sigma \frac{dv^3}{ds} d\sigma = -\frac{d}{ds}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right)\int_\sigma v\, d\sigma$$

e applichiamo poi la regola di derivazione di funzioni composte allo stesso modo in cui l'abbiamo applicata nel dedurre la (11), ammettendo cioè di poter porre:

$$\frac{d}{ds}\int_\sigma v^3\, d\sigma = \int_\sigma \frac{dv^3}{ds} d\sigma + \alpha V_c'^3 \frac{d\sigma}{ds}$$

in cui $V_c'^3$ è al solito una *conveniente media* di v^3 al contorno di σ. Con passaggi elementari, per α indipendente da s, si trova:

$$\frac{2}{3}\int_\sigma \frac{dv^3}{ds} d\sigma = \frac{2}{3}\left[\frac{d}{ds}(\alpha V^3 \sigma) - \alpha V_c'^3 \frac{d\sigma}{ds}\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\left[\alpha\sigma\frac{dV^3}{ds} + \alpha (V^3 - V_c'^3)\frac{d\sigma}{ds}\right] = \alpha\sigma V\left[\frac{dV^2}{ds} + \frac{2}{3}\frac{\alpha}{\sigma V}(V^3 - V_c'^3)\frac{d\sigma}{ds}\right].$$

Onde, fatte le debite sostituzioni in (16), si giunge in definitiva alla relazione:

$$(17) \qquad \frac{\alpha}{2g}\frac{dV^2}{ds} + \frac{\alpha}{3g\sigma V}(V^3 - V_c'^3)\frac{d\sigma}{ds} = -\frac{d}{ds}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right)$$

la quale a sua volta, salvo che per il particolare caso $V_c' = V$, è incompatibile con la (14), da cui differisce per il termine non sempre trascurabile:

$$\frac{\alpha}{3g\sigma V}(V^3 - V_c'^3)\frac{d\sigma}{ds}.$$

Resta dunque a chiarire l'origine di queste discordanze: ne risulterà chiarito anche quali dei procedimenti siano realmente applicabili al processo meccanico in esame.

5. Nella ipotesi di β costante, pensiamo in un primo tempo v^2 come una funzione di s definita a mezzo di una coppia di variabili arbitrarie x, y, nel campo σ e al suo contorno, ma indipendente dall'area σ a sua volta funzione di s. Posto dunque per maggior chiarezza:

$$\varphi = \int v^2\, d\sigma$$

φ può essere considerata funzione composta di s e di $\sigma(s)$, talchè la regola di derivazione di funzioni composte ci dà senz'altro:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial s} + \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\frac{d\sigma}{ds} \tag{18}$$

ossia:

$$\frac{d}{ds}\int_{\sigma} v^2\, d\sigma = \frac{\partial}{\partial s}\int_{\sigma} v^2\, d\sigma + \frac{\partial}{\partial\sigma}\int_{\sigma} v^2\, d\sigma \cdot \frac{d\sigma}{ds}. \tag{19}$$

Nella valutazione del primo termine del secondo membro della precedente, poichè bisogna prescindere dalla variabilità di σ, è lecito invertire l'ordine delle due operazioni e porre quindi:

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_{\sigma} v^2\, d\sigma = \int_{\sigma} \frac{dv^2}{ds}\, d\sigma. \tag{20}$$

Per la valutazione del secondo termine, non abbiamo altro mezzo a disposizione che quello normale della ricerca del limite del rapporto incrementale; cioè, tenuto presente che v^2 è indipendente da σ:

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\int_{\sigma} v^2\, d\sigma = \lim_{\Delta\sigma\to 0} \frac{\int_{\sigma+\Delta\sigma} v^2\, d\sigma - \int_{\sigma} v^2\, d\sigma}{\Delta\sigma} = \lim_{\Delta\sigma\to 0} \frac{\int_{\Delta\sigma} v^2\, d\sigma}{\Delta\sigma}.$$

Per il teorema della media potremo porre

$$\int_{\Delta\sigma} v^2\, d\sigma = \beta V_m^2\, \Delta\sigma$$

essendo V_m^2 un *adatto* valor medio di v^2 in $\Delta\sigma$. Risulta quindi

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\int_{\sigma} v^2\, d\sigma = \beta \lim_{\Delta\sigma\to 0} V_m^2 = \beta V_c^2. \tag{21}$$

Sostituendo quest'ultima espressione e la (20) nella (19) ritorniamo alla:

$$\frac{d}{ds}\int_{\sigma} v^2\, a\sigma = \int_{\sigma} \frac{dv^2}{ds}\, d\sigma + \beta V_c^2 \frac{d\sigma}{ds} \tag{11}$$

che ci ha condotto alla (12).

Pensiamo invece v^2 come una funzione di s, definita sempre nel campo σ e al contorno, e dipendente anche dall'area σ. La

$$\varphi = \int_{\sigma} v^2\, d\sigma$$

sarà ancora una funzione composta di s e σ, ma in essa dovremo considerare v^2 funzione implicita di σ.

Ciò posto, le relazioni (18), (19), (20) restano valide anche in queste nuove ipotesi; ma nella valutazione dell'ultimo termine della (19) il procedimento del limite del rapporto incrementale si complica poichè v^2 è funzione implicita di σ. Possiamo tuttavia girare la difficoltà ricorrendo alla relazione che definisce la dipendenza tra v^2 e σ, cioè alla relazione di definizione

$$\beta = \frac{\int_\sigma v^2 \, d\sigma}{V^2 \sigma} \tag{7}$$

dalla quale si deduce:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \int_\sigma v^2 \, d\sigma = \beta V^2 .$$

Sostituendo quest'ultima e la (20) in (19) si trova:

$$\frac{d}{ds} \int_\sigma v^2 \, d\sigma = \int_\sigma \frac{dv^2}{ds} \, d\sigma + \beta V^2 \frac{d\sigma}{ds} . \tag{22}$$

Se infine sostituiamo nella (10) il valore di $\int_\sigma \frac{dv^2}{ds} \, d\sigma$ dato dalla precedente, si ottiene, tenuta presente la (7):

$$\frac{\beta}{2g} \frac{dV^2}{ds} + \beta \frac{V^2 - V^2}{2g\sigma} \frac{d\sigma}{ds} = - \frac{d}{ds} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right)$$

cioè si ritrova la (8).

7. In sostanza abbiamo dunque trovato le due espressioni:

$$\int_\sigma \frac{dv^2}{ds} \, d\sigma = \frac{d}{ds} \int_\sigma v^2 \, d\sigma - \beta V_c^2 \frac{d\sigma}{ds} \tag{11'}$$

$$\int_\sigma \frac{dv^2}{ds} \, d\sigma = \frac{d}{ds} \int_\sigma v^2 \, d\sigma - \beta V^2 \frac{d\sigma}{ds} . \tag{22'}$$

Ove si seguano nei particolari i passaggi con cui si sono dedotte rispettivamente le relazioni discordi (12) e (8), si riscontra che il primo termine del secondo membro di (11') e (22') ha in entrambe uno stesso valore dedotto dalle leggi (6) e (7) che legano v e v^2 all'area σ; dalle stesse leggi dipende pure l'ultimo termine della (22'), mentre ne è indipendente l'ultimo della (11'). In conseguenza le due espressioni di $\int_\sigma \frac{dv^2}{ds} \, d\sigma$ sono diverse, e cioè quella fornita da (22') risponde a sua volta alle leggi (6) e (7), mentre ne è indipendente quella fornita da (11').

Sotto l'aspetto matematico la differenza tra i due procedimenti consiste dunque nel fatto che, allorquando dalla (10) si passa alla (12) si prescinde dai legami intercedenti tra v , v^2 e σ i quali sono invece portati in conto quando dalla (10) si passa alla (8). E dal punto di vista meccanico ciò implica, come si potrebbe agevolmente controllare, che nel primo caso la valutazione del-

l'incremento di quantità di moto dello straterello $\frac{\gamma}{g}\sigma\, ds$ viene fatto sostituendo $\left(\text{per } \frac{d\sigma}{ds} > 0\right)$ elementi periferici con altri di zone centrali dotati di egual massa ma di diversa quantità di moto, o viceversa $\left(\text{per } \frac{d\sigma}{ds} < 0\right)$ sostituendo elementi di zone centrali con fittizi elementi periferici; nel secondo caso invece gli elementi restano immutati.

E poichè non può revocarsi in dubbio che l'estensione del teorema di Bernoulli vada fatto sotto l'osservanza della relazione di continuità (6) e della (7), e che nell'applicazione del principio delle quantità di moto non siano consentite le arbitrarie sostituzioni di masse di cui sopra, sembra lecito concludere che, delle due relazioni incompatibili (8) e (12), solo la prima sia atta a rappresentare il processo meccanico del moto gradualmente vario.

Allo stesso modo, cioè con ragionamenti in sostanza identici, sui quali sarebbe fuor di posto attardarsi, si trova che delle due relazioni pure incompatibili (14) e (17) solo la prima, ormai tradizionale, risponde al processo meccanico in esame.

Giova infine rilevare che il procedimento seguìto nel dedurre la (22) non potrebbe essere agevolmente esteso al caso di β variabile con s: anche a prescindere dal fatto che, intervenendo variazioni nella legge di distribuzione delle velocità, bisognerebbe a rigore avvalersi dei procedimenti del calcolo delle variazioni, e, ammesso, come sembra lecito, che le variazioni della predetta legge possano esser portate in conto a mezzo del solo parametro algebrico β, si può tuttavia riconoscere, e si riscontrerà tra breve, che, supposto v^2 funzione di s, di β e di σ, β risulta a sua volta funzione unicamente di σ; e sino a quando non si conosca la $\beta\,(\sigma)$ non si può valutare la

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\int_{\sigma} v^2\, d\sigma,$$

che occorrerebbe sostituire nella (19). Ma la discussione precedente ha in sostanza confermato la correttezza del procedimento che, con la sostituzione del campo di integrazione Q al campo σ, ci conduce direttamente alle (8) e (14); ne restano quindi confermate anche la (9) e la (15) che sono state dedotte con lo stesso procedimento.

8. Riassumendo, dunque, per β e α costanti, le relazioni

$$\text{(8)} \qquad \frac{\beta}{2g}\frac{dV^2}{ds} = -\frac{d}{ds}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right)$$

$$\text{(14)} \qquad \frac{\alpha}{2g}\frac{dV^2}{ds} = -\frac{d}{ds}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right)$$

che possono considerarsi rispettivamente derivanti dal principio delle quantità di moto e da quello dell'energia, risultano parimenti legittime nei limiti di approssimazione insiti nello schema meccanico del moto gradualmente vario.

Per la compatibilità delle due relazioni dovrà dunque essere $\alpha = \beta$, e ciò di norma implica $\alpha = \beta = 1$ e $v = V$. Cioè, *nel moto permanente gradualmente vario di fluido perfetto incomprimibile*, se la *legge di distribuzione delle velocità non varia da sezione a sezione, la velocità ha di regola* [4] *uno stesso valore in tutti i punti di ciascuna sezione, il moto è irrotazionale e la costante di Bernoulli ha a sua volta un unico valore in tutto il campo occupato dal fluido.*

Se la legge di distribuzione delle v varia da sezione a sezione, dovranno invece sussistere la (9) e la (15); ne deriva la condizione di compatibilità

$$\frac{d[(\alpha - \beta) V^2]}{ds} = V^2 \frac{d\beta}{ds}. \tag{23}$$

Per scostamenti $v - V$ non molto rilevanti, posto:

$$\beta = 1 + \eta \quad \text{e quindi} \quad \alpha = 1 + 3\eta$$

dalla (23) si deduce:

$$\eta = \frac{K}{V^4} = K' \sigma^4 \tag{24}$$

in cui K e K' sono due costanti legate dalla relazione $K' = \frac{K}{Q^4}$ [5]. Queste leggi appunto, che per altro avevo già segnalato nella seconda delle Memorie precedentemente citate, mi sembrano i risultati più salienti emersi dalla rinnovata discussione sui coefficienti di Coriolis.

9. Nelle correnti permanenti gradualmente varie di fluidi reali α e β di norma non variano apprezzabilmente da sezione a sezione e sono tuttavia diversi tra loro.

Le espressioni:

$$-\frac{d}{ds}\left(z + \frac{p}{\gamma} + \beta \frac{V^2}{2g}\right) = J \tag{8'}$$

$$-\frac{d}{ds}\left(z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{V^2}{2g}\right) = J \tag{14'}$$

che si ricavano rispettivamente da (8) e (14), introducendo la perdita di carico unitario J valutata con le stesse relazioni del moto uniforme, sono realmente incompatibili tra loro, e ciò deriva dal diverso errore che si commette nell'attribuire in entrambe a J uno stesso valore. Per maggiori chiarimenti a riguardo e per le proposte avanzate per eliminare gli inconvenienti che derivano dall'uso di due relazioni incompatibili, si rinvia alle Memorie citate.

(4) Si intende escludere i casi, irrealizzabili nel moto gradualmente vario di fluidi reali, in cui si possa avere $\alpha = \beta$ diversi da 1. Perchè questa condizione si verifichi occorre che sia $2\int_\sigma (v - V)^2 d\sigma = -\int_\sigma (v - V)^3 d\sigma$, e ciò potrebbe riscontrarsi solo per valori elevati degli scostamenti $v - V$.

(5) La (24) conferma che, nel moto permanente gradualmente vario di fluidi perfetti, quando la legge di distribuzione vari da sezione a sezione, β dipende, come si è rilevato innanzi, unicamente da σ.

Fisica (Acustica). — *Impedenza meccanica specifica dei tubi di piccola sezione* (*). Nota di I. BARDUCCI, presentata (**) dal Socio U. BORDONI.

1. PREMESSA. – Nelle applicazioni dell'acustica interessa spesso poter calcolare l'*impedenza meccanica specifica* (o l'*impedenza acustica*) di tubi le cui dimensioni (lunghezza compresa) siano piccole rispetto alla lunghezza d'onda del suono. In questo calcolo occorre prendere in considerazione: *a*) la reattanza della massa d'aria contenuta nel tubo; *b*) l'effetto della viscosità e della conduzione termica; *c*) la radiazione. L'importanza relativa degli elementi sopra elencati dipende dalle dimensioni geometriche del sistema e dalla lunghezza d'onda.

Il calcolo della reattanza della massa d'aria è immediato, qualunque sia la forma della sezione del tubo; invece il contributo alla impedenza del tubo della viscosità e della conduzione termica e quello della radiazione, si sanno calcolare solamente in alcuni casi più semplici.

I soli tubi che siano stati studiati in modo completo sono quelli di sezione circolare, per i quali, con qualche ipotesi restrittiva sulla radiazione, si sa calcolare l'impedenza qualunque sia il raggio (1). Un altro caso relativamente semplice, e che ha trovato, anche di recente, una interessante applicazione tecnica (2) è quello delle fenditure rettangolari (tubi di sezione rettangolare con uno dei lati assai piccolo rispetto all'altro).

Nella presente Nota, dopo aver richiamato i principali risultati relativi ai tubi di sezione circolare, si prende in esame il caso più generale nel quale la sezione del tubo ha una forma qualunque. Applicando una formula di Rayleigh (3) – con una ipotesi semplificativa che permette di tener conto, oltre che della viscosità, anche della conduzione termica – e confrontandola con le relazioni valide, rispettivamente, per i tubi di sezione circolare e per le fenditure rettangolari, si giunge ad una espressione della *impedenza meccanica specifica* di un tubo in funzione della frequenza e di un parametro geometrico caratteristico, la quale è valida, almeno in prima approssimazione, qualunque sia la forma della sezione (4). Si calcola, inoltre, un coefficiente numerico caratteristico del tubo, ed interessante per le applicazioni,

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale di Elettroacustica « O. M. Corbino ».

(**) Nella seduta dell'8 marzo 1947.

(1) Per quello che si riferisce all'effetto della viscosità e della conduzione termica, il problema è stato trattato diffusamente anche dall'A. in una recente Nota: *Effetto della viscosità e della conduzione termica in un risuonatore acustico*. « Atti Acc. Naz. Lincei », vol. I, ser. 8ª, 1946, p. 764.

(2) H. F. OLSON, *Tone guard*, « J. A. S. A. », vol. 12, 1941, p. 374.

(3) RAYLEIGH, *The theory of sound*. MacMillan, London, 1929, 2ª ediz., vol. II, p. 319, (formula (10).

(4) Purchè, però, sia trascurabile l'impedenza di radiazione, cioè per tubi non troppo corti rispetto alle dimensioni trasversali.

il quale, nella analogia elettromeccanica classica, corrisponde al *fattore di merito* di una bobina.

2. Impedenza di un tubo. – È opportuno ricordare, in primo luogo, che nello studio dei sistemi acustici si possono considerare tre specie di impedenze:

1° Impedenza meccanica $\mathfrak{Z}_M$ = forza/velocità;

2° Impedenza meccanica specifica [5] $\mathfrak{Z}_S$ = pressione acustica/velocità.

3° Impedenza acustica $\mathfrak{Z}_A$ = pressione acustica/portata acustica.

Fra le tre impedenze sussiste, come è noto, la relazione:

$$(1) \qquad \mathfrak{Z}_S = \frac{\mathfrak{Z}_M}{S} = \mathfrak{Z}_A S$$

dove S è, in generale, un'area equivalente che, nel caso dei tubi, si identifica con l'area della sezione trasversale del tubo.

Per le (1) basta, quindi, calcolare una sola delle tre impedenze, per esempio quella meccanica specifica, perchè si ricavino immediatamente anche le altre due.

Ciò premesso, l'impedenza meccanica specifica $\mathfrak{Z}_S$ di un tubo (piccolo rispetto alla lunghezza d'onda) è del tipo:

$$(2) \qquad \mathfrak{Z}_S = \mathfrak{R}_S + j\omega\,\mathfrak{M}_S \qquad (g\cdot cm^{-2}\,sec^{-1})$$

con: $\mathfrak{R}_S$ $(g\cdot cm^{-2}\,sec^{-1})$ = *Resistenza meccanica specifica*, ed $\mathfrak{M}_S$ $(g\cdot cm^{-2})$ = = *massa meccanica specifica*. Per un dato tubo, tanto $\mathfrak{R}_S$ quanto $\mathfrak{M}_S$ variano, in generale, con la frequenza.

3. Richiami sui tubi di sezione circolare. – Per i tubi di sezione circolare [6] conviene introdurre un parametro adimensione x, definito da:

$$(3) \qquad x = r\sqrt{\frac{\omega}{\bar{\nu}}}$$

dove: r (cm) = raggio del tubo; $\omega = 2\pi f$ (sec^{-1}) = pulsazione; $\bar{\nu}$ $(cm^2\,sec^{-1})$ = = *viscosità cinematica equivalente*, nella quale è conglobato anche l'effetto della conduzione termica. Per $x > 10$, da una formula di Kirchhoff si calcola $\bar{\nu} = 2{,}18\,\nu$ (se ν è la costante di viscosità cinematica dell'aria). Quando invece $x \leq 1$ si deve prendere semplicemente $\bar{\nu} = \nu$.

Si ha allora:

$$(4) \qquad \mathfrak{R}_S = \bar{\nu}\,\frac{(\varphi\,x^2)}{r^2}\,\mathfrak{M}'_S \quad ; \quad \mathfrak{M}_S = \psi\,\mathfrak{M}'_S$$

dove: $\mathfrak{M}'_S = \rho l$ $(g\cdot cm^{-2})$ è la massa meccanica specifica dell'aria contenuta nel tubo (cioè nel volume $\pi r^2 l$); l (cm) è la lunghezza del tubo, e

(5) Detta anche impedenza acustica specifica.

(6) Vedere la nota dell'A. citata in precedenza. Come si è avvertito nel par. 1, in tutto quanto segue si considera sempre trascurabile l'impedenza di radiazione.

ρ (g·cm^{-3}) è la densità dell'aria. Il *coefficiente di resistenza* φ ed il *coefficiente di massa* ψ – reali, positivi e adimensionali – sono dati, in generale, da espressioni piuttosto complicate in termini di funzioni di Bessel dell'argomento x; nei due casi estremi, però, $x \leq 1$ ed $x > 10$, cioè per raggi estremamente piccoli (frazioni di mm) e frequenze basse (decine di Hz) e, rispettivamente, raggi non troppo piccoli (dell'ordine di 1 mm, o più) e frequenze più elevate (qualche centinaio di Hz, o più), valgono espressioni assai più semplici. Precisamente, per $x > 10$, φ e ψ sono dati da espressioni approssimate che, al crescere di x, differiscono sempre meno da quelle che si ricavano da una formula di Helmholtz, le quali ultime sono:

$$(5) \qquad \varphi = \sqrt{2}/x \quad ; \quad \psi = 1 + \sqrt{2}/x \, .$$

Per $x \leq 1$, invece, si trova:

$$(6) \qquad \mathcal{R}_S = \frac{8\,\eta\,l}{r^2} \quad , \quad \mathcal{M}_S = \frac{4}{3}\,\rho\,l$$

dove: $\eta = \nu/\rho$ (g·cm^{-1} sec^{-1}) = costante di viscosità dinamica.

Si osserva che le (6) dànno per $\mathcal{R}_S$ ed $\mathcal{M}_S$ valori indipendenti dalla frequenza; invece le analoghe espressioni di $\mathcal{R}_S$ ed $\mathcal{M}_S$ che si ricavano per $x > 10$, sostituendo le (5) nelle (4), sono funzioni della frequenza, attraverso i coefficienti numerici (φx^2) e ψ.

4. SEZIONE DI FORMA QUALUNQUE. – Per tubi di sezione piccola di forma qualunque si ha, in primo luogo, una formula di Rayleigh [7] che è la generalizzazione di quella di Helmholtz, già ricordata per la sezione circolare. Dalla formula di Rayleigh si ricava:

$$(7) \qquad \mathcal{R}_S = \bar{\nu}\varphi' \left(\frac{\mathcal{S}}{2S}\right)^2 \mathcal{M}'_S = \varphi' \bar{\eta} l \left(\frac{\mathcal{S}}{2S}\right)^2$$

$$(7') \qquad \mathcal{M}_S = \psi \mathcal{M}'_S = \psi \rho l$$

con: $\bar{\eta} = \bar{\nu}/\rho$ (g·cm^{-1} sec^{-1}) = viscosità dinamica equivalente, e:

$$(8) \qquad \varphi' = \varphi x^2 \quad ; \quad x = \frac{2S}{\mathcal{S}} \sqrt{\frac{\omega}{\bar{\nu}}}$$

dove: S (cm^2) = sezione trasversale del tubo; $\mathcal{S}$ (cm) = perimetro di tale sezione. I coefficienti φ e ψ sono ancora dati dalle (5).

Si verifica immediatamente che, per la sezione circolare le (7) (8) si identificano con le (4) (5), e quindi la formula di Rayleigh contiene, come caso particolare, quella di Helmholtz.

Si deve osservare che Rayleigh considera l'effetto della viscosità, ma non quello della conduzione termica, ciò che equivale a porre nelle (7) ; (8) $\bar{\nu} = \nu$.

(7) Loc. cit. § 1. Per la validità della formula di Rayleigh, e quindi delle considerazioni che seguono, è tuttavia necessario che si possa trascurare l'effetto di punti singolari della sezione del tubo, come gli spigoli.

Tuttavia è certo che anche per sezioni di forma qualsiasi valgono, almeno qualitativamente, considerazioni analoghe a quelle fatte da Kirchhoff per i tubi di sezione circolare; perciò si deve ritenere che gli effetti termici abbiano una importanza paragonabile a quelli della viscosità. Per questa ragione nelle (7) (8) si è introdotta la viscosità equivalente $\bar{\nu}$, anzichè la semplice viscosità ν; con ciò si è fatta implicitamente l'ipotesi – attendibile almeno in prima approssimazione – che anche per una sezione di forma qualunque si possa tener conto degli effetti della conduzione termica sulla impedenza del tubo, introducendo semplicemente una costante di viscosità equivalente, ma, per il resto, le espressioni di $\mathfrak{R}_S$ ed $\mathfrak{M}_S$ conservino la forma che avrebbe in presenza della sola viscosità.

Se si suppone, inoltre, che in prima approssimazione $\bar{\nu}$ si possa calcolare addirittura con la formula di Kirchhoff (vedi § 3) cioè che essa sia una costante indipendente dalla forma della sezione [8] si conclude da quanto precede che $\mathfrak{R}_S$ ed $\mathfrak{M}_S$, a parità del rapporto $(\mathcal{S}/2S)$ fra semiperimetro e sezione, sono le stesse qualunque sia la forma della sezione del tubo. Questo risultato, può essere utile nelle applicazioni, sebbene sia valido soltanto in prima approssimazione e per x grande ($x > 10$ almeno, cioè nei limiti di applicabilità della formula di Rayleigh).

Considerazioni analoghe, in certo modo, alle precedenti si possono fare per l'altro caso estremo: $x \leq 1$ (tubi di sezione molto piccola) paragonando le (6) con le relazioni analoghe che valgono per le fenditure rettangolari molto strette [9] (larghezza a della sezione rettangolare molto minore della sua lunghezza b, e quindi $\mathcal{S}/2S \approx 1/a$);

$$(9) \qquad \mathfrak{R}_S = \frac{12\eta l}{a^2} \quad ; \quad \mathfrak{M}_S = \frac{6}{5}\rho l .$$

Si verifica subito, infatti, che le (6) e le (9) rientrano ancora nelle (7) purchè si ponga $\bar{\eta} = \eta$ (o $\bar{\nu} = \nu$; e ciò si accorda con quanto è stato detto al § 3) e inoltre si considerino φ' e ψ come costanti, aventi i seguenti valori:

$$\varphi' = 8 \quad ; \quad \psi = 4/3 \quad \text{per la sezione circolare;}$$
$$\varphi' = 12 \quad ; \quad \psi = 6/5 \quad \text{per la sezione rettangolare.}$$

In base alle considerazioni precedenti è, allora, abbastanza naturale avanzare l'ipotesi che le (7) con $\bar{\eta} = \eta$, e φ' e ψ costanti, valgano più in generale, cioè anche per forme della sezione del tubo diverse da quelle circolare e rettangolare, – sempre naturalmente per $x \leq 1$ – purchè si diano ai coefficienti φ' e ψ valori opportuni da stabilire caso per caso, a seconda appunto delle diverse forme di sezione. Questa ipotesi risulta avvalorata dal confronto con altri casi analoghi di impedenze acustiche dipendenti dalla

(8) Naturalmente una approssimazione assai migliore si può avere determinandò, per esempio sperimentalmente, i valori di ν per le singole forme della sezione del tubo.

(9) Vedere ad esempio H. F. Olson, F. Massa, *Applied Acoustics*. Blakiston, Philadelphia, 1939, 2ª ed., p. 37, formula (2.91).

viscosità [10] nei quali si trovano sempre per $\mathcal{R}_S$ valori indipendenti dalla frequenza [11] quando è minore di uno un coefficiente analogo a quello x dato dalla (8), e invece si trovano valori funzioni della frequenza quando $x > 1$; il caso di $\mathcal{R}_S$ costante corrisponde sempre ai valori più piccoli della frequenza e di un parametro geometrico caratteristico, proprio come nei tubi.

5. « FATTORE DI MERITO » DI UN TUBO. – Per le applicazioni, interessa calcolare il rapporto ε fra rettanza di massa $\omega\mathcal{M}_S$ e resistenza $\mathcal{R}_S$; questo rapporto, nell'analogia elettromeccanica classica, corrisponde, evidentemente, al *fattore di merito* di una bobina, $\omega L/R$.

Dalle (7) (8) si ricava

$$\varepsilon = \frac{\omega\mathcal{M}_S}{\mathcal{R}_S} = \frac{\psi x^2}{\varphi'} = \frac{\psi}{\varphi}. \tag{10}$$

Nella (10) φ (o φ') e ψ vanno calcolati con le (5) per $x > 10$; mentre per $x \leq 1$, φ' e ψ, come si è visto, sono costanti diverse a seconda della forma della sezione. Per x compreso fra 1 e 10 non sono note espressioni generali di φ e ψ [12].

Si trova inoltre che ad $x = 10$ corrisponde $\varepsilon \approx 8$ e ad $x = 1$ $\varepsilon \ll 1$; e si ha che ε cresce con x.

6. DISCUSSIONE DEI RISULTATI. – Dalle considerazioni precedenti si deduce che, nel calcolo dell'impedenza meccanica specifica $\mathcal{Z}_S$ di un tubo mediante le (7), vanno distinti due campi principali a seconda dei valori di x (formula (8):

1° un campo, corrispondente all'incirca ad $x \leq 1$ (tubi di sezione estremamente piccola e frequenze basse) nel quale la resistenza meccanica specifica $\mathcal{R}_S$ e la massa meccanica specifica $\mathcal{M}_S$ sono costanti ed il fattore di merito $\varepsilon \ll 1$, cioè $\mathcal{R}_S \gg \omega\mathcal{M}_S$. Ciò vuol dire che il tubo si comporta come una resistenza pura;

2° un secondo campo, nel quale $\omega\mathcal{M}_S \gg \mathcal{R}_S$ – cioè la reattanza di massa prevale sulla resistenza – ed inoltre $\mathcal{M}_S$, e più ancora $\mathcal{R}_S$, dipendono dalla frequenza (tubi di sezione non troppo piccola e frequenze non troppo basse). Questo campo corrisponde all'incirca ad $x > 10$ ($\varepsilon > 8$).

Si intuisce poi facilmente, anche per confronto con la trattazione generale dei tubi di sezione circolare, quale è l'andamento di $\mathcal{R}_S$ ed $\mathcal{M}_S$ nel campo intermedio $1 < x < 10$, nel quale resistenza e reattanza hanno valori paragonabili.

(10) Per esempio l'impedenza di uno strato d'aria compreso fra due dischi paralleli e vicinissimi, uno dei quali vibrante. Una parte di queste considerazioni era già stata fatta da P. G. BORDONI, *Influenza della pressione atmosferica sulle impedenze acustiche dipendenti dalla viscosità.* « Ric. Scient. », vol. 15, 1945, p. 415.

(11) E dalla pressione atmosferica; vedere il lavoro di P. G. BORDONI citato nella nota precedente.

(12) Vedere per i tubi di sezione circolare la trattazione generale fatta dall'A. nel lavoro citato nel § 1.

La fig. 1 dà i valori della frequenza $f = \omega/2\pi$ e della dimensione caratteristica $(2\,S/\mathcal{S})$ per i quali $x = 1$, e, rispettivamente $x = 10$ calcolati in base alle (8). Come si vede, il campo delle resistenze pure corrisponde a valori di $(2\,S/\mathcal{S})$ (ossia nel raggio r per i tubi di sezione circolare e dell'altezza a per le fenditure rettangolari) ed a valori della frequenza assai piccoli. Per le normali frequenze acustiche il valore limite del raggio è minore di mezzo millimetro e decresce assai rapidamente col crescere della

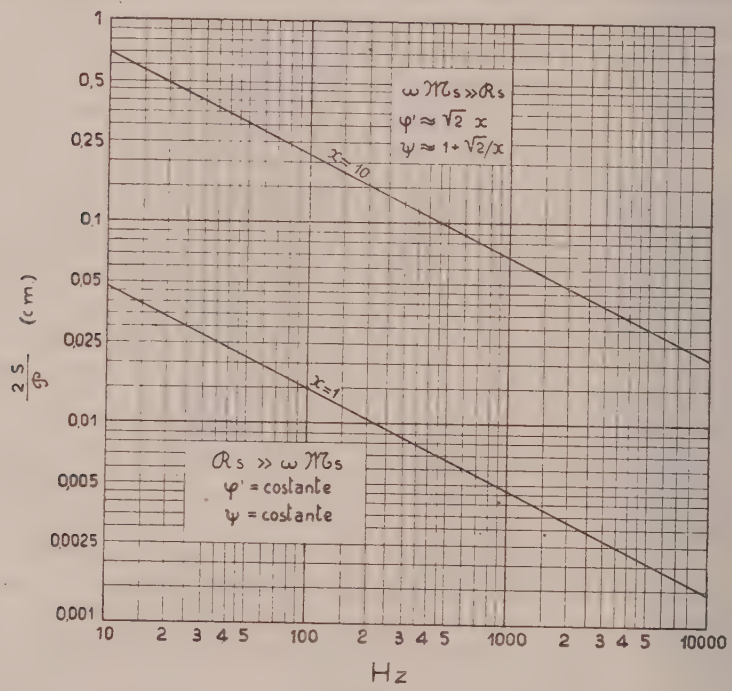


Fig. 1. – Dipendenza dalla frequenza dei valori di $\frac{2\,S}{\mathcal{S}}$ per i quali $x = 1$ ed $x = 10$ (formula 8).

frequenza. In altre parole per dimensioni non piccolissime, e per le usuali frequenze acustiche, il tubo non è *mai* una resistenza pura e, comunque, la sua resistenza è funzione della frequenza.

Questo fatto spiega come per ottenere resistenze acustiche pure si ricorra spesso a sistemi più complicati (tubi parzialmente riempiti con fili metallici di piccolo raggio) i quali rappresentano un artificio costruttivo per attuare un sistema di molti tubi di piccolissima sezione disposti « in parallelo ».

7. Conclusione. – È possibile calcolare la resistenza meccanica specifica $\mathfrak{R}_S$ e la massa meccanica specifica $\mathfrak{M}_S$ dei tubi di piccola sezione mediante le relazioni generali (7) e (7') che tengono conto sia della reat-

tanza della massa d'aria contenuta nel tubo, sia degli effetti della viscosità e della conduzione termica. Queste relazioni mostrano che, almeno in prima approssimazione, la dipendenza di $\Re_S$ ed $\mathfrak{M}_S$ dalla frequenza è dello stesso tipo qualunque sia la forma della sezione del tubo.

Come prima approssimazione si può, anzi, ritenere che l'impedenza meccanica specifica abbia lo stesso valore, a parità di frequenza, per tubi aventi uguale il rapporto fra sezione e semiperimetro; ciò vale almeno finchè i valori di tale rapporto non sono eccessivamente piccoli ($\ll$ 1 mm).

Le formule generali (7) e (7′) comprendono in particolare: la formula di Rayleigh per i tubi di sezione di forma qualsiasi (opportunamente modificata per tener conto anche della conduzione termica) la formula di Helmoltz-Kirchhoff per i tubi di sezione circolare, e la formula delle fenditure rettangolari.

Dalle relazioni generali suddette è stato inoltre calcolato un coefficiente numerico caratteristico del tubo, il quale nell'analogia elettromeccanica classica, corrisponde al *fattore di merito* della bobina. Dall'espressione del fattore di merito si è dedotto, inoltre, che per frequenze non troppo basse i tubi non si comportano quasi mai come resistenze acustiche pure, a meno di non dare valori molti piccoli ($\ll$ 1 mm) al rapporto fra sezione e semiperimetro.

Fisica. — *Sulla presenza di una componente penetrante negli sciami estesi della radiazione cosmica.* Nota di A. Mura, G. Salvini e G. Tagliaferri, presentata (*) dal Corrisp. G. Polvani.

Introduzione. – Sin dalle prime ricerche (1) sugli sciami estesi dell'aria (sciami di Auger) è stata avanzata l'ipotesi della partecipazione alla loro costituzione di una componente penetrante, di tipo mesonico. Il problema riveste tuttora interesse fondamentale in quanto porta un contributo alle teorie sulla generazione dei mesoni ed alla teoria della cascata.

L'ipotesi che mesoni siano associati agli sciami estesi era fondata essenzialmente sull'osservazione di coincidenze fra contatori di G. M. abbastanza distanziati, ed alcuni dei quali protetti con schermi ritenuti sufficienti ad eliminare la componente elettronica. Queste misure non si possono però ritenere conclusive, come è stato posto in evidenza anche da Rogozinscki (2). Così pure ricerche condotte con camere di Wilson comandate da varie disposizioni di contatori (3) non sembrano autorizzare una conclusione definitiva sul problema della presenza dei mesoni negli sciami.

(*) Nella seduta dell'8 marzo 1947.

(1) Per questa bibliografia, cfr. A. Rogozinski, « Phys. Rev. », *65*, 291 (1944).

(2) A. Rogozinski, « Phys. Rev », *65*, 291 (1944).

(3) L. Jànossy e A. C. B. Lovell, « Nature », *142*, 716 (1938); P. Auger e J. Daudin, « Compt. Rend. », *209*, 481 (1939); J. Daudin, *Thèse*, Paris, (1942); J. Daudin, « Nature », *156*, 420 (1945).

I lavori sperimentali più recenti, di cui abbiamo notizia [4], sull'argomento della presenza di mesoni negli sciami estesi, sono dovuti a Rogozinski [5] e a Cocconi, Loverdo e Tongiorgi [6]. Rogozinski, sulla base di esperimenti condotti a mezzo di contatori che comandavano lampade al neon, e distinguendo i mesoni dagli elettroni per la diversa moltiplicazione attraverso spessori di Pb, ritiene di poter concludere a favore dell'associazione di mesoni agli sciami estesi; Cocconi, Loverdo e Tongiorgi, che usano – per separare la componente penetrante – il solo criterio di schermare alcuni dei contatori con elevati spessori di Pb, ritengono attendibile che sciami di mesoni accompagnino gli sciami estesi elettronici.

Perchè l'identificazione della componente penetrante risulti più sicura, appare però preferibile usare, in una stessa disposizione sperimentale, un maggior numero di criteri atti a distinguerla. Abbiamo pertanto istituito le esperienze descritte in questa Nota, intese anche a valutare l'assorbimento della eventuale componente penetrante degli sciami estesi.

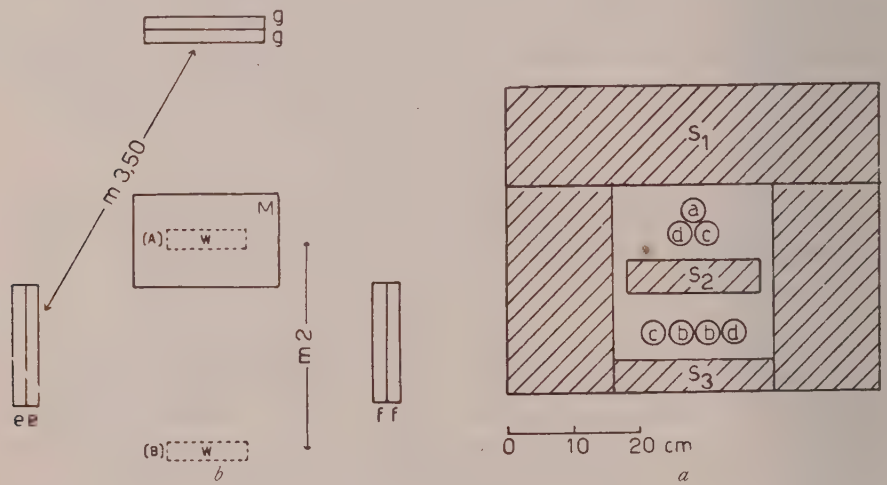


Fig. 1.

§ 1. Disposizione sperimentale. – 1. La ricerca fu compiuta durante l'estate del 1946, a 2100 metri s. l. m., in località Lago d'Inferno (Alpi Orobie). Per essa furono impiegati contatori di G. M. e una camera di Wilson.

Allo scopo di valutare la componente penetrante degli sciami estesi si sono seguiti questi criteri:

escludere la componente molle con elevati spessori assorbenti;

distinguere le particelle a seconda della loro diversa probabilità di moltiplicarsi attraverso spessori materiali;

(4) A causa delle passate contingenze, alcuni periodici non ci sono ancora pervenuti.

(5) A. Rogozinski, « Ann. de Phys. », *20*, 391 (1945).

(6) G. Cocconi, A. Loverdo e V. Tongiorgi, « N. Cim. », IX, *1*, 49 (1943); IX, *2*, 28 (1944).

distinguere le particelle a seconda dell'assorbimento in materiali di diverso numero atomico (nelle misure si sono impiegati Pb e Fe).

La figura 1 mostra la disposizione dei contatori e le posizioni della camera di Wilson. I contatori segnati con lettere uguali sono in parallelo. I contatori esterni e, f, g, limitano la zona esplorata dello sciame. Fra i contatori indicati in figura 1 abbiamo misurato le seguenti coincidenze:

coincidenze doppie $a + b$ (II), le quali dànno il numero delle particelle della radiazione totale che riescono a traversare il telescopio a, b;

coincidenze quadruple $a + b + c + d$ (IV); per ottenere tali coincidenze (dovute sopratutto a elettroni o fotoni che si sono moltiplicati attraversando S_1 ed S_2, ed anche a secondari d'urto che accompagnano particelle penetranti), sono necessarie almeno due particelle contemporanee;

coincidenze triple $e + f + g$ (III), le quali sono da attribuire al passaggio di uno sciame esteso;

coincidenze quintuple $a + b + e + f + g$ (V), le quali segnalano gli eventi $a + b$ contemporanei agli sciami estesi;

coincidenze settuple $a + b + c + d + e + f + g$ (VII), le quali segnalano gli eventi $a + b + c + d$ contemporanei agli sciami estesi.

Per differenza abbiamo inoltre valutato le coincidenze:

doppie $a + b$ in anticoincidenza con i contatori c, d:

$$(a + b) - (a + b + c + d) \quad \text{(II–IV)}$$

le quali, se il complesso dei contatori a, b, c, d, e dei setti S_1, S_2 (selettore M) risponde al nostro scopo, nel senso che sarà precisato [§ 1, 3)], indicano la presenza di particelle (quali i mesoni) che non si moltiplicano attraversando i setti impiegati;

quintuple $a + b + e + f + g$ in anticoincidenza con c, d:

$$(a + b + e + f + g) - (a + b + c + d + e + f + g) \quad \text{(V–VII)}$$

le quali segnalano gli eventi II–IV contemporanei agli sciami estesi.

Le frequenze più interessanti nella nostra ricerca sono quindi quelle delle coincidenze V, VII, e V–VII.

In particolare le V–VII dovranno indicare la presenza negli sciami estesi di particelle che non si moltiplicano attraversando forti spessori, e che hanno pertanto natura diversa dagli elettroni e dai fotoni.

2. *Contatori e registrazioni.* – I contatori a, b avevano un diametro di cm 4 e una lunghezza utile di cm 28; i contatori c, d, e, f, g un diametro di cm 4 e una lunghezza utile di cm 38. Tutti i contatori erano del tipo racchiuso in vetro [7].

Le registrazioni venivano effettuate con usuali apparati alla Rossi a coincidenze doppie, triple e quadruple, aventi potere risolutivo $\tau = 5 \div 7 \cdot 10^{-7}$ min. Le registrazioni delle coincidenze di ordine più elevato erano realizzate

(7) Detti contatori furono progettati e costruiti l'anno scorso nell'Istituto di Fisica dell'Università di Milano. Gli autori ringraziano vivamente il prof. Giuseppe Bolla per i consigli e l'aiuto prestati nel progetto e nella realizzazione dei modelli.

ancora con apparati funzionanti sullo stesso principio degli apparati alla Rossi, mediante interposizione, su ciascun ramo, di uno stadio invertitore.

I poteri risolutivi erano tali da rendere trascurabile, in ogni caso, l'influenza delle coincidenze casuali. La loro percentuale rispetto alle coincidenze effettive era massima nel caso delle quintuple (V): per esse il numero delle casuali fu ricercato sperimentalmente, e risultò inferiore al 5% delle coincidenze effettive.

3. *Il selettore.* – Il selettore M (fig. 1, *b*) ha il compito di distinguere le particelle che si moltiplicano fortemente attraversando elevati spessori di materiale (elettroni e fotoni), dalle altre componenti (essenzialmente mesoni): le prime saranno segnalate come coincidenze IV; le altre risulteranno come differenze II–IV. Perchè le frequenze delle coincidenze V–VII siano sicuramente interpretabili, occorre che gli elettroni che attraversano il selettore abbiano una elevata probabilità di dare una coincidenza IV anzichè II. Per questo è necessaria, oltre che una elevata efficienza dei contatori, una appropriata geometria dei contatori e degli schermi.

In base alle calcolazioni di Arley [8] e di Molière [9] sulla moltiplicazione e dispersione angolare degli elettroni negli sciami, si può concludere, tenuto conto della presenza del setto S_2, che la probabilità che gli elettroni e fotoni diano coincidenze IV anzichè II è tanto maggiore quanto più elevati sono gli spessori degli schermi; e che, per spessori sufficientemente elevati, il nostro selettore è adatto allo scopo. Le misure che interessano la nostra ricerca sono appunto quelle con forti spessori degli schermi (il minimo spessore da noi considerato è 6,6 cm. di Pb).

Le considerazioni sull'efficienza del selettore cadrebbero in difetto se le particelle incidenti arrivassero così inclinate da non traversare i setti S_1, S_2: per questo si è provveduto a schermare da ogni lato il gruppo centrale dei contatori con almeno 16 cm. di Pb.

Per valutare l'efficacia del selettore occorre però tener conto anche delle seguenti eventualità:

a) due particelle penetranti contemporanee (sciame di mesoni) possono dare luogo a una coincidenza IV ed essere rivelate come elettroni;

b) i mesoni all'uscita dai setti S_1 e S_2 possono essere accompagnati da secondari d'urto e produrre eventualmente una coincidenza IV.

Questi due fatti tendono a diminuire il numero degli eventi contati come mesoni a favore degli eventi contati come elettroni e fotoni: in particolare ne consegue che il numero delle coincidenze IV approssima per eccesso, e con errore percentuale notevole, il numero di questi ultimi.

§ 2. Risultati. – 1. Nella tabella I sono riportate le durate delle misure e le frequenze al minuto delle coincidenze II, IV, II–IV, V, VII, V–VII (cfr. § 1) e il rapporto $\frac{\text{V–VII}}{\text{VII}}$ al variare di S_1 ed S_2. La colonna (6)

(8) N. Arley, « Proc. Roy. Soc. », A *168*, 519 (1938).

(9) G. Molière, in *Vortraege ueber kosmische Strahlung*, Berlin, 1943.

dà la frequenza degli eventi dovuti essenzialmente ai mesoni. Per avere il numero effettivo dei mesoni, i valori della colonna (6) vanno corretti, perchè parte dei mesoni accompagnati da secondari d'urto sono rivelati come coincidenze IV. Dall'esame delle colonne (4) e (5), si è concluso che il numero delle coincidenze II–IV deve essere aumentato del 4 % circa.

Le curve della fig. 2 sono ricavate interpolando i dati delle prime quattro righe delle colonne (7), (8) e (9) (assorbitori di Pb). Come si vede, le due curve VII e V–VII hanno andamento diverso: le particelle che provocano coincidenze VII appaiono più assorbite di quelle che provocano coincidenze V–VII (particelle penetranti, mesoni, negli sciami).

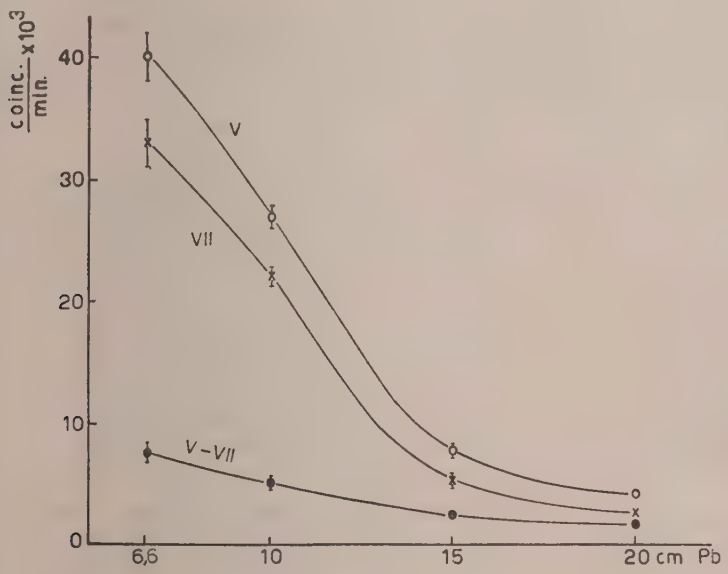


Fig. 2.

2. Nelle ultime due righe della tabella I sono riportate le frequenze ottenute sostituendo il Fe al Pb in S_1.

Avendo lasciato in S_2 sempre cm 5 di Pb, gli elettroni che traversano S_1, e provocano una coincidenza quadrupla, sono largamente al di sopra dell'energia critica [10]. In queste condizioni [11] l'assorbimento degli elettroni nel Fe e nel Pb sarà lo stesso per spessori equivalenti in unità di radiazione. Seguendo gli autori ora citati abbiamo che, per elettroni così energici, cm 18 e 36 di Fe equivalgono a cm 5 e 10 di Pb in S_1. Se dunque le coincidenze V e VII fossero tutte dovute ad elettroni, ponendo 18 e 36 cm di Fe in S_1, dovremmo trovare le stesse frequenze di V e VII che con 5 e rispettivamente 10 cm di Pb in S_1.

(10) B. ROSSI e K. GREISEN, « Rev. Mod. Phys », *13*, 240 (1941).

(11) Cfr. la discussione dell'analogo problema in K. GREISEN, « Phys. Rev. », *63*, 323 (1943).

TABELLA I.

Frequenze al minuto delle coincidenze II, IV, II–IV, V, VII, V–VII, III.

S_1 (cm) (1)	S_2 (cm) (2)	Minuti (3)	II (4)	IV (5)	II–IV (6)	V (7)	VII (8)	V–VII (9)	$\frac{\text{V–VII}}{\text{VII}}$ (10)	III (11)
5 Pb	1,6 Pb	3134	$29,8 \pm 0,5$	$2,20 \pm 0,09$	$27,6 \pm 0,6$	$4,0 \pm 0,4 \cdot 10^{-2}$	$3,3 \pm 0,4 \cdot 10^{-2}$	$7,7 \pm 1,6 \cdot 10^{-3}$	0,2	
5 Pb	5 Pb	9508	$27,6 \pm 0,5$	$1,29 \pm 0,05$	$26,3 \pm 0,6$	$2,7 \pm 0,2 \cdot 10^{-2}$	$2,2 \pm 0,15 \cdot 10^{-2}$	$5,2 \pm 0,8 \cdot 10^{-3}$	0,2	
10 Pb	5 Pb	11548	$27,0 \pm 0,4$	$1,05 \pm 0,05$	$25,9 \pm 0,5$	$7,9 \pm 0,9 \cdot 10^{-3}$	$5,3 \pm 0,7 \cdot 10^{-3}$	$2,6 \pm 0,5 \cdot 10^{-3}$	0,5	$0,30 \pm 0,02$
15 Pb	5 Pb	16564	$25,7 \pm 0,4$	$0,95 \pm 0,04$	$24,7 \pm 0,5$	$4,3 \pm 0,6 \cdot 10^{-3}$	$2,5 \pm 0,4 \cdot 10^{-3}$	$1,8 \pm 0,4 \cdot 10^{-3}$	0,7	
18 Fe	5 Pb	5557	$24,9 \pm 0,4$	$1,16 \pm 0,05$	$23,7 \pm 0,5$	$1,2 \pm 0,14 \cdot 10^{-2}$	$8,8 \pm 1,3 \cdot 10^{-3}$	$3,4 \pm 0,8 \cdot 10^{-3}$	—	
36 Fe	5 Pb	10230	$24,1 \pm 0,3$	$1,12 \pm 0,03$	$23,0 \pm 0,4$	$5,9 \pm 0,8 \cdot 10^{-3}$	$4,5 \pm 0,7 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \pm 0,4 \cdot 10^{-3}$	—	

Per le colonne (4), (5), (6), (11) le fluttuazioni sono state ricavate dalle medie relative a diversi periodi, in diverse condizioni di temperatura e di pressione.

Per i mesoni invece, cm 18 e 36 di Fe equivalgono a circa cm 17 e 34 di Pb [10]; pertanto, se parte almeno delle coincidenze sotto forti schermi fosse dovuta a mesoni, troveremmo con i due spessori di Fe adottati una frequenza diversa da quella con 5 e 10 cm di Pb in S_1, e precisamente minore (beninteso, se l'energia dei mesoni non è così grande che il loro assorbimento sia inapprezzabile).

Le frequenze da noi trovate sembrano favorevoli all'ipotesi della presenza di mesoni.

3. Nel corso delle misure qui riferite abbiamo anche avuto occasione di fare uso di una camera di Wilson, che, per quanto impegnata in altra ricerca, pure potè essere adoperata per prendere circa duecento fotografie in coincidenza con gli eventi registrati dall'apparato di contatori. La camera, che aveva un diametro di 22 cm e una profondità illuminata di 4 cm, e conteneva un setto orizzontale di Pb dello spessore di 2 cm fu impiegata in due diverse posizioni (fig. 1):

A) sotto il selettore M, senza lo strato di Pb S_3;

B) a circa 2 metri di distanza dal selettore.

Nella posizione A, con $5 + 1{,}6$ oppure $5 + 5$ cm di Pb nel selettore, le 43 fotografie ottenute in coincidenza con eventi VII mostrano un'abbondanza di tracce circa tripla di quella delle 12 fotografie ottenute in coincidenza con eventi V–VII. Quanto alla presenza di mesoni negli sciami, la camera non era in grado di dare una risposta sicura sia per la nota incertezza (dovuta al tempo di sensibilità) nel giudicare se più particelle sono contemporanee, sia perchè nel caso particolare la camera poteva esplorare solo una piccola parte dell'angolo solido definito dai contatori *a*, *b*. Tra le fotografie in coincidenza con VII sotto $5 + 5$ cm di Pb alcune mostrano elettroni in sciame sopra e sotto i 2 cm di Pb posti nella camera.

Nella posizione B le 6 fotografie ottenute in coincidenza con eventi VII mostrano un'abbondanza di tracce dieci volte maggiore che le 2 in coincidenza con eventi V–VII (nel selettore erano posti 5 cm Pb + 18 cm Fe oppure 5 cm Pb + 36 cm Fe). A parte l'esiguo numero di fotografie, dovuto alla rarità degli eventi VII e V–VII, questo fatto sembra indicare che i mesoni rivelati dal selettore come coincidenze V–VII si trovano o fuori della zona di elevata densità dello sciame o in sciami poco densi, in accordo con le osservazioni di Rogozinski da misure con contatori [5].

§ 3. DISCUSSIONE. – 1. Si consideri anzitutto il rapporto $\frac{\text{V–VII}}{\text{VII}}$ per vari spessori di S_1 e S_2 [tabella I, col. (10)]: tale rapporto è sempre crescente dal valore 0,2 al valore 0,7. Questo significa che le particelle che non si moltiplicano sono più penetranti degli elettroni: l'esistenza di eventi V–VII e l'andamento del rapporto $\frac{\text{V–VII}}{\text{VII}}$ costituiscono una prima indicazione della presenza negli sciami di una componente penetrante che non si molti-

plica. Infatti se la frequenza delle coincidenze V–VII fosse da attribuirsi a inefficacia del selettore, il rapporto $\frac{\text{V–VII}}{\text{VII}}$ dovrebbe almeno conservarsi o variare in senso contrario a quello osservato [§ 1, 3)].

2. Esaminiamo ora sino a qual punto è possibile dedurre dalla frequenza V–VII una curva di assorbimento della componente non elettronica degli sciami. Si è già visto [§ 1, 3)] che tale possibilità è limitata dalla presenza di secondari d'urto e dall'eventuale associazione di particelle penetranti; non è escluso poi che elettroni dello sciame, che accompagnano una particella non elettronica, la facciano rivelare con una coincidenza VII anzichè V–VII. Può darsi infine che eventi diversi da quelli sin qui discussi possano essersi accumulati nelle coincidenze V e V–VII: ad esempio Auger e Daudin [3]·[12] ritengono che sciami esplosivi possano essere prodotti in seno al Pb da una particella dello sciame.

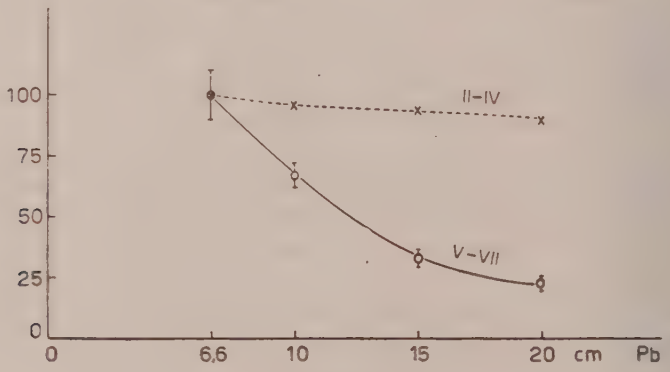


Fig. 3.

Queste considerazioni mostrano che gli eventi non dovuti ad elettroni possono essersi ripartiti fra le coincidenze V e V–VII. Ma siccome si può ritenere [§ 1, 3)] che gli elettroni dello sciame diano solo coincidenze VII, ne segue che le V–VII approssimano per difetto la frequenza degli eventi dovuti alla componente non elettronica.

Nella fig. 3 si è fatto un confronto tra l'assorbimento dei mesoni della radiazione totale (curva II–IV), e quello degli eventi V–VII, uguagliando a 100 entrambe le frequenze per cm 6,6 di Pb. È evidente che qualora le coincidenze V–VII siano attribuibili ai mesoni negli sciami, questi mesoni avrebbero energia generalmente inferiore a quella dei mesoni della radiazione totale.

3. Esaminiamo infine i risultati con il Fe (tabella I, righe 5, 6). Le frequenze V per 18 cm Fe+5 cm Pb e per 36 cm Fe+5 cm Pb (rispettiva-

(12) P. Auger e J. Daudin, « Phys. Rev. », *61*, 549 (1942).

mente $1{,}2 \cdot 10^{-2}$ e $5{,}9 \cdot 10^{-3}$) sono sempre minori che per 5+5 e 10+5 cm Pb (rispettivamente $2{,}7 \cdot 10^{-2}$ e $7{,}9 \cdot 10^{-3}$), come se [§ 2, 2)] agli elettroni fosse aggiunta, e per forti spessori fosse prevalente, una componente per la quale il coefficiente di ragguaglio tra Fe e Pb, che per gli elettroni è 3,6: 1, fosse minore. La differenza è ancora più significativa nel caso delle coincidenze V–VII, che i precedenti argomenti indicherebbero come non dovute ad elettroni (cfr. tabella I).

I risultati con il Fe concordano dunque con quanto si è osservato nell'assorbimento in Pb (§ 3, 3)] ad indicare la presenza negli sciami estesi di una componente che non si moltiplica ed è più penetrante che gli elettroni.

Conclusione. – Dalle nostre misure risulta dunque che negli sciami estesi dell'aria sono presenti, oltre che gli elettroni e i fotoni, altre particelle ionizzanti che non si moltiplicano e sono più penetranti di questi. Noi non siamo in grado di riconoscere con sicurezza la natura della componente non elettronica; ma in base ai nostri risultati e in accordo anche con quanto si ammette da chi ha svolto ricerche sull'argomento, riteniamo probabile che essa sia di natura mesonica.

Le nostre misure, come anche quelle precedenti a noi note di altri ricercatori, sono state fatte osservando lo sviluppo dello sciame sotto materiali densi, quando cioè era già avvenuta l'interazione delle particelle dello sciame con l'assorbitore: questo non permette di stabilire se la componente non elettronica è già presente nell'aria o viene (almeno in parte) generata nell'assorbitore.

Come è noto, la presenza di mesoni negli sciami estesi è stata studiata in linea teorica da Hamilton, Heitler e Peng [13]. Questi autori considerano due diversi processi: (*a*) la formazione contemporanea nell'alta atmosfera sia di mesoni di vita media circa 10^{-8} sec., i quali dànno origine immediatamente a quegli elettroni di disintegrazione che possono essere primari dello sciame esteso, sia di mesoni di vita media circa 10^{-6} sec., che si accompagnano allo sciame in cascata; (*b*) la creazione di mesoni per interazione dei fotoni con i protoni. Con la nostra disposizione ed alla nostra quota sarebbe attendibile, in base alle previsioni di questi autori, una prevalenza dell'effetto (*b*). Un processo di tale tipo sembra trovare conferma nei lavori sperimentali di Tabin e di altri [14], i quali hanno studiato l'eventuale produzione di mesoni da agenti non ionizzanti. Tabin trova che tali agenti (che egli indentifica con i fotoni) hanno una probabilità relativamente elevata di produrre mesoni: gli risulta infatti, con la disposizione sperimentale più favorevole, che circa l'1% dei mesoni incidenti su un telescopio verticale di contatori è prodotto da fotoni in uno strato di piombo sovrapposto.

Le misure di Tabin si riferiscono alla produzione di mesoni singoli, indipendentemente dall'accompagnarsi a sciami estesi, ed egli trova che

(13) J. Hamilton, W. Heitler e M. W. Peng, « Phys. Rev. », *64*, 78 (1943).
(14) J. Tabin, « Phys. Rev. », *66*, 86, (1944), e bibliografia ivi citata.

nei mesoni prodotti c'è un eccesso di mesoni lenti rispetto allo spettro ordinario. Dal confronto con i risultati di Tabin appare che anche i mesoni da noi osservati negli sciami estesi potrebbero ritenersi prodotti da fotoni. Per quanto questa supposizione non si accordi con l'osservazione [§ 2,4)] che i mesoni sembrano presenti prevalentemente nella parte poco densa degli sciami estesi, le considerazioni precedenti suggeriscono l'ipotesi, cui solo ulteriori misure potranno attribuire miglior fondamento, che i mesoni contemporanei agli sciami estesi siano prodotti dai fotoni lungo il cammino nell'aria o negli assorbitori.

NOTA. – È nostro gradito dovere ringraziare il prof. Giovanni Polvani, Direttore dell'Istituto di Fisica dell'Università di Milano, per il suo costante interessamento, e per aver messo a disposizione mezzi e apparecchi necessari all'esecuzione della presente ricerca. Ringraziamo anche il prof. Gilberto Bernardini, per alcune proficue discussioni sull'argomento.

La nostra riconoscenza va inoltre: al prof. F. Perussia, Rettore Magnifico dell'Università di Milano, per il suo costante e premuroso aiuto alla nostra spedizione; alla S. A. Orobia (in particolare al Consigliere Delegato ing. A. Ferrario e all'ing. D. Germontani) per la completa e cortese ospitalità al Lago d'Inferno e per le molte facilitazioni che hanno agevolato il lavoro sperimentale; infine alla Società Montecatini (in particolare al Direttore Centrale Tecnico ing. B. Orsoni), alla Ditta Tonolli e al prof. R. Piontelli per gli aiuti che anch'essi hanno dato.

Chimica. — *Soluzioni solide tra ossido di rame ed ossidi di metalli bivalenti. I sistemi* CuO–NiO, CuO–MgO *e* CuO–ZnO (*). Nota di R. RIGAMONTI, presentata (**) dal Socio M. G. LEVI.

In una precedente Nota (1) avevamo iniziato l'esame roentgenografico di sistemi tra ossidi cubici, a facce centrate, ed ossidi di struttura diversa, per studiare la possibilità di esistenza di soluzioni solide e conseguentemente di dimorfismo nella struttura cristallina di alcuni ossidi. Si erano allora esaminate le miscele di ossidi di metalli bivalenti con ZnO. Abbiamo ora esteso tali ricerche alle miscele di ossidi bivalenti con CuO.

Questi studi rappresentano un lavoro preliminare per l'esame di miscele di ossidi dal punto di vista catalitico.

Già G. Wagner, G. M. Schwab e R. Staeger (2) avevano preso in esame i sistemi MgO–CuO e ZnO–CuO, ottenuti per calcinazione delle miscele meccaniche degli ossidi, ma senza riscontrare alcuna formazione nè di soluzioni solide nè di composti.

Il CuO, come è noto, cristallizza nel sistema monoclino (3) e può pertanto apparire poco probabile che, data la sua bassa simmetria, possa dare

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano e Centro studi di Chimica Industriale del C. N. R.

(**) Nella seduta dell'8 marzo 1947.

(1) R. RIGAMONTI, « Gazz. Chim. It. », *76*, 474 (1946).

(2) G. WAGNER, G. M. SCHWAB e R. STAEGER, « Z. phys. Chem. » (B) *27*, 439 (1935).

(3) G. TUNELL, E. POSNJAK e C. J. KASANDA, « J. Washington Acad. Sci. », *23*, 195 (1933).

soluzioni solide con ossidi cubici. Il diametro ionico del Cu^{++} non è stato determinato nè da Goldschmidt (4) nè da Pauling (5), nè da altri sperimentatori. Se si considera la serie degli ioni bivalenti:

ione	Mn^{++}	Fe^{++}	Co^{++}	Ni^{++}	Cu^{++}	Zn^{++}
N atomico	25	26	27	28	29	30
raggio ionico in Å	0,90	0,85	0,81	0,76	—	0,82

si deduce che il rame dovrebbe avere un raggio ionico compreso tra quello del Ni e quello dello Zn.

In base a tale supposizione il CuO potrebbe dare soluzioni solide con MgO, NiO, ZnO, FeO, CoO ed MnO e forse con il CdO, ma non con gli ossidi a diametro cationico superiore, CaO, SrO, BaO secondo la regola di Natta e Passerini (6).

Abbiamo pertanto esaminato le miscele binarie di CuO con NiO, MgO e ZnO rinunciando per il momento a quelle con CdO per la poca probabilità di risultati positivi ed a quelle con FeO, CoO e MnO, perchè il riscaldamento di tali ossidi a temperatura elevata al contatto dell'aria porta a forme di ossidazione superiori, mentre in ambiente inerte la tensione di dissociazione del CuO è tale da rendere possibile la sua trasformazione in Cu_2O con conseguente ossidazione dell'altro ossido.

Il metodo di esame roentgenografico è stato quello delle polveri.

SISTEMA CuO–NiO. – Sono state esaminate miscele di composizione diversa con tenori di CuO crescenti fino al 50 % mol., ottenute per coprecipitazione dei carbonati basici, da soluzioni a titolo noto di solfati, e successivo lavaggio, essiccamento e calcinazione a circa 900°.

All'esame roentgenografico le miscele fino al 30 % mol di CuO hanno dato solo le linee dell'NiO; quelle al 40 % mol di CuO mostrano, accanto a tutte le linee dell'NiO, anche qualche linea del CuO. L'esame roentgenografico di miscele meccaniche dei due ossidi, eseguito per confronto, ha mostrato invece che col 30 % mol di CuO le linee di quest'ultimo appaiono già molto nette.

Da tali osservazioni si deve concludere che il CuO si scioglie almeno fino al 30 % mol, più probabilmente anche fino al 35 % mol nel reticolo dell'NiO.

Si è provato a determinare le dimensioni della soluzione solida limite eseguendo un fotogramma di una miscela del preparato 40CuO·60NiO

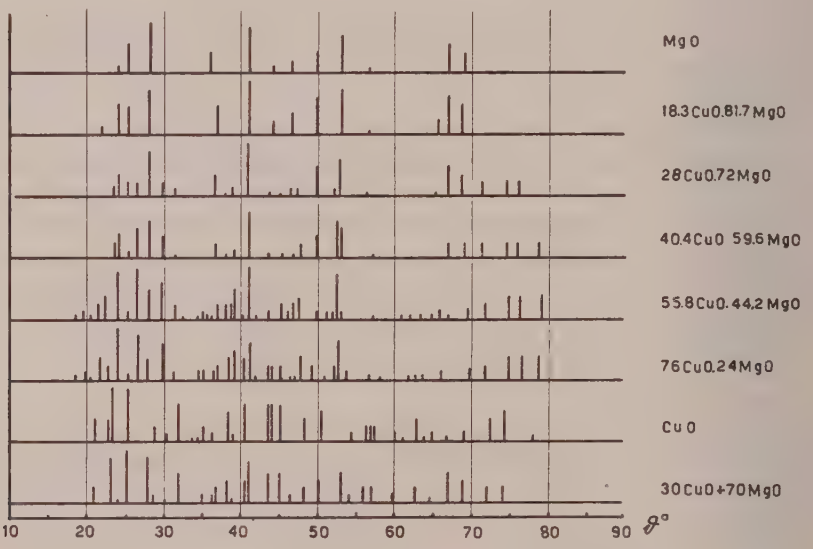
(4) V. M. GOLDSCHMIDT, « Geochemische Verteilungsgesetze der Elemente », VII, Oslo 1926; « Ber. », *60*, 1263 (1927).

(5) L. PAULING, « J. Am. Chem. Soc. », *49*, 765 (1927).

(6) G. NATTA e L. PASSERINI, « Atti III Congr. Naz. Chimica pura e applicata », p. 365 (1929).

con NiO puro. Tale metodo, che ci aveva dato ottimi risultati nell'esame delle miscele tra ossidi cubici e ZnO, è invece fallito nel presente caso, poichè le celle dell'NiO e della soluzione solida limite hanno dato linee coincidenti. Ciò sta a dimostrare che le loro dimensioni sono pressochè eguali. Su tale fatto ritorneremo più avanti a proposito del diametro ionico del Cu^{++}.

Sistema CuO–MgO. – Anche in questo sistema abbiamo esaminato miscele a composizione diversa, fino al 76 % mol di CuO, ottenute per coprecipitazione dei carbonati basici e successiva calcinazione a 900° circa. Poichè il carbonato basico di magnesio si scioglie parzialmente nell'acqua di lavaggio, si è proceduto ad una analisi dei prodotti calcinati.



Nella figura riportiamo in modo schematico i fotogrammi ottenuti, insieme a quelli dell'MgO e del CuO puri ed a quello di una miscela meccanica al 30 % mol. di CuO.

Come si vede, fino al 20 % mol di CuO compaiono solo le linee dell'MgO. Al 28 % mol di CuO cominciano a comparire alcune linee estranee, che si rafforzano sempre più col crescere del tenore in CuO, mentre si indeboliscono quelle dell'MgO fino a scomparire quasi completamente nel preparato al 55.8 % di CuO. Nel preparato al 76 % mol di CuO le linee dell'MgO sono completamente scomparse, mentre compaiono altre linee che possono essere attribuite al CuO. Il fotogramma della miscela meccanica dei due ossidi presenta invece nettissime sia le linee del CuO che quelle dell'MgO.

Tali fatti starebbero a significare anzitutto che fino al 20 % mol. e forse anche al 25 % mol. il CuO si scioglie nel reticolo dell'MgO. Tali soluzioni solide si presentano di colore verde. Abbiamo potuto ottenerle anche per riscaldamento a 900° di miscele meccaniche dei due ossidi, meglio se

in presenza di piccole quantità di fondenti (si è provato con NaCl e con NaOH).

Già C. G. Joris, J. Verhulst e H. S. Taylor [7] avevano osservato in preparati ottenuti a 630° dalla composizione CuO·4MgO la scomparsa delle linee del CuO ed avevano ritenuto che ciò dipendesse soltanto da una notevole dispersione dell'ossido di rame. Il fatto che le linee del CuO non compaiono neppure nei preparati calcinati a 900° nè in quelli ottenuti da miscele meccaniche degli ossidi, nonchè il colore verde dei prodotti ottenuti indicano sicuramente la formazione di soluzioni solide.

Un tentativo per poter determinare le dimensioni della cella della soluzione limite (e quindi dell'esatta sua composizione in base alla legge di Vegard) mediante un fotogramma di una miscela meccanica del prodotto 28CuO·72MgO con MgO puro è risultato, come nel caso precedente, infruttuoso. Le linee della soluzione solida e dell'MgO sono coincidenti, e pertanto le due celle elementari sono praticamente eguali.

È però da ritenere che la solubilità del CuO nell'MgO giunga fino al circa il 25 % mol.

Le linee che compaiono nei fotogrammi di miscele con più del 28 % di CuO sono, con ogni probabilità, da ascriversi ad un nuovo composto, che si forma per combinazione dei due ossidi.

Il fotogramma della miscela meccanica 30 CuO + 70 MgO (che, tenuto conto della solubilità del CuO nell'MgO e del maggior potere riflettente del CuO rispetto all'MgO ai raggi X corrisponderebbe al fotogramma di una miscela col 66 % di soluzione solida cioè di una miscela 50 CuO·50 MgO) non presenta infatti le linee dei fotogrammi in questione. È d'altronde da scartare l'ipotesi, che tali linee siano da attribuire ad una forma di CuO stabile ad alta temperatura, perchè il CuO calcinato a 900° dà un fotogramma identico a quello calcinato a temperatura inferiore; come pure che siano dovute a Cu_2O, formatosi per dissociazione del CuO, perchè si è effettuata la calcinazione dei precipitati in corrente di ossigeno e perchè il fotogramma del Cu_2O è nettamente diverso da quello delle miscele esaminate.

Questo composto tra CuO ed MgO si forma anche per calcinazione di una miscela meccanica dei due ossidi, in presenza di piccole quantità di fondente; la sua formazione è però molto lenta probabilmente per insufficiente intimità di mescolamento dei due ossidi.

Non siamo finora riusciti ad ottenere sia per coprecipitazione che per miscela meccanica prodotti che non dessero nè le linee dell'MgO nè quelle del CuO e pertanto non ci è stato possibile definire con sicurezza la formula di tale composto.

Non ci risulta d'altra parte che esso sia mai stato descritto in letteratura. È noto solo, pei sistemi tra CuO ed ossidi bivalenti, un prodotto cristallino tra CuO e CaO, a composizione però non definita, ottenuto da

(7) G. C. JORIS, J. VERHULST e H. S. TAYLOR, « Bull. Soc. Chim. Belgique », *46*, 393 (1937).

Moissan [8] per riscaldamento all'arco elettrico (2500°) di CuO in un crogiolo di calce. Abbiamo attualmente in corso esperienze per meglio definire la costituzione del composto osservato.

Sistema CuO–ZnO. – Anche per questo sistema si sono esaminate miscele ottenute per coprecipitazione dei carbonati basici e successiva calcinazione a 900° circa.

Non si è però osservata alcuna formazione di soluzioni solide. Fotogrammi di miscele anche con solo il 5 % mol di CuO mostrano le linee di quest'ultimo molto nette, e con una intensità eguale a quella che si ha in fotogrammi di miscele meccaniche della stessa composizione.

Risulta così confermato il risultato di Wagner, Schwab e Staeger [4]. La presenza di linee del CuO nei fotogrammi di preparati con solo il 5 % mol di tale ossido esclude d'altra parte la possibilità di formazione di qualche composto, nelle nostre condizioni di preparazione.

Il raggio ionico del Cu^{++}. – Dai risultati sperimentali descritti si deduce che il raggio ionico del Cu^{++} deve essere prossimo a quello del Ni^{++} (0,76 Å) e del Mg^{++} (0,78 Å).

Come si è detto, si è tentato di determinare con precisione le dimensioni delle soluzioni solide limiti, eseguendo un fotogramma di tali miscele con NiO o con MgO puri. Con tale metodo, data la nostra attrezzatura sperimentale (camere da 57 mm di diametro, Fe come anticatodo) è possibile svelare e misurare con sicurezza deformazioni superiori al 1,0 % della cella elementare.

Gli scostamenti delle dimensioni della cella delle soluzioni solide in MgO ed in NiO da quelle della cella degli ossidi puri dovrebbero pertanto essere entro tale limite. Da ciò si dedurrebbe una cella, per il CuO cubico, di 4,18 Å circa e quindi un raggio ionico del Cu^{++} di 0,77 Å.

Se si confrontano invece le celle degli spinelli, nei quali pure il rame è presente come ossido, si deduce che il Cu^{++} deve avere un raggio ionico un po' superiore a quello del Mg^{++}. Bisogna però osservare che le dimensioni delle celle elementari degli spinelli, trovate in letteratura, non sono molto precise, ed essendo ricavate da diversi sperimentatori non sono sicuramente confrontabili. Inoltre fenomeni di polarizzazione che si possono destare in composti complessi quali appunto gli spinelli, possono determinare deformazioni nelle dimensioni ioniche.

Recentemente Rogers [9] avrebbe calcolato dal confronto delle solubilità degli acetati tripli di sodio, uranile ed un metallo bivalente, un valore per il diametro dello ione Cu^{++} di circa 0,81 Å. Tale valore ci sembra però poco sicuro a causa dei fenomeni di idratazione che hanno luogo in soluzioni acquose.

(8) Moissan, «Compt. Rend.» *115*, 1036 (1892); «Bull. Soc. Chim. France» [3] *9*, 957 (1893).

(9) L. B. Rogers, «Science», *103*, 420 (1946).

Infine è da notare che la maggior solubilità osservata del CuO nel NiO che non nell'MgO probabilmente dipende più che da una maggior vicinanza dei raggi ionici del Cu^{++} e dell'Ni^{++}, da una maggior somiglianza nelle proprietà fisiche e chimiche tra gli ossidi di rame e di nichel.

Una ragione analoga può, almeno in parte, spiegare la mancanza di solubilità del CuO nello ZnO, fatto apparentemente anormale se si considera che lo ZnO forma soluzioni solide con NiO e con MgO e che alcuni sali di rame dànno soluzioni solide coi rispettivi sali di zinco (ad esempio i carbonati basici nell'auricalcite, ed i solfati).

Conclusioni. – L'esame roentgenografico di miscele NiO–CuO e MgO–CuO mostra la formazione di soluzioni solide di CuO nel NiO (fino al 35 % mol circa) e nel MgO (fino al 25 % mol circa). Nel sistema ZnO–CuO non si è invece notata alcuna formazione di soluzioni solide.

Nel sistema MgO–CuO si è osservata anche la formazione di un composto tra i due ossidi.

Dalle dimensioni delle soluzioni solide di CuO in NiO ed MgO si calcola il raggio ionico del Cu^{++} in 0,77 Å.

Mineralogia. — *Sulla simmetria della manganolangbeinite* (*). Nota di A. Bellanca, presentata (**) dal Corrisp. E. Onorato.

Nel 1924 Zambonini e Carobbi (1) diedero notizia del rinvenimento al Vesuvio di una nuova specie mineralogica: la manganolangbeinite, solfato doppio di manganese e potassio, $K_2Mn_2[SO_4]_3$, già preparato per via termica da Mallet (2) nel 1902.

Nella impossibilità di stabilirne la costituzione mediante la analisi chimica quantitativa, data la scarsità del materiale a loro disposizione, si limitarono a confrontarne i dati relativi ad alcune proprietà fisiche con quelli ottenuti da Carobbi e Caglioti (3) su cristalli preparati per via termica, e che aveva loro permesso di trarre l'interessante conclusione che al sale doppio spettava la formula $2\,MnSO_4K_2SO_4$ e non $MnSO_4K_2SO_4$ in precedenza stabilita da Mallet (loc. cit.). Inoltre, data la analogia morfologica che tale minerale presentava con la langbeinite, come questa la ritennero appartenente alla classe tetraedrica pentagonododecaedrica.

Anche Hintze (4) la ascrive a tale classe, per contro Struntz (5) mentre ritiene dubbia la appartenenza della langbeinite alla classe tetraedrica pen-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Roma.
(**) Nella seduta dell'8 marzo 1947.
(1) F. Zambonini e G. Carobbi, « Rend. R. Acc. Sc. Fis. Mat. e Nat. », 1924.
(2) F. R. Mallet « J. Chem. Soc. », *81*, 11, 1546; 1902.
(3) G. Carobbi e V. Caglioti, « Gazz. Chim. Ital. », *60*, VI, 411; 1925.
(4) Hintze, « Handb. Miner. », App. p. 339.
(5) H. Struntz, *Mineralogische Tabellen*, 129.

tagonododecaedrica, riporta senz'altro la manganolangbeinite appartenente alla classe esacistetraedrica.

Restava, pertanto, incerta la simmetria di tale specie mineralogica; perciò, avendo recentemente [6] ritrovata la manganolangbeinite in alcune stallattiti formatesi al Vesuvio, raccolte dal prof. Malladra [7] nel 1933, ho ritenuto opportuno un accurato esame di tale materiale nella speranza che i risultati conseguiti potessero portare ad una più precisa conoscenza di tale specie mineralogica.

La manganolangbeinite da me ritrovata si presenta in rari e microscopici tetraedri con gli spigoli più o meno arrotondati, talvolta con una certa tendenza a passare a deltoididodecaedri, e per la maggior parte associati parallelamente.

Della loro identità mi sono assicurato sia mediante l'esame microchimico, sia mediante determinazione dell'indice di rifrazione il cui valore, impiegando il metodo della dispersione di Merwin, risultò: $N_D = 1{,}572$, in perfetto accordo con quello dato da Zambonini e Carobbi ($N_D = 1{,}57$).

Ad onta della loro piccolezza ho potuto servirmi di qualche tetraedrino per alcune ricerche roentgenografiche; essi, però, in genere, non si prestavano per altre ricerche che mi proponevo. Apparve perciò necessario il cercare di riprodurre la manganolangbeinite.

Per via termica, operando nelle condizioni sperimentali di Mallet (loc. cit.) e di Carobbi e Caglioti (loc. cit.), aggiungendo però al miscuglio dei due solfati piccole quantità di solfato di ammonio onde evitare la decomposizione del solfato di manganese, ottenni per lentissimo raffreddamento della massa fusa un solido che all'esame microscopico risultò perfettamente cristallizzato sotto forma di arborescenze costituite da microscopici tetraedri, inadatti, perciò, anch'essi per gli scopi prefissimi.

In una seconda serie di esperienze preparai la manganolangbeinite per lentissima evaporazione, a 110°, di una soluzione acquosa dei due sali nel rapporto stechiometrico. Si sono così avuti cristalli particolarmente belli che raggiungevano talvolta tre millimetri di spessore.

Non ho mancato di assicurarmi che tali cristalli avessero una composizione chimica che rispondesse alla formula $K_2Mn_2(SO_4)_3$ della manganolangbeinite: l'analisi dei cristalli puri mi ha dato infatti i seguenti risultati:

K_2O	19,74
MnO	29,79
SO_3	50,43
	99,96

(6) A. Bellanca, « Rend. Soc. Miner. Ital. », 1, 1941.

(7) Da questi inviate al prof. Perrier, che con tanta gentilezza ha messo a mia disposizione, del che vivamente ringrazio.

Le forme in essi osservate sono:

$$\{210\} \quad \{111\} \quad \{211\}.$$

La più diffusa di queste è il pentagonododecaedro, rara la {111}. Frequentemente ho riscontrato associazioni irregolari che tendono, aumentando il numero degli individui, a formare raggruppamenti raggiati.

Nella tabella seguente sono riportati gli angoli misurati (valori medi) messi a confronto con quelli calcolati.

Tabella II.

Angoli	Misurati	Calcolati
$(210) : (2\bar{1}0)$	53°,13′	53°,18′
$(210) : (021)$	66°,6′	66°,0′
$(21\bar{1}) : (100)$	35°,30′	35°,16′
$(1\bar{1}2) : (1\bar{1}1)$	19°,20′	19°,28′

Il peso specifico è stato determinato con il metodo della sospensione, impiegando come liquido pesante lo joduro di metilene diluito con benzolo. Esso risultò: $D_{16°} = 3{,}017$.

L'indice di rifrazione venne determinato seguendo il nuovo metodo da me altrove descritto[8]. Ottenni: $N_D = 1{,}5724$.

Sezioni di cristalli spesse due millimetri non hanno mostrato alcuna attività ottica.

La ricerca della piezoelettricità polare, più volte eseguita con l'apparecchiatura altrove descritta[9], seguendo il metodo delle polveri, diede un effetto piezoelettrico debolissimo e non sempre netto.

Questo risultato è in contrasto con la mancanza di attività ottica, carattere per altro non decisivo in quanto negativo, esso però si accorda con il carattere morfologico dei cristalli, per cui riteniamo probante l'ascrivere la manganolangbeinite alla classe tetraedrica pentagonododecaedrica del sistema cubico.

Ricerche röntgenografiche. — Un controllo della simmetria della manganolangbeinite venne eseguito mediante lauediagrammi, ottenuti facendo incidere la radiazione non filtrata proveniente da un anticatodo di Mo normalmente alle facce (001), (100), (fig. 1) e (111) (fig. 2) di un nitidissimo tetraedrino di manganolangbeinite naturale, dai quali risultò evidente la

(8) A. Bellanca, « Period. di Miner. », XIV, 3, 1943.
(9) A. Bellanca, « Period. di Miner. », IX, 1938.

simmetria delle classi Th (diacisdodecaedrica) e T (tetraedricapentagonododecaedrica). Dato che tra le forme osservate risulta il tetraedro, il carattere morfologico esclude la classe Th; come conseguenza viene confermata in modo indubbio la simmetria cubica tetraedrica pentagonododecaedrica

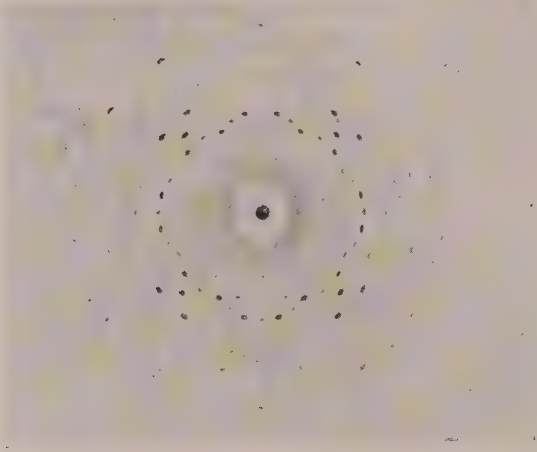


Fig. 1. – Lauediagramma secondo (001)
Ant. CuD = 4 cm.

Fig. 2. – Lauediagramma secondo (111)
Ant. MoD = 3 cm.

della manganolangbeinite, in perfetto accordo con le indagini di altro genere innanzi descritte.

Con un cristallo sicuramente semplice sono stati eseguiti poi spettrogrammi di Weissenberg dello strato spettrale zero e spettrogrammi equin-

clinati del primo e secondo strato spettrale per rotazione intorno a [100]. Da questi girofotogrammi risultarono sicuramente presenti i seguenti tipi di riflessi;

hkl	in tutti gli ordini
hko	in tutti gli ordini
hoo	soltanto con $h = 2n$.

Ammessa la simmetria tetraedrica pentagonododecaedrica (T), il gruppo spaziale che si deduce da tale statistica degli indici è il $T_4 - P_{2_1 3}$.

La distanza di identità della cella elementare determinata sia dal Polanyi intorno [100] (tabella II), sia dal diagramma di Weissenberg risultò:

$$a_0 = 10{,}014 \text{ Å}$$

Da questa costante, dal valore della densità (D = 3,017) e del peso molecolare (M = 476,25) applicando la nota formula: $Z = \frac{V \cdot D}{M \cdot 1{,}64 \cdot 10^{24}}$.

Tabella II.

Asse di rot.	λ	Strato Spettrale	2 e	log · tg θ	$\Gamma = \frac{n\lambda}{\sin \cdot \theta}$	Valore medio
[100]	Mo	1	5,00	8,8495	10,012	
»	»	2	10,08	9,1505	10,010	
»	»	3	15,30	9,3261	10,015	
»	»	4	20,80	9,4512	10,015	
»	»	5	26,64	9,5480	10,015	10,014
»	»	6	35,04	9,6274	10,012	
»	»	7	40,20	9,6944	10,018	
»	»	8	48,40	9,7525	10,016	
»	»	9	58,10	9,9156	10,020	
»	»	10	74,10	9,8498	10,015	

si calcola che il numero di molecole di $K_2Mn_2(SO_4)_3$ contenute nella cella elementare è = 4.

Geologia. — *Sui brachiopodi di Val di Sogno nel Baldo occidentale e sul riferimento cronologico del loro giacimento.* Nota di G. Albertini, presentata (*) dal Socio G. Dal Piaz.

La Val di Sogno si trova nelle ultime pendici occidentali del M. Baldo, tra Cassone e Malcesine sul Garda. In una delle cave esistenti in questa località lungo la pittoresca strada della Gardesana, a circa m. 800 da Cassone, nel luglio del 1941 rinvenni una fauna a brachiopodi, piuttosto povera di specie, ma discretamente ricca di individui (1).

Procedendo dal basso all'alto, la serie stratigrafica locale interessante il nostro studio risponde alla seguente successione.

Alla base si riscontrano dei calcari bianco–giallastri ricchi di articoli di crinoidi e di aculei di *Cidaris*. È il ben noto complesso dei così detti calcari gialli del Veronese, che i geologi sono concordi nel riferire al Dogger in generale (Giurese medio).

Quasi a diretto contatto, con la semplice interposizione di un sottile straterello limonitico, fa seguito una serie di otto metri di potenza di calcari rosso–mattone particolarmente ricchi di ammoniti rispondenti tutti al Malm, cioè al Giurese superiore, localmente indicato col nome di Rosso ammonitico (Titoniano *sensu lato*).

Nella località in esame noi ci troviamo adunque davanti ad un complesso stratigrafico bene individuato, che rappresenta il Giurese medio ed il Giurese superiore.

Ebbene, nella parte più elevata dei calcari gialli del Dogger, quasi a contatto con quelli del sovrastante Malm, in corrispondenza alle zone a grana più fine e compatta raccolsi, come ho accennato, numerosi fossili fra i quali riconobbi la presenza delle seguenti specie:

Terebratula (*Dictyothyris*) *rossii* Can.
Rhynchonella vigilii Leps.
» *concinna* Sow. *var. badensis* Opp.
» *cfr. forticostata* Böckh
» *vilsensis* Opp.
Hinnites velatus Goldf.

Queste specie fossili, che per la Val di Sogno vengono ricordate per la prima volta, sono già state segnalate genericamente in svariate altre località veronesi e non veronesi, non sempre però con precise indicazioni stratigrafiche, mentre nel nostro caso la localizzazione ai più alti livelli del Dogger deve ritenersi all'infuori di qualsiasi dubbio.

(*) Nella seduta del 12 aprile 1947.

(1) Ringrazio vivamente i chiarissimi professori G. Dal Piaz e G. B. Dal Piaz ai quali sono grato sia per avermi assegnato lo studio di questa piccola fauna ed essermi stati larghi di preziosi suggerimenti e consigli, sia per il loro interessamento alla pubblicazione di questa Nota. Anche al prof. P. Leonardi esprimo il mio vivo ringraziamento per l'assistenza ricevuta.

Passando all'esame analitico della distribuzione stratigrafica e quindi del riferimento cronologico di queste forme, osserveremo come la *Terebratula rossii* e la *Rhynchonella vigilii* (che sono le due specie più frequenti nella faunetta di Val di Sogno) siano state rinvenute dal Rossi (b. 9) nel giacimento della Croce di Valpore sul Grappa assieme a numerosi altri fossili (cefalopodi e brachiopodi) costituenti una ricca fauna attribuita originariamente al Batoniano. Il riferimento venne poi rettificato dal Botto-Micca (b. 3) che riconobbe trattarsi invece di Aleniano e non di Batoniano.

Allo stesso modo le due specie sopra ricordate figurano nella fauna della Croce di Segan presso Castel Tesino, scoperta dal Secco e che Parona e Canavari (b. 8) nella loro illustrazione paleontologica riferirono genericamente al Dogger inferiore.

Le due menzionate specie di *T. rossii* e *Rh. vigilii* sono ricordate anche dal Vacek (b. 11), assieme alla *Rh. cfr. forticostata* e all'*Hinnites velatus*, nel ricco elenco della fauna di S. Vigilio riferita all'Aleniano. Noi sappiamo però come per parecchie delle forme illustrate dal Vacek manchino precise indicazioni stratigrafiche e come il luogo di provenienza delle singole forme sia spesso generico senza indicazioni di livello.

Anche il Finkelstein (b. 6), che ha illustrato per primo la fauna giurese di M. Peller nel Trentino riferendola all'Aleniano medio, cita la *Rh. vigilii*; questo riferimento viene riconfermato poi da Vinassa De Regny (b. 12) nel suo lavoro su taluni fossili del Monte Peller.

Tutto indurrebbe a far ritenere, quindi, che tanto la *T. rossii* quanto la *Rh. vigilii* appartengano all'Aleniano e che esse siano da considerarsi, anzi, quali fossili guida di questo piano.

Senonchè, secondo gli studi di Rothpletz (b. 10) sulle Alpi di Vils, tanto la *T. rossii* quanto la *Rh. concinna var. badensis*, pure rappresentata nella nostra fauna, sarebbero presenti anche nel Batoniano, mentre il Finkelstein (b. 6) non manca di rammentare che l'*Hinnites velatus* e, con particolare frequenza, la *Rh. vigilii* sono fossili baiociani.

Tutto questo ci fa pensare che la *T. rossii*, la *Rh. vigilii* e l'*Hinnites velatus*, forme segnalate già nell'Aleniano, assumano una ragguardevole estensione verticale spingendosi fino al Batoniano, nel quale piano si associano a forme di più ristretta oscillazione, proprie del Dogger superiore.

Ad avvalorare questa interpretazione concorre il reperto stratigrafico di Val di Sogno dove la localizzazione della faunetta elencata e rinvenuta nei più alti strati del Dogger, subito al di sotto del Malm, offre una documentazione di fatto ben netta e di indiscutibile valore.

Lo studio della stratigrafia locale della cava grande di Val di Sogno esclude infatti che il banco di calcare contenente i brachiopodi appartenga al Dogger inferiore o medio perchè su di esso giace ad immediato contatto il Calloviano rappresentato da un sottile straterello ocraceo (= siderolitico) immediatamente ricoperto a sua volta, come è già stato accennato, da banchi di calcare rosso ammonitico a fossili dell'Oxfordiano e del Kimmeridgiano. Nessuna traccia di fenomeni di trasgressione o prove di soluzioni di conti-

nuità nella serie degli strati, ma una successione regolare e continua passante dal Dogger al Malm.

Colla presenza dei ricordati fossili nei più alti livelli del Dogger di Val di Sogno (Batoniano) si verifica anche qui uno dei casi segnalati a proposito di molte altre specie, fra i quali quello classico della *Posidonomya alpina*, in cui si constata come delle forme ritenute originariamente proprie di un determinato orizzonte, col moltiplicarsi dei rinvenimenti fossiliferi risultino estese invece a vari livelli più antichi o più recenti. In questi casi il valore di tali fossili per la classificazione cronologica non può essere che relativo, non prestandosi a quelle classificazioni cronologiche di dettaglio quali si possono raggiungere invece con lo studio delle ammoniti.

Il rinvenimento della faunetta a brachiopodi di Val di Sogno ci permette infine di completare meglio la serie stratigrafica del Dogger superiore (Batoniano) del Baldo. Precedenti studi hanno fatto conoscere due interessanti *facies* del Batoniano della regione, quella di M. Zovo presso Brentonico (b. 4) e quella di M. Pastello presso Fumane (b. 5), entrambe tipicamente neritiche a gasteropodi, lamellibranchi e coralli.

Il giacimento di Val di Sogno si differenzia nettamente dai due contemporanei or ora citati tanto pei suoi caratteri litologici quanto per il tipo della fauna. La roccia degli strati di Val di Sogno che rappresentano il Batoniano, costituita di calcari puri e compatti, risponde ai caratteri di una *facies* di mare aperto e profondo, ciò che d'altro canto sta in rapporto anche col tipo di fauna a brachiopodi che vi è contenuta e colla grande frequenza di articoli di crinoidi che impregnano quasi ovunque i banchi calcarei.

Bibliografia.

1. E. W. Benecke, *Ueber Trias und Jura in den Süd Alpen*, « Geogn. – paläont. Beiträge », München 1866. – 2. E. Böse u. E. Finkelstein, *Die mitteljurassichen Brachiopoden–Schichten bei Castel Tesino*, « Zeitschr. d. deutsch. geol. Ges. », Jahrg. 1892. – 3. L. Botto-Micca, *Fossili degli strati a Lioceras opalinum REIN e Ludwigia murchisonae SOW., della Croce di Valpore (M. Grappa), prov. di Treviso*, « Boll. Soc. Geol. Ital. », vol. XII, 1893. – 4. G. Dal Piaz, *L'età degli strati coralligeni di M. Zovo*, « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. XVII, Roma 1908. – 5. G. Dal Piaz, *Sulla fauna batoniana del M. Pastello nel Veronese*, « Memorie dell'Istituto Geologico della R. Università di Padova », vol. I, Padova 1912. – 6. E. Finkelstein, *Ueber ein Vorkommen der Opalinus – (und Murchisonae? –) Zone im westlichen Süd–Tirol*, « Zeitschr. d. deutsch. geol. Ges. », Jahrg. 1889. – 7. A. Oppel, *Die Juraformation Englands, Frankreichs und des südwestlichen Deutschlands*, « Württ. naturw. Jahreshefte », XII–XIV, Jahrg. 1856–1858. – 8. C. F. Parona e M. Canavari, *Brachiopodi oolitici di alcune località dell'Italia settentrionale*, « Atti Soc. Tosc. Sc. Nat. », vol. V, 1882. – 9. A. Rossi, *La Provincia di Treviso*, « Boll. Soc. geol. ital. », vol. I, 1882. – 10. A. Rothpletz, *Monographie der Vilser Alpen*, « Palaeont. », Bd. XXXIII, 1886. – 11. M. Vacek, *Ueber die Fauna der Oolithe von Cap S. Vigilio*, « Abh. d. k. k. geol. Reichsan. », Bd. XII, n. 3, 1886. – 12. P. Vinassa De Regny, *Su taluni fossili giuresi del Monte Peller*, « Memorie del Museo di St. Nat. della Venezia Tridentina », vol. IV, fasc. 2, Trento 1937.

Biologia (Patologia vegetale). — *La « Macrophomina Phaseoli », (Maubl.) Ashby, diffusa come polifago parassita in Italia.* Nota (*) di G. GOIDÀNICH e L. CAMICI, presentata dal Socio D. DE BLASI.

In una Nota precedente (1) abbiamo segnalato di avere rinvenuto nel corso del 1946 in due regioni d'Italia, tra di loro molto distanti, Liguria e Sardegna, un micete microscleroziale a carattere parassitario.

L'assoluta assenza di organi di fruttificazione sia sul materiale in natura che nelle colture di esso in substrato artificiale e l'impossibilità di fare un confronto diretto fra i nostri isolamenti e funghi di analoghe caratteristiche strutturali di provenienza straniera non ci aveva permesso di addivenire ad una esatta identificazione del parassita in parola. Esso venne infatti prudenzialmente indicato come « tipo *Sclerotium bataticolum* », con cui notoriamente si intende e si suole distinguere la fase sterile microscleroziale della *Macrophomina Phaseoli* (*Maubl.*) *Ashby* o, per essere più precisi, la fase sterile di miceti a microsclerozi che si suppone posseggano nel ciclo di sviluppo una tale fruttificazione picnidica.

Risolvere definitivamente tale riferimento sistematico, rimasto sia pure con molti elementi di verosimiglianza ingiudicato, era di un interesse del tutto particolare perchè concludevamo nella Nota citata: « se le future ricerche confermeranno la molto probabile ipotesi che il parassita da noi isolato è la *Macrophomina Phaseoli*, l'agricoltura italiana dovrà prendere atto di avere di fronte un altro temibile nemico, il quale ha per di più verosimilmente di già raggiunto una notevole diffusione nel paese ». La *M. Phaseoli* è infatti agente di marciume radicale e del colletto di numerose piante – oltre un centinaio, tra erbacee, arbustive, arboree – alle cui culture provoca, come risulta dalla recente letteratura fitopatologica, danni che possono raggiungere livelli di eccezionale gravità. In tali culture l'infezione di solito assume un andamento epidemico per la sua rapida diffusibilità da ospite ad ospite, per essere dotata di organi di conservazione che, a causa della loro conformazione e localizzazione sono difficilmente raggiungibili dagli ordinari mezzi di lotta, ed infine perchè l'aggressività del parassita è favorita da un complesso di fattori ambientali pressocchè impossibili a regolare o a modificare, senza compromettere contemporaneamente il buon andamento delle culture.

L'area di distribuzione della *M. Phaseoli* è assai vasta: è stata segnalata infatti nell'Australia, in Africa (Kenia, Rhodesia, Tanganika, Uganda, Congo, Sierra Leone, Egitto), a Giava e Sumatra, in India, nel Cile, Brasile, negli Stati Uniti (Canadà, Kentucky, Mississipì, Illinois, California, Sud Carolina), in Rumenia e in quasi tutto il bacino del Mediterraneo (Palestina, Grecia, Cipro, Marocco, Algeria). Per tale distribuzione e per il fatto che

(*) Presentata nella seduta dell'8 marzo 1947.

(1) G. GOIDÀNICH e L. CAMICI, *Un parassita microscleroziale del tipo « Sclerotium (Rhizoctonia) bataticola » Taub., presente in Italia*, « Ric. Scient. », *16*, 1946, pp. 1655-58.

essa è particolarmente frequente nelle regioni a clima tropicale e temperato faceva quasi meraviglia che finora non ne fosse stata lamentata la presenza anche in Italia, almeno nelle zone costiere. Noi crediamo che vi si trovi da parecchio tempo sebbene sia sempre sfuggita all'attenzione degli agricoltori e dei fitopatologi: ciò è spiegabilissimo per la difficoltà, da noi stessi constatata, e messa in rilievo da parecchi autori, di individuare il parassita nelle piante da un certo tempo ammalate, per la minutezza dei suoi corpi scleroziali che rimangono mascherati dalle vegetazioni degli altri organismi radicicoli secondari, e per la mancanza, nelle malattie da essa prodotte, di una sintomatologia caratteristica che permetta di distinguerla da altre infezioni similari di vecchia conoscenza, ed infine, non ultima ragione, per la sua non facile identificazione una volta che se ne sia ottenuto l'isolamento in cultura pura dove, si è già detto, il micelio rimane del tutto sterile.

Fig. 1. – Fusto di fagiolo con microsclerozi e picnidi (punteggiature più grosse) di *Macrophomina Phaseoli* (*Maubl.*) *Ashby*. Materiale raccolto a Loano (Riviera Ligure) nell'agosto 1946.

Le osservazioni e le ricerche da noi compiute negli ultimi tempi hanno avuto un esito molto favorevole in quanto ci hanno portato alla conferma di tutto ciò che si aveva dapprima esposto, come si è riportato, in forma ipotetica. Il micete a microsclerozi da noi rinvenuto in Italia è la *Macrophomina Phaseoli*: in alcuni vecchi steli di fagiolo raccolti in Liguria (Loano) abbiamo infatti riscontrato l'esistenza dei picnidi caratteristici della specie [2]: essi si sviluppano sporadicamente in mezzo alle formazioni microscleroziali sottoepidermiche (v. fig. 1) e sono dei corpi rotondeggianti provvisti di un ostiolo, a parete nera–carbonacea, grossi circa μ 140 con conidi ialini a plasma granuloso, unicellulari, di μ 20×7 (v. fig. 2), portati da conidiofori semplici; per le loro dimensioni e per essere alquanto sporgenti dalla superficie si distinguono abbastanza bene anche con una semplice lente o, meglio, col binoculare, tra la massa delle formazioni microscleroziali. Purtroppo il materiale in esame era troppo vecchio e non abbiamo perciò potuto seguire la germinazione dei conidi e l'evoluzione del micelio da questo derivante in colonie del tipo *Sclerotium bataticolum*; ma gli isolamenti fatti dalle por-

(2) S. F. Ashby, « *Macrophomina Phaseoli* (*Maubl.*) *comb. nov.* » *the pycnidial stage of* « *Rhizoctonia bataticola* » (*Taub.*) *Butl.* « Trans. Brit. Myc. Soc. », 12, 1927, pp. 141–147.

zioni di tessuto corticale ove si sono sviluppati hanno dato solo e costantemente le colonie di tale fungo che abbiamo già altrove descritte (loc. cit.). Il confronto eseguito tra le colonie dei nostri isolamenti e quelle dei ceppi depositati quali *M. Phaseoli* al Centraalbureau voor Schimmelcultures di Baarn ci hanno rivelato – come d'altronde avevano già segnalato altri autori [3] – che con questa denominazione si comprendono miceti a caratteristiche morfologiche e fisiologiche alquanto variabili attorno ad una media comune, entro cui i ceppi di origine italiana rientrano perfettamente. Anzi ci sembra che i nostri rappresentino il tipo classico, quale è stato fissato da Ashby nel suo lavoro di revisione critica di questo gruppo di funghi [4], e che nella serie collezionata a Baarn non esiste. Alla medesima identificazione sono giunti, in base all'esame del nostro materiale, in comparazione con quello di origine americana, il dott. C. M. Tompkins ed il dott. H. N. Hansen dell'Università di California (Division of Plant Pathology) [5], studiosi che da tempo lavorano sulla *M. Phaseoli* e l'ultimo dei quali ha anzi compiuto uno studio comparativo di un numerosissimo gruppo di isolamenti.

Date le dimensioni dei corpi sclerotiali, sui 110 μ, il tipo di *M. Phaseoli* esistente in Italia appartiene al gruppo «C» fissato da Haigh [6].

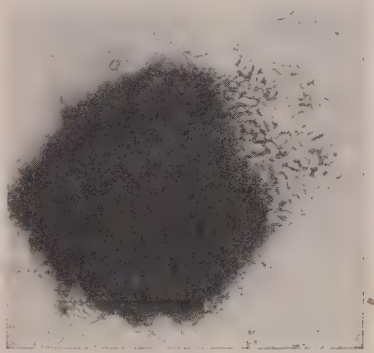


Fig. 2. Picnidio, con picnospore, di *M. Ph.* differenziatosi nella corteccia del fusto riprodotto in Fig. 1.

Circa la diffusione della infezione di *M. Phaseoli* in Italia abbiamo raccolto questi nuovi dati: oltre che nella Sardegna ed in Liguria si trova anche nel Lazio dove anzi si è manifestata con andamento epidemico più grave che altrove: nell'ottobre di quest'anno abbiamo infatti constatato che il deperimento esteso a parecchi ettari di culture di fagioli nelle Bonifiche di Maccarese (Roma) è dovuto in massima parte all'azione di tale parassita, combinato, ma non sempre, ad un attacco di nematodi.

Se si tiene presente la già segnalata, probabile esistenza della *M. Phaseoli* in Sicilia, è evidente come l'area di distribuzione che essa ha raggiunto in Italia è molto vasta, comprendendo tutta la zona costiera settentrionale, centrale e meridionale della Penisola sul Mar Ligure e sul Tirreno.

(3) J. C. F. Hopkins, «*Rhizoctonia lamellifera*» *Small: a distinct species of the* «*Rhiz. bataticola*» *group of fungi.* « Proc. Rhodesia Scient. Assoc. », *22*, 1933, p. 65; J. C. Luthra and R. S. Vasudeva, *Studies on the root-rot disease of Cotton in the Punjab. V. Confirmation of the identity of* « *Rhizoctonia bataticola* ». « Indian J. Agric. Sci. », *8*, 1938, pp. 727–734, S. Sundararaman, *Administration Report of the Mycologist for the year 1929-30*, 30 pp.

(4) S. F. Ashby, loc. cit.

(5) Comunicazione epistolare del dott. C. M. Tompkins in data 9 dicembre 1946.

(6) J. C. Haigh, « *Macrophomina Phaseoli* » (*Maubl.*) *Ashby and* « *Rhizoctonia bataticola* » (*Taub.*) *Butler.* « Ann. Roy. Bot. Gar. », Peradeniya, *11*; 1930, pp. 213–249.

Oltre che sulle leguminose la *Macrophomina Phaseoli* è stata isolata anche dalla lavanda, su materiale proveniente dalle coltivazioni di Col di Nava; la parte esercitata da questo fungo nell'eziologia del deperimento cui vanno soggette tali culture è ancora allo studio (7).

Le caratteristiche patologiche che si hanno nelle piante di fagiolo (le uniche in cui abbiamo potuto seguire il manifestarsi delle infezioni naturali), attaccate da *Macrophomina Phaseoli* corrispondono perfettamente a quelle descritte da altri autori (8): un disfacimento dell'apparato radicale costantemente accompagnato dalla comparsa di una macchia cenerognola, più o meno estesa, risalente fino al primo internodio o più oltre sulla vegetazione aerea, tutta tempestata dai corpuscoli microsclerozi semierompenti del fungo; microsclerozi che rivestono il canale midollare e compenetrano tutti i tessuti legnosi e corticali. Col tempo i tessuti corticali della parte inferiore dello stelo subiscono un profondo disfacimento che risparmia solo gli elementi fibrosi.

Fig. 3. – Riproduzione artificiale della infezione di *M. Ph.* su giovani piante di fagiolo, ottenuta facendo sviluppare i semi in terreno in cui, dopo la sterilizzazione, erano stati mescolati microsclerozi differenziatisi in cultura artificiale.

L'attacco avviene su piante di ogni età e di diversa varietà, e causa la morte repentina dei soggetti giovani ed un deperimento lento, ma quasi sempre letale di quelli adulti.

Gli esperimenti di riproduzione artificiale della malattia, sia sui fagioli che su altre piante, riescono positivi (v. fig. 3) quando si prendono le precauzioni necessarie a creare le condizioni d'ambiente ottimali quali risultano dalle conoscenze acquisite sulla biologia ed epidemiologia del fungo.

AGGIUNTA. – In base ad una revisione del genere *Macrophomina* Petrak compiuta da uno di noi dopo che la presente Nota era stampata, è risultato che la esatta denominazione binomiale del parassita di cui si è parlato è: *Macrophomina phaseolina* (Tassi) G. Goidànich *comb. n.*

(7) L. CAMICI, *Un nuovo ospite della « Macrophomina Phaseoli »: la Lavanda.* « N. Giorn. bot. ital. », 1947 (in corso di stampa).

(8) Cfr. spec.: W. D. MORE, *Ashy stem blight on Lima beans in North and South Carolina.* « Plant Disease Reporter »; *15*, 1935, pp. 114–115; W. W. MACKIE, *A hitertho unreported disease of Maize and Beans.* « Phytopath. », *22*, 1932, pp. 637–644; J. B. KENDRICK, *Seedling stem-blight of field Beans caused by « Rhizoctonia bataticola » at high temperatures.* « Phytopath. », *23*, 1933, pp. 949–963.

Citogenetica. — *La natura verosimilmente ibrida e poliploide del «Laurus nobilis L.» rivelata dall'analisi citogenetica* (*). Nota di E. BATTAGLIA, presentata (**) dal Corrisp. A. CHIARUGI.

In recenti considerazioni sul meccanismo della meiosi allo scopo di chiarire il meccanismo di processi meiotici anormali (1), ho particolarmente insistito sull'importanza del fatto che i due nuclei della telofase eterotipica contengono ciascuno n coppie di cromatidi e quindi in realtà il numero diploide di cromatidi. Poichè la divisione omeotipica, che distribuisce il corredo dei cromatidi, è caratterizzata, per il troppo breve intervallo fra le due divisioni della meiosi, dalla mancanza della riproduzione cromosomica (= duplicazione di ciascun cromatidio), consegue che ciascuna coppia di cromatidi distribuisce durante la seconda divisione meiotica i suoi due componenti all'uno ed all'altro polo fusale, cioè n coppie di cromatidi danno all'anafase due gruppi di n cromatidi e quindi due nuclei realmente aploidi. Il termine aploide non si addice ai nuclei della telofase eterotipica, a differenza invece dei nuclei della telofase omeotipica. Questi ultimi contengono ciascuno n cromatidi, i primi n coppie di cromatidi. Consegue da tutto ciò che in quei casi in cui la divisione omeotipica non avviene (o comunque non si verifica con quella rapida successione di tempi con cui usualmente avviene) viene resa possibile la riproduzione cromosomica dei cromatidi, e quindi essa perde proprio quel carattere per cui riesce a ridurre il numero dei cromosomi. In questo caso il numero complessivo dei cromatidi è raddoppiato e quindi all'anafase non si separano più due gruppi di n cromatidi, bensì due gruppi di $2n$ cromatidi. L'omeotipica si è trasformata in una usuale mitosi.

In un altro lavoro in corso di stampa (2) ho dimostrato che tutti gli esempi noti, ben studiati, di soppressione della omeotipica, concordano con la nostra interpretazione, nel senso che la divisione successiva all'eterotipica dà prodotti diploidi, come dimostrano ad esempio i lavori di Satina e Blakeslee (3), Barber (4), ecc.

L'unico caso noto nella letteratura, che esce da questo quadro, è quello descritto dalla prof.ssa Valeria Bambacioni-Mezzetti nella microsporogenesi

(*) Centro di studio per la Citogenetica vegetale del C. N. R. – Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Pisa, diretto dal prof. ALBERTO CHIARUGI.

(**) Nella seduta del 12 aprile 1947.

(1) E. BATTAGLIA, *Sulla terminologia dei processi meiotici*. « Nuovo Giornale Botanico Italiano », n. s., LII, 42–57 (1947).

(2) E. BATTAGLIA, *Sulla terminologia dei processi mitotici*. « Nuovo Giornale Botanico Italiano », n. s., in corso di stampa.

(3) S. SATINA e A. F. BLAKESLEE, *Cytological effects of a gene in Datura which causes dyad formation in sporogenesis*. « Botanical Gazette », *96*, 521–532 (1935).

(4) H. N. BARBER, *The suppression of meiosis and the origin of diplochromosomes*. « Proceedings of the Royal Society », ser. B, *128*, 170–185 (1940).

di *Laurus nobilis L.* [5], nel quale i due componenti della diade (intercinesi etero–omeotipica) si trasformerebbero direttamente in granulo pollinico, e nonostante questo eccezionale processo meiotico, le microspore verrebbero considerate aploidi.

Ho voluto controllare se realmente le cose si svolgono in simile maniera e l'eventuale estensione di tale processo nell'ambito di una popolazione; ho quindi esaminato la formazione del polline in piante staminifere di questa specie di provenienza diversa: un esemplare coltivato in giardino a Montughi (Firenze) ed altri viventi allo stato selvatico, o per lo meno subspontaneo, in località Cercina su Monte Morello (Comune di Sesto Fiorentino, presso Firenze) lungo un ruscello a quota di circa m. 400. Ma i risultati dell'indagine, di cui sarà data altrove una più estesa relazione [6], hanno messo in evidenza che in tutte le piante staminifere studiate, indipendentemente dalla provenienza, dopo la divisione eterotipica segue l'omeotipica e quindi una regolare formazione di tetradi di microspore. Non ho trovato traccia alcuna delle diadi descritte dalla Bambacioni–Mezzetti, e quindi la ricerca di questo eccezionale processo meiotico ha avuto esito negativo.

Assai interessanti tuttavia sono riusciti i particolari del meccanismo meiotico nei riguardi della costituzione genetica delle piante studiate, le quali hanno un comportamento un po' differente. Le piante viventi allo stato selvatico, o per lo meno subspontaneo (località Cercina), sono d'aspetto un po' diverso della pianta coltivata in giardino (località Montughi). Questa ultima presenta foglie con margine liscio e di maggiori dimensioni rispetto a quelle degli esemplari di Cercina che sono caratterizzate da un margine ora ondulato, ora nettamente increspato, mai liscio. Si tratta verosimilmente di varietà o meglio di forme diverse. Non possiamo meglio precisare mancando delle drupe delle piante femminili corrispondenti, che rappresentano un utile carattere diagnostico, per quanto il grande numero di varietà e di forme esistenti nell'ambito della specie rendano assai difficile od artificioso un loro ordinamento sistematico.

Nel materiale di Montughi, durante la profase meiotica, si osserva una sindesi incompleta, precisata, nei casi più favorevoli all'osservazione, in un tetravalente, due trivalenti, dodici bivalenti e otto univalenti. Questo corredo cromosomico corrisponde a $n = 21$; lo stesso valore aploide ha trovato la prof.ssa Valeria Bambacioni–Mezzetti nel suo materiale raccolto a Roma. La metafase presenta in genere una irregolare messa a fuso degli univalenti che giacciono spesso in parte lontani, in parte vicini, al piano equatoriale. Nell'anafase si separano per primi bivalenti e polivalenti, quindi si dividono anche gli univalenti vicini al piano equatoriale, per cui i nuclei telofasici (telofase eterotipica) posseggono sia coppie di cromatidi, sia cromatidi singoli (o semiunivalenti, cioè metà di univalente divisosi nella tarda anafase).

(5) V. Bambacioni-Mezzetti, *Nuovo caso di formazione di diadi nella microsporogenesi del «Laurus nobilis L.»*. « Annali di Botanica », XXI, 322–332 (1938).

(6) E. Battaglia, *Meiosi anormale nella microsporogenesi di «Laurus nobilis L.»*. « Atti della Società Toscana di Scienze Naturali », Memorie, vol. 54, Pisa, 1947, in corso di stampa.

Non tenendo conto della « qualità » cromosomica, ma soltanto del numero, nei due nuclei formati dopo l'eterotipica si contano valori cromosomici superiori ad *n*. Tali valori variano poichè varia il numero degli univalenti che si dividono nella tarda anafase eterotipica, come pure non è costante nè uniformemente distribuito il numero degli univalenti che ritardano verso i poli del fuso e che sono inclusi senza divisione nei due nuclei figli telofasici.

Raramente sono state osservate durante l'anafase disgiunzioni anormali formanti ponti cromatidici indicanti l'esistenza di segmenti cromosomici invertiti e quindi di ibridità strutturale. Mai furono osservati nuclei di restituzione, probabili nel caso che i ponti cromatidici non si spezzino. Dopo l'eterotipica subentra rapidamente l'omeotipica caratterizzata dalla normale divisione delle coppie di cromatidi a cui segue la distribuzione a caso, senza alcuna divisione, dei cromatidi singoli (semiunivalenti), cioè delle metà degli univalenti divisisi nell'anafase eterotipica. Il resultato finale è una tetrade di microspore formatasi per divisione successiva in quanto, sia nell'eterotipica, sia nell'omeotipica, dopo la cariodieresi segue la citodieresi.

Le singole microspore posseggono un numero di cromosomi oscillante intorno a ventuno; generalmente da esso si discostano, in più o in meno, di due o tre unità.

Il materiale proveniente da Cercina, raccolto a quattrocento metri, dopo abbondanti nevicate e a metà febbraio, presenta caratteri di sofferenza nel senso che in esso si trovano frequentemente cellule madri (in tutti gli stadi di sviluppo) con nucleo bilobato, avente cioè la stessa forma di quello osservato dalla prof.ssa Bambacioni–Mezzetti nella pianta da essa studiata. Il citoplasma si presenta inoltre un po' cromofilo rispetto all'ematosilina ferrica, per cui i cromosoni sono generalmente non ben visibili nè quindi ben interpretabili, con relativa difficoltà di conteggi esatti. Ciò ha fatto sì che lo stadio di diacinesi nelle cellule madri del polline (tenendo presente anche la forma non regolare del nucleo) non ha permesso analisi cromosomiche attendibili come avremmo desiderato. Furono tuttavia veduti tetravalenti, trivalenti, bivalenti ed univalenti in rapporti che, approssimativamente, sono uguali a quelli del materiale di Montughi. Gli univalenti si comportano nello stesso modo, in parte dividendosi nella tarda anafase, in parte passando indivisi nei due nuclei figli. Ma dove le piante raccolte a Cercina differiscono assai da quelle di Montughi è nella presenza assai frequente di ponti anafasici di inversione in numero anche superiore ad uno, ponti persistenti nella telofase e originanti altrettanti nuclei di restituzione. Durante la divisione del citoplasma, tuttavia, il nucleo di restituzione viene infranto in quanto le due cellule della diade separano prima il citoplasma e quindi anche l'istmo più o meno grande connettente le due parti dei loro nuclei a biscotto, responsabili cioè della formazione del nucleo di restituzione. Segue l'omeotipica con la « non divisione » dei cromatidi singoli, ritardanti sul fuso nella tarda anafase, e quindi la formazione di una tetrade di microspore con numeri cromosomici oscillanti intorno a 21. .

L'andamento della meiosi durante la microsporogenesi del *Laurus nobilis L.* permette alcune deduzioni. In primo luogo, la parziale formazione di polivalenti, la parziale asidesi di alcuni cromosoni, e il comportamento degli univalenti, ci mostrano un'alterazione della meiosi caratteristica di ibridi interspecifici e a maggior ragione intergenerici. In secondo luogo la maggior frequenza di inversioni (segno di ibridità strutturale) negli esemplari viventi allo stato selvatico o subspontaneo (Cercina) indica che all'ibridità originaria si sono aggiunte modificazioni apportate da incroci interraziali. L'ibridità di inversione che porta alla formazione di ponti cromatidici e loro conseguenze, è infatti caratteristica degli incroci interraziali, come dimostra il caso classico di *Campanula persicifolia* studiata dal Darlington e Gairdner [7]. L'esistenza di alcune forme di Alloro permanentemente sterili o a fruttificazione stentata, segnalate nella letteratura sistematica rappresenta una conferma di fenomeni di ibridazione avvenuti nell'ascendenza.

Quanto al significato del numero cromosomico, *Laurus nobilis* caratterizzato da $n = 21$ (vedi anche V. Bambacioni-Mezzetti) [8], è indubbiamente un poliploide, verosimilmente un tetraploide. È noto infatti $n = 18$ per *Laurus canariensis* [9], e $n = 12$ per le seguenti specie: *Cinnamomum Sieboldi* [10], *Cinnamomum Camphora*, *C. japonicum*, *C. Loureirii*, *Lindera glauca* [11], *Umbellularia californica* [12]. Con ogni verosimiglianza si tratta di un ibrido interspecifico, ma per chiarire con sicurezza tale problema è necessario indagare prima anche esemplari di Alloro sicuramente spontanei, non coltivati od inselvatichiti, come è stato fatto finora. Ammettendo per l'Alloro un progenitore con $n = 12$, dall'unione di un gamete diploide di questo (quindi 24 cromosomi) con un gamete regolare del tipo di quelli di *Laurus canariensis* (18 cromosomi) otterremo un ibrido a $2n = 42$, come gli esemplari di *Laurus nobilis* finora studiati. Ma anche l'origine di *Laurus canariensis*, oggi accantonato nelle isole Canarie e a Madera e che nel quaternario era esteso fino al Mediterraneo centrale (Isole Lipari, Sicilia e Toscana) e orientale (Cirenaica), andrebbe meglio chiarita.

La costituzione poliploide dell'Alloro spiega la sua notevole variabilità razziale, perchè fra le varie forme sistematiche, le barriere genetiche sono infrante dalla poliploidia, e lo scambio di gene è reso più facile. D'altra parte l'origine ibrida e la natura poliploide di *Laurus nobilis L.* sono del più grande interesse per il significato assunto da questa specie nella storia della vegeta-

(7) C. D. Darlington and A. E. Gairdner, *The Variation System in «Campanula persicifolia»*. « Journal of Genetics », *35*, 97–128, (1937).

(8) V. Bambacioni-Mezzetti, op. cit.

(9) V. Bambacioni-Mezzetti, *Osservazioni cariologiche in alcune Lauracee*. « Scientia Genetica », I, 326–333 (1940).

(10) G. Täckholm e E. Söderberg, *Ueber die Pollenentwicklung bei Cinnamomum nebst Erörterungen über die phylogenetische Bedeutung des Pollentyps*. « Arkiv för Botanik », *15*, 1–14.

(11) G. Tischler, « Tabulae Biologicae », *16*, 172 (1938).

(12) V. Bambacioni-Mezzetti, *Ricerche morfologiche sulle Lauracee. Embriologia della Umbellularia californica Nutt.» e del «Laurus canariensis Webb.»*. « Annali di Botanica », XXII, 99–116 (1941).

zione. L'antico *Lauretum*, considerato come cenosi oceanica caratteristica del piano montano della vegetazione mediterranea, e così esteso nelle terre bagnate dal nostro mare durante le fasi oceaniche interglaciali del quaternario, fu severamente depauperato e scompaginato come tutte le cenosi oceaniche durante i periodi glaciali e massimamente durante l'epiglaciale wurmiano [13], e fu respinto verso posizioni insulari, medidionali ed orientali. Nella nostra Penisola oggi il *Laurus nobilis L.* non costituisce più cenosi pure originarie ed estese, ma si presenta sporadico in seno ad altre cenosi, quà e là spontaneo quale relitto superstite, altrove coltivato con manifesta tendenza a diffondersi naturalmente, e quindi subspontaneo ovunque le condizioni ecologiche lo permettano. In questo stato di fatto la natura poliploide del *Laurus nobilis L.* sta a significare una condizione non originaria, bensì secondaria, certamente in relazione alle severe condizioni climatiche e alle conseguenti migrazioni che la pianta ha dovuto sopportare in passato. Un complesso poliploide, possedendo più volte nel proprio corredo cromosomico la serie delle gene indispensabili per la propria esistenza, presenta sempre una più numerosa gamma di combinazioni genetiche e si trova quindi in condizioni migliori per resistere a condizioni avverse di vita. In definitiva dopo un lungo periodo di selezione, un tipo sistematico molto antico nel regno vegetale finisce dall'essere rappresentato con molte maggiori probabilità esclusivamente da forme poliploidi che non da forme diploidi. Per il suo isolamento sistematico e cariologico e per la sua natura ibrida e poliploide ad un tempo, *Laurus nobilis L.* va considerato oggi nella flora della nostra Penisola il superstite di un ben più ricco complesso poliploide che ha fiorito nei nostri Paesi in tempi geologici passati. Da quanto precede risulta evidente l'interesse di estendere l'indagine citogenetica, volta a chiarire la storia dei relitti del *Lauretum* dell'intera regione mediterranea.

Antropologia. — *Sulla valutazione relativa del peso encefalico* [*]. Nota di A. SACCHETTI, presentata [**] dal Corrisp. S. SERGI.

È nota l'enorme variabilità del peso assoluto dell'encefalo nella scala zoologica anche per quanto riguarda i soli mammiferi. Ma basta scorrerne i valori in una tabella per rendersi conto che, se per caso essi sono ordinati secondo il peso crescente dell'encefalo, si trovano anche ordinati, nell'insieme, secondo la grandezza crescente della massa corporea. Se non che tale dipendenza tra le misure ponderali della massa encefalica e corporea è solo approssimativa e non risponde alla semplice osservazione dei casi singoli. Perciò fin dalle più antiche ricerche si metteva in evidenza che il peso corporeo

(13) A. CHIARUGI, *La vegetazione dell'Appennino nei suoi aspetti d'ambiente e di storia del popolamento montano.* « Atti della XXVII Riunione della Società Italiana per il Progresso delle Scienze, Bologna, settembre 1938 », vol. VI, fasc. 1, pp. 9–45, Roma 1939.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Antropologia della Università di Roma.

(**) Nella seduta dell'8 marzo 1947.

è solo *uno dei tanti fattori di variabilità ponderale dell'encefalo*; ma, ciò nonostante, un fattore molto sensibile per cui occorreva trovare un sistema atto a permettere le comparazioni più diverse prescindendo da tale stretto rapporto di dipendenza. La prima idea fu quella di ricorrere al rapporto semplice fra le due misure di peso dell'encefalo (E) e del corpo (P) secondo la proposta di Cuvier. Questo rapporto E/P, detto appunto *peso relativo* di Cuvier, portò a risultati assurdi: perfettamente opposti a quelli della serie dei valori assoluti di E. I più piccoli animali, infatti, presentavano grandi valori di *peso relativo* e viceversa i più grandi . . . anche l'uomo avrebbe così perso il suo posto di supremazia nella scala zoologica, lasciandosi precedere da tanti più piccoli animali! E non mancarono gli autori a difesa di tali risultati con teorie varie che oggi hanno solo un valore storico. Però ad essi si devono anche in realtà le prime critiche costruttive che suscitarono l'interesse per l'argomento dando luogo ai lavori fondamentali di Manouvrier e Dubois.

Il progresso essenziale era costituito dall'aver compreso che occorreva impostare il problema con lo studio preliminare delle relazioni *effettive* fra E e P. Dubois, proprio su questa via concettuale, impostò il suo esponente di relazione studiando ogni coppia possibile di animali adulti, ma. . . « fra specie di volta in volta simili nella forma e nel grado di cefalizzazione », il che voleva dire praticamente non superare l'ambito comparativo del *genere* o di forme comunque molto affini nel senso sistematico. A Lapicque, successivamente (1907), si deve un contributo nuovo, però ancora nello stesso ordine concettuale del Dubois. Studiando la distribuzione dei pesi E e P in un grafico logaritmico egli mise infatti in evidenza l'allineamento dei valori sperimentali, per le suddette forme affini (ad esempio il leone, il puma, la lince, il gatto), secondo una funzione interpolatrice che tendenzialmente è questa:

$$\log E = 0{,}56 \log P + \log K \qquad (1)$$

dove la costante 0,56 è il *coefficiente angolare* medio osservato nella comune interpolazione lineare. Per i mammiferi in generale, considerati in gruppi omogenei di specie, si sono ottenute così altrettante linee rette di relazione fra log E e log P ma tutte pressochè parallele fra loro avendo lo stesso coefficiente angolare. Tali rette furono dette *linee isoneurali* dallo stesso autore. Sulla base di questo risultato la valutazione relativa del peso encefalico veniva impostata deducendo dalla (1) il valore di $K = E/P^{0{,}56}$, che in realtà dà una misura di posizione del singolo caso rispetto all'andamento della linea isoneurale di appartenenza: e cioè – dobbiamo oggi aggiungere – non esce dal suo ambito comparativo. Ma viceversa gli autori ne estesero l'uso ai più diversi confronti.

Ciò posto, se si cerca di definire il significato rigoroso dei tentativi finora apparsi sull'argomento si deve concludere schematicamente che:

1° il rapporto di Cuvier conteneva in sè l'ipotesi implicita della relazione proporzionale assoluta fra E e P, tale per cui nella (1) si potesse sostituire al 0,56 l'unità, in modo da trasformare il K nel solo valore di E/P;

2° tale ipotesi non veniva confermata dalle esperienze di Dubois e Lapicque *nell'ambito comparativo di specie affini*, mentre si trovava sperimentalmente un più giusto coefficiente di encefalizzazione:

3° rimaneva da risolvere il problema del *confronto interspecifico* nel senso più generale erroneamente perseguito finora.

In altre parole, non bastava aver affrontato in generale lo studio della relazione esistente fra E e P, ma occorreva *estendere la ricerca nei vari livelli di comparazione sistematica*, potendosi ottenere risultati diversi, come del resto è accaduto per le comparazioni intra ed interrazziali dello stesso peso encefalico e di tanti altri caratteri [1]. Con il peso dell'encefalo, in particolare, nei confronti fra razze, la relazione fra E e P è molto più bassa, pur essendo relativamente anche molto più variabile.

Per queste ragioni ho studiato la relazione ancora fra E e P nei confronti di un sufficiente numero di specie rappresentanti i mammiferi e varî uccelli non più quindi limitatamente al *genere* o a forme comunque molto vicine. Nel grafico logaritmico accluso ho riportati i dati sperimentali: i risultati sono di per sè molto significativi. *L'andamento dei punti si può dire praticamente lineare in senso quasi perfetto* (*e, in fondo, insospettato*), *per il fortissimo loro addensamento intorno ad una retta* (quella segnata dalla direzione delle frecce del grafico). A parte sono riportati alcuni casi di vertebrati a sangue freddo e invertebrati per pura curiosità di differenziazione rispetto ad una legge di rapporto interspecifico che viceversa è risultata essere tanto evidente e nettamente segnata dai valori grezzi.

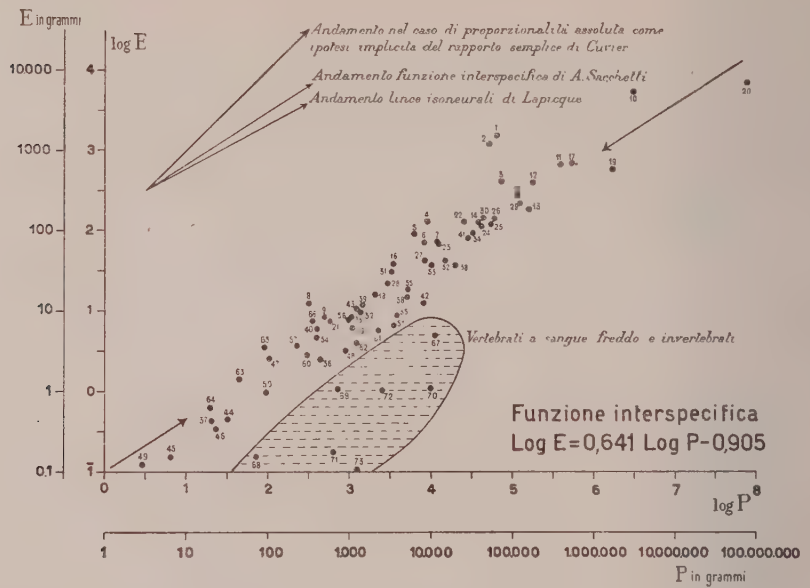
Gli scarti dalla retta della figura annessa hanno veramente, ora, una portata più generale nelle comparazioni desiderate. L'uomo – per esempio – corrisponde ai punti segnati con i numeri 1 e 2 (per ♂ e ♀); ma non mi è possibile nel poco spazio di una Nota approfondirne l'analisi. La funzione della retta interpolatrice è data da:

$$\log E = 0{,}641 \log P - 0{,}905 \qquad (2)$$

e può definirsi come *funzione interspecifica* propriamente detta.

Dunque: la linearità delle *linee isoneurali* di Lapicque permane, ma il coefficiente angolare è maggiore, e significativamente in senso biometrico, tanto da cambiare il coefficiente di encefalizzazione per i confronti interspecifici in quello $K = E/P^{0{,}64}$. L'accrescimento nel grado di dipendenza fra E e P rispetto ai precedenti è notevole se si pensa all'ampiezza sistematica dei confronti impliciti nella funzione sperimentalmente determinata. Si intende che essa ha il valore della scoperta di una legge naturale *empirica* e che quindi i coefficienti numerici non hanno significato se non come valori relativi cui tendenzialmente aderisce la realtà fenomenica (quasi in senso probabilistico rispetto a determinati fattori, mentre per altri fattori si hanno quegli scarti che rappresentano l'individualità sistematica dei gruppi).

(1) Cfr. A. Sacchetti, *I problemi della variabilità dei caratteri*. Ed. Ist. Italiano di Antropologia, 1945.



Distribuzione delle singole specie in funzione di log E e log P. In un'area tratteggiata sono riportati i valori relativi a pochi casi di vertebrati a sangue freddo e invertebrati. Le frecce convergenti verso il centro della distribuzione (operata in massima parte su dati di mammiferi) rappresentano l'andamento della funzione interpolatrice degli stessi dati. A parte, in alto a sinistra del grafico, sono riportate tre frecce secondo l'andamento rispettivo implicito nel *rapporto semplice* di CUVIER, nella *funzione interspecifica* nostra e nelle *linee isoneurali* di LAPICQUE. Le specie di riferimento sono le seguenti:

1. Homo sapiens L. ♂ 2. Homo sapiens L. ♀ 3. Simia satyrus L. ♂ 4. Hylobates syndactylus Desm. ♀ 5. Hylobates leuciscus Kuhl ♀ 6. Semnopithecus maurus Desm. ♂ 7. Macacus cynomolgus L. ♂ 8. Midas rosalia L. ♀ 9. Nycticebus tardigradus L. ♂ 10. Elephas indicus L. ♂ 11. Equus caballus L. 12. Equus asinus L. ♂ 13. Tapirus americanus L. ♂ 14. Capra hircus L. 15. Oryx beisa Rüpp. ♂ 16. Cephalophus maxwelli H. Sm. 17. Camelopardalis giraffa Schreb. ♂ 18. Tragulus javanicus Pal. ♂ 19. Hippopotamus amphibius L. ♀ 20. Balaenoptera sibbaldi Gray 21. Mustela putorius L. ♀ 22. Lycaon pictus Temm. ♂ 23. Canis familiaris lappon ♂ 24. Canis familiaris Bernh. ♂ 25. Canis familiaris Bernh. ♂ 26. Canis familiaris Leonb. 27. Viverra civetta Schreb. ♂ 28. Paradoxurus musanga Gray 29. Felis leo L. ♂ 30. Felis concolor L. ♂ 31. Felis domestica Gm. ♂ 32. Lepus cuniculus L. ♂ (ferus) 33. Lepus cuniculus L. ♀ (ferus) 34. Hydrochoerus capybara Erxl. ♂ 35. Lagostomus tricodactilus Brookes 36. Mus decumanus Pall. ♂ 37. Mus musculus L. ♀ 38. Castor canadensis Kuhl ♂ 39. Sciurus bicolor Sparrm. ♂ 40. Sciurus vulgaris L. ♂ 41. Myrmecophaga jubata L. ♀ .42. Manis javanica Desm. 43. Pteropus edulis Geoffr. ♂ 44. Vespertilio murinus Schreb. ♂ 45. Vespertilio mystacinus Leisl. ♂ 46. Rhinolophus ferrum equinum Schreb. ♀ 47. Tupaja javanica Horsf. ♂ 48. Erinaceus europaeus L. ♀ 49. Sorex vulgaris L. 50. Talpa europaea L. L. 51. Didelphys marsupialis L. ♂ 52. Thylacinus cynocéphalus 53. Macropus 54. Dasyurus maculatus 55. Aquila chrysaetos 56. Buteo vulgaris 57. Falco tinnunculus e F. cenchris 58. Cygnus olor e C. gilvus 59. Anas boschas 60. Anas querquedula 61. Pavo cristatus 62. Phasianus colchicus 63. Mimus polyglottus 64. Luscinia rubicola 65. Paleornis docilis 66. Chrysotis amazonicus 67. Alligator missisipiensis 68. Rana catesbiana 69. Cyprinus carpio 70. Cyprinus vulgaris 71. Anguilla vulgaris 72. Octopus vulgaris 73. Homarus vulgaris.

Molto più in generale si può concludere che *la valutazione relativa del peso encefalico di un determinato individuo o gruppo è diversa in rapporto all'ampiezza del « complesso » sistematico al quale di volta in volta si fa riferimento.* Da cui, viceversa, l'importanza dello studio delle leggi di rapporto armonico fra parti di organismi per la metodologia della sistematica ed il riconoscimento degli aggruppamenti naturali di diverso grado.

Infine, ho potuto mettere in evidenza che i fenomeni di progressivo accrescimento di grado nella relazione fra E e P in funzione dell'ampiezza dei « complessi » sistematici trovano una adeguata interpretazione essendo anche in rapporto con il comportamento delle stesse cellule nervose, i *neuroni*, nel senso delle loro variazioni numeriche e di grandezza, sopratutto in riferimento ai *pirenofori*, alle cellule cioè esclusa l'arborizzazione dendritica. Il numero definitivo dei neuroni dell'adulto si stabilisce infatti ben presto nelle prime fasi della crescenza come tipico della specie, mentre le variazioni di massa dei pirenofori sono successive e chiaramente legate alla grandezza somatica dell'animale; per cui si può dire che alle più piccole differenze sistematiche di massa corporea corrisponde in genere la variazione di grandezza dei pirenofori, alle più grandi *anche* la variazione numerica, operandosi così – se non altro – una *somma* più grande di fattori a carico del peso encefalico e in rapporto alla massa del soma. Ma rimando l'argomento al lavoro definitivo.

Biologia. — *L'assetto cromosomico e l'interferenza dei chiasmi nella spermatogenesi di «Simulium equinum L.» (Dipt. Simuliidae)* (*). Nota di G. MONTALENTI, presentata (**) dal Corrisp. G. COTRONEI.

In una ricerca eseguita in collaborazione con H. G. Callan (1) abbiamo dimostrato che in alcuni Culicidi esiste una forte interferenza che si estende oltre il centromero, il che significa che la formazione di un chiasma in un braccio rende meno probabile che lo stesso evento si verifichi nell'altro braccio del bivalente. Ciò è in accordo con quanto fin dal 1941 Pätau (2) aveva trovato in *Culex pipiens* e *Dicranomyia trinotata*. In una Nota precedente (3) ho riferito su di un altro dittero del gen. *Psychoda*, in cui tale interferenza è massima, poichè praticamente la totalità dei 1375 bivalenti esaminati alla metafase in 6 individui diversi presenta un sol chiasma in un braccio e nessuno nell'altro. In un'altra precedente pubblicazione (4) è stato dimostrato che l'interferenza esiste ed è abbastanza forte pure in *Asellus aquaticus*.

Riferisco in questa Nota su analoghe ricerche eseguite su di una specie di *Simulium* le cui larve sono molto comuni nel fiume Sarno, e che credo di poter riferire alla specie *S. equinum* L. Le larve, pescate nei mesi di gennaio e febbraio, presentano il massimo di metafasi prime spermatogenetiche allorchè sono prossime alla ninfosi. I testicoli venivano estratti e preparati

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Genetica dell'Università di Napoli, in parte con contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta dell'8 marzo 1947.

(1) H. G. CALLAN and G. MONTALENTI, « Journ. of Genetics », 1947, in corso di stampa.

(2) K. PÄTAU, « Chromosoma », II, 1941, p. 36.

(3) G. MONTALENTI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. I, 1946, pp. 120–123.

(4) G. MONTALENTI e G. VITAGLIANO, « La Ricerca scientifica e la Ricostruzione », anno 16°, 1946, pp. 944–948.

col metodo dello schiacciamento con il carminio acetico di Schneider o l'orceina acetica di La Cour.

Questa specie, come si rileva dell'esame delle piastre metafasiche delle mitosi spermatogoniali che si trovano nelle larve più giovani, ha un assetto diploide di sei cromosomi (fig. 1, *A*). Si distinguono facilmente una coppia grande, una di dimensioni intermedie e una più piccola. Non si distinguono eterocromosomi (solo i maschi furono esaminati). Tutti i cromosomi hanno

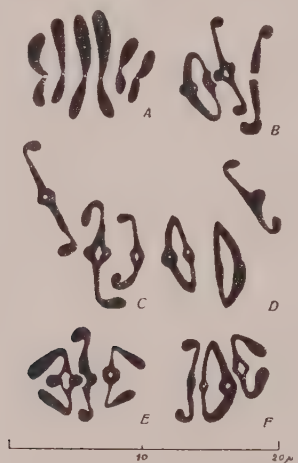


Fig. 1. — Cromosomi metafasici di *Simulium equinum* (ob. 100 × Zeiss, apocrom. imm. om.; oc. 25 × periplan. Leitz).

A, mitosi spermatogoniale; *B–F*, metafasi meiotiche. Le formule dei chiasmi (tenendo presenti i simboli spiegati nel testo) sono le seguenti:

	SM_1	SM_2	*sm*	totale chiasmi
B	XX	XO	XO	4
C	XO	XO	XO	3
D	XX	XX	XO	5
E	OX	OX	XO	3
F	XX	OX	XO	4

un braccio più lungo e uno più corto, all'incirca i 2/3 del primo. Circostanza questa, come vedremo, molto favorevole all'analisi dei chiasmi.

I tre bivalenti sono piuttosto ben analizzabili (fig. 1, *B–F*) ed è quasi sempre possibile riconoscere il più piccolo dagli altri due, nonchè, in ciascuno di essi, il braccio lungo e quello corto, sicchè si può, con una soddisfacente approssimazione, stabilire in quali di essi sono situati i chiasmi.

Ho esaminato finora 8 individui, con un totale di 810 cellule e 2430 bivalenti. Mi riservo di riferire completamente i dati raccolti e l'analisi statistica compiuta in un lavoro più esteso. Qui riporto soltanto una tabella

in cui, per alcuni individui, sono indicati il numero delle cellule esaminate, la media del numero dei chiasmi per cellula e il rapporto dei valori osservati rispetto ai valori teorici nei vari bivalenti. I bivalenti sono raggruppati in due categorie; la categoria SM comprende i due bivalenti più grandi di ogni nucleo, la categoria *sm* il piccolo. I valori teorici furono calcolati, per ogni categoria, in base al numero dei chiasmi osservati in quella categoria, nell'ipotesi che essi fossero distribuiti a caso fra i due bracci. I simboli XX, XO e OX indicano rispettivamente i seguenti casi: un chiasma nel braccio lungo e uno nel corto; un chiasma nel braccio lungo e nessuno nel corto; nessun chiasma nel braccio lungo e uno nel corto. La categoria OO, nessun chiasma (univalenti) è praticamente trascurabile, perchè è rappresentata da pochissimi casi eccezionali.

TABELLA I.

Distribuzione dei chiasmi nelle metafasi di 6 individui di « Simulium equinum » (spiegazione nel testo).

Individuo N.	Media dei chiasmi per nucleo	Numero delle cellule esaminate	BIVALENTI SM				BIVALENTI *sm*			
			XX	XO	OX	indice $1-c$	XX	XO	OX	indice $1-c$
3	$4{,}11 \pm 0.06$	35	0,95	1,07	1,46	0,051	0,56	1,13	4,39	0,434
4	$4{,}11 \pm 0.07$	89	0,89	1,11	1,99	0,105	0,85	1,08	2,70	0,145
5	$4{,}27 \pm 0.06$	111	0,93	1,09	1,77	0,073	0,80	1,12	2,58	0,192
10	$4{,}21 \pm 0.06$	135	0,90	1,18	1,57	0,103	0,78	1,10	3,48	0,216
11	$4{,}07 \pm 0.05$	191	0,87	1,21	1,58	0,125	0,59	1,14	3,72	0,412
12	$3{,}88 \pm 0.08$	61	0,86	1,20	1,60	0,134	0,34	1,20	4,37	0,658

Si vede dai valori riportati nella tabella, che in ambedue le classi SM e *sm* il numero dei bivalenti XX è inferiore all'aspettativa (rapporto < 1), mentre il numero dei bivalenti XO e OX è sempre maggiore dell'aspettativa (rapporto > 1). Si vede inoltre che le differenze fra valori osservati e valori teorici è molto maggiore nella classe *sm*, il che significa che l'interferenza è più forte nel bivalente piccolo che nei due grandi. È inoltre riportata nella tabella una misura dell'interferenza, calcolata secondo la formula proposta da Wanner (5). Questo autore, che in *Crepis capillaris* non ha trovato interferenza oltre il centromero, propone, come misura dell'interferenza, il valore

$$c = \frac{a \cdot n}{(a \cdot b) \cdot (a \cdot c)}$$

(5) H. WANNER, « Arch. d. J. Klaus-Stiftung. f. Vererbungslehre usw.». Ergänzungsbd. zu Bd. XX, 1945, pp. 356-365.

dove n è il numero totale dei bracci osservati, a e b, rispettivamente il numero dei bracci lunghi e dei bracci corti, in cui si è trovato un chiasma; c e d il numero dei bracci lunghi e dei bracci corti in cui non si è trovato alcun chiasma. Io ho usato per ragioni di opportunità, come indice d'interferenza, il valore $1 - c$. Anche dall'esame degli indici di interferenza risulta chiaro che questa è maggiore nel bivalente piccolo che non nei due grandi.

Il caso di *Simulium*, in cui si possono distinguere i due bracci di ogni bivalente, è particolarmente favorevole alla dimostrazione dell'interferenza, perchè, come è discusso nel citato lavoro di Callan e Montalenti, là dove ciò non è possibile sussiste il dubbio che sia sempre uno dei due bracci (il destro o il sinistro) che non forma chiasmi, per esempio a causa di differenze strutturali (ibridità strutturale). Nel citato lavoro si dimostra però che tale ipotesi è assai poco probabile. Nel caso in esame essa è senz'altro esclusa, perchè si vede che i chiasmi possono formarsi indifferentemente nell'uno e nell'altro braccio.

Risulta dunque che nella linea maschile di «Simulium equinum» v'è una forte interferenza fra i due bracci nella formazione dei chiasmi citologicamente riconoscibili, e che essa è più forte nel bivalente piccolo che non nei due grandi.

Biologia. — *Assetto cromosomico e interferenza dei chiasmi in «Prionotropis appulum» (Orth. Acrid)*[*]. Nota di G. Montalenti e G. Vitagliano, presentata[**] dal Corrisp. G. Cotronei.

Prionotropis (= *Cuculligera*) *appulum* Costa è un grosso ortottero comune nell'Italia meridionale. Su alcuni esemplari provenienti dalla provincia di Lecce[1] abbiamo potuto osservare la spermatogenesi su preparati per schiacciamento, colorati con orceina acetica di La Cour (contrariamente a quanto avviene negli Ortotteri, dove questo metodo non dà di solito risultati molto soddisfacenti, abbiamo avuti ottimi preparati).

L'assetto cromosomico di questa specie, che non ci risulta sia stato descritto, è analogo a quello di *Pamphagus marmoratus* studiato dal Granata[2]. Nel maschio si trovano nove coppie di autosomi e un eterocromosoma. Evidentemente l'assetto diploide è così costituito: 18 A + X nel maschio e 18 A + 2 X nella femmina.

La prima metafase meiotica presenta elementi molto contratti, com'è consuetudine negli Ortotteri, talchè l'analisi dei chiasmi riesce piuttosto difficile. In compenso, le diacinesi sono chiarissime, costituite da belli e grossi elementi, facilmente analizzabili.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Genetica dell'Università di Napoli.

(**) Nella seduta dell'8 marzo 1947.

(1) Ringraziamo il dott. C. Winspeare, che ci ha fornito il materiale e il prof. M. Salfi che lo ha cortesemente determinato.

(2) L. Granata, «Arch. f. Zellforsch.», V, 1910, p. 182.

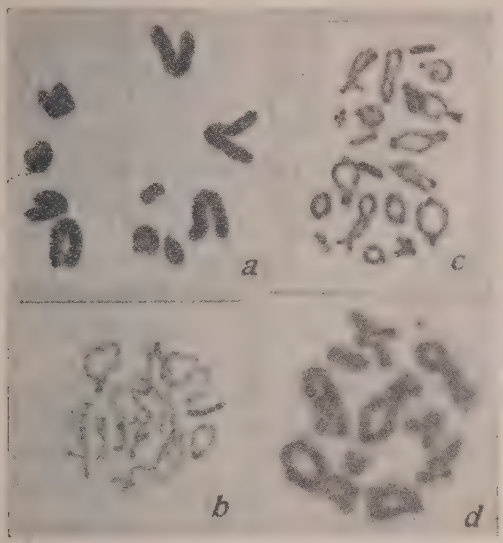


Fig. 1. – Spermatogenesi di *Prionotropis appulum*.

a) telofase della seconda divisione meiotica, corredo aploide, piastra con nove autosomi e l'eterocromosoma (× 1200); *b*) diacinesi precoce (× 630); *c*) due diacinesi (× 630); *d*) tarda diacinesi (× 1200); in tutte le diacinesi si vede l'eterocromosoma eteropicnotico. (Foto eseguite con Leica, ob. 40 ×, apocrom. Zeiss, oc. 10 × Periplanat. Leitz).

Riferiamo in questa Nota alcuni risultati preliminari ottenuti dallo studio di due individui. Nel primo furono studiate 33 cellule, nel secondo 66. I bivalenti furono divisi in tre categorie: 4 più grandi, 3 medi, 2 piccoli. Tutti hanno centromero mediano o submediano. Poichè le conte si fanno particolarmente bene nello stadio di diacinesi, in cui, viceversa, non è facile localizzare il centromero, furono contati i chiasmi di ogni bivalente, senza peraltro poterli attribuire con sicurezza all'uno o all'altro braccio. Tuttavia dai dati così ricavati è possibile trarre qualche conclusione per quanto riguarda l'interferenza tra i due bracci.

TABELLA I.

Media di chiasmi per bivalente e relativo errore medio nei cromosomi grandi, medi e piccoli di « Prionotropis appulum ».

Ind. N.	Numero delle cellule	4 cromosomi grandi	e_m	3 cromosomi medî	e_m	2 cromosomi piccoli	e_m
II	33	3,0076	0,0627	2,1818	0,0391	1,2121	0,0622
III	66	2,7916	0,0455	1,9444	0,0394	1,2121	0,0308

Infatti, come risulta dalla tabella I, i cromosomi grandi hanno una media di chiasmi per bivalente prossima a 3, e poichè essi sono abbastanza uniformemente distribuiti lungo il bivalente, si può supporre con sufficiente approssimazione che ogni braccio abbia, in media 1,5 chiasmi. Per i cromosomi medi la media di chiasmi per bivalente è prossima a 2, e, per le stesse ragioni, si può supporre che ogni braccio abbia in media un chiasma. Nei cromosomi piccoli, invece, si trovano in grandissima frequenza delle figure a croce, con un solo chiasma in uno dei bracci. La media dei chiasmi per bivalente è infatti di 1,2 cioè 0,6 chiasmi per braccio.

Quindi nei cromosomi piccoli si può ammettere che esista una forte interferenza oltre il centromero, analoga a quella dimostrata nei cromosomi di vari Ditteri e di *Asellus* (3).

È possibile che, anche nei cromosomi medi e grandi vi sia interferenza oltre il centromero, nel senso che un chiasma prossimale in un braccio interferisca con la formazione di un chiasma prossimale nell'altro; ma per poterla dimostrare e misurare occorrebbe esaminare accuratamente la posizione dei singoli chiasmi nei due bracci di questi bivalenti e individuare la posizione del centromero. Perciò si richiedono altre ricerche. *In conclusione, si può ritenere molto probabile che nei due piccoli bivalenti di Prionotrŏpis appulum l'interferenza dei chiasmi si estenda oltre al centromero, nel braccio opposto.*

Biochimica. — *Su un fattore ipoglicemizzante dal duodeno di uccelli.* Nota di S. Bocchiotti, B. M. Belotti ed E. De Langlade, presentata (*) dal Corrisp. U. Lombroso.

In un gruppo di ricerche pubblicate nei « Rendiconti dei Lincei », 1916–1917 (1) era stato osservato dal Lombroso che facendo circolare del sangue normale in organi sopravviventi, pancreas, intestino, muscolo, rene, milza, fegato, si avverte un certo aumento del potere glicolitico del sangue stesso nel caso in cui si esperimenta con il pancreas o con l'intestino isolato, mentre con la circolazione negli altri organi questo potere glicolitico non si modifica sensibilmente.

Se al sangue circolante si aggiunge una certa quantità di glucosio 0,5%–1%, allora l'aumento dell'attività glicolitica è molto maggiore, sempre se si esperimenta con il pancreas o con l'intestino, mentre con gli altri organi il fenomeno non si avverte. L'aumento cospicuo della glicolisi si osserva pure esperimentando con l'intestino isolato di cane spancreato da più giorni tenuto sopravvivente ed usando per la circolazione il sangue dello stesso animale: esperienza questa eseguita per assicurarsi che l'attività glicolitica riscontrata sul perfusato di intestino, non avesse origine da quella pancreatica.

(3) V. Nota precedente, in questo fascicolo, e lavori in esso citati.

(*) Nella seduta del 12 aprile 1947.

(1) U. Lombroso, « Rendiconti Accademia dei Lincei », *25*, 41, 83, 737, 802 (1916).

Questo dato di fatto indusse il Lombroso a prospettare l'ipotesi che l'intestino cooperasse con il pancreas ad immettere in circolo quel *quid* (in quell'epoca l'insulina non era stata ancora isolata) che regola il metabolismo intermedio glucidico, metabolismo che è abbassato negli animali spancreati, ma che non è completamente abolito.

In misura minore, gli stessi fenomeni si ottengono quando la circolazione nel pancreas o nell'intestino viene eseguita con liquido di Ringer glucosato. In queste esperienze la glicolisi si esalta (Artom) [2] notevolmente se si aggiungono, in seguito, alla circolazione, corpuscoli rossi.

Dopo la scoperta dell'insulina è stata esperimentata l'azione di perfusato di liquido di Ringer fortemente glucosato, sempre esperimentando con pancreas od intestino, e si osservò che il liquido raccolto dopo la circolazione ed iniettato, provoca una notevole ipoglicemia ed anche una riduzione della glicosuria nei cani spancreati, associata però in qualche caso a diarrea e a scialorrea.

L'effetto ipoglicemico del perfusato di intestino è molto più manifesto se l'intestino proviene da un cane spancreato da più giorni; quasi che per la mancanza del fattore pancreatico regolatore del metabolismo intermedio glucidico, si esaltasse quella ad azione simile esplicata dall'intestino.

Gli effetti ipoglicemizzanti, antidiabetici, svolti dall'intestino vennero in seguito ampiamente confermati dallo Zunz e La Barre [3], che usarono, invece di perfusato di organi come il Lombroso, estratti di duodeno di maiale, somministrati sia per bocca che per iniezione. Gli esperimenti vennero eseguiti anche su cani spancreati adoperando una quantità di estratto variante da 10 a 30 mg. pro kg.

Anche questi autori osservarono la possibilità di ottenere effetti benefici dal loro preparato, che denominano « incretina », somministrato sia per bocca che per endovena in cani normali e spancreati.

In seguito furono tentate applicazioni pratiche dal De Barbieri [4] e con risultati contrastati da Loew–Gray–Ivy [5] e da Sanfilippo [6].

Noi abbiamo creduto bene di riprendere lo studio degli effetti di estratti preparati in modo simile a quello degli autori Belgi, usando però intestino di uccelli (gallinacei) in luogo di maiale.

La scelta di questo materiale è stata suggerita dalle seguenti ragioni: negli uccelli l'estirpazione del pancreas non provoca di per sè sola l'insorgere di un diabete, anche quando l'animale sopravvive lungo tempo a questa operazione: le anitre, ad esempio, possono sopravvivere fino a sei mesi (Sprague–Ivy) [7], (Morando) [8] senza che si manifesti glicosuria.

(2) C. Artom, « Arch. Farmc. Sper. », *24*, 3 (1917).
(3) J. La Barre, *La Sécrétine*, ediz. Masson, 1936.
(4) G. De Barbieri, « Rass. Clin. Terap. », *38*, 115 (1839).
(5) B. Loew, S. Gray, A. Ivy, « Am. J. Physiol. », *129*, 19 (1940).
(6) G. Sanfilippo, « Arch. It. Med. Sper. », *6*, 681 (1940).
(7) R. Sprague, A. Ivy, « Am. J. Physiol. », *115*, 387 (1937).
(8) G. C. Morando, « Arch. Fisiol. », *38*, 343 (1939).

Nell'animale compaiono subito manifestazioni (quale steatorrea ed eliminazione di amido in elevate percentuali nelle feci) dovute alla deficenza del pancreas, ma il ricambio intermedio glucidico appare perfettamente normale.

Infatti la glicosuria non si presenta anche se all'animale si somministra glucosio, nel qual caso, portandosi il quoziente respiratorio verso l'unità, si ha la dimostrazione della perfetta combustione di tale alimento.

I polli, i colombi, hanno una minore sopravvivenza, ma per quanto riguarda la glicosuria si comportano come le anitre.

È da ricordare che talvolta anche in mammiferi si può osservare la mancanza di un vero diabete: ciò avviene quando invece di estirpare il pancreas normale si provoca la sclerosi completa del tessuto pancreatico con iniezioni di paraffina od olio nei dotti pancreatici. In questi casi non si avverte l'insorgere del grave diabete caratteristico del diabete da pancreasectomia, ma soltanto una leggera ed intermittente glicosuria che si mantiene tale anche se si asporta l'organo così alterato.

Tutti questi dati sono concordi nell'indicare la presenza di qualche altro organo capace di supplire in parte o completamente alla funzione endocrina del pancreas.

Per quanto riguarda il metabolismo intermedio glucidico, l'organo che più logicamente poteva sostituire il pancreas era l'intestino, ricordando che il pancreas si origina da un diverticolo duodenale. Questa ipotesi trova un notevole appoggio su un fatto osservato da Seitz–Ivy [9] i quali estirpavano contemporaneamente pancreas e duodeno in polli di grossa mole videro (a differenza dei precedenti autori che avevano estirpato il solo pancreas) l'insorgere di una intensa glicosuria.

Questi autori, è bene avvertire, avevano operato semplicemente al fine di rendere così più facile la completa estirpazione del pancreas, ed è alla deficienza del pancreas così estirpato che attribuirono l'insorgere del diabete. Siccome poi in qualche animale vissuto a lungo la glicosuria tendeva a scomparire, anche questi autori accennarono ad una possibile supplenza della azione pancreatica sul metabolismo intermedio glucidico, da parte dell'intestino.

Nelle nostre esperienze l'incretina fu preparata seguendo il metodo indicato da Zunz e La Barre con qualche lieve modificazione. Riportiamo brevemente la tecnica usata.

Estrazione dell'incretina. – I duodeni vengono, dopo la lavatura in acqua corrente, macinati con tritacarne e poi tritati con sabbia di quarzo. Il tutto si porta in soluzione di HCl al 6‰; si riscalda ad 80° per qualche minuto. Si lascia raffreddare e si neutralizza a pH 7 con NaOH N/10. In seguito agitando si acidifica con acido acetico al 5‰ fino a pH 6.

Si lascia riposare una notte: si centrifuga e si filtra. Al filtrato si aggiunge una soluzione a parti uguali di HCl e H_2SO_4 N/20 circa fino a che si ottiene

(9) G. Seitz, A. Ivy, «Am. J. Physiol.», *93*, 686 (1933).

una reazione acida corrispondente a pH 4,5 (punto isoelettrico), quindi si aggiunge alla soluzione NaCl al 30%, gradatamente ed agitando di continuo per favorire la flocculazione. Si lascia riposare una notte; si centrifuga. Il centrifugato, sciolto in HCl al 5‰ circa viene riprecipitato con la stessa soluzione di NaCl concentrata. L'operazione si ripete 4 o 5 volte fino a che il precipitato diventi bianco. Si solubilizza allora con HCl molto diluito e si riprecipita successivamente con solfato ammonico e acido tricloro acetico. Il precipitato viene estratto con etere etilico. Dall'evaporazione della frazione eterea si ricava l'incretina, polvere bianca facilmente solubile in acqua.

Da 100 gr. di duodeni si ottengono 20 mg. di incretina.

Dati sperimentali.

Le nostre ricerche furono condotte su cani normali e spancreati. Le tabelle riportano i relativi risultati.

Tabella I.

Somministrazione per iniezione ipodermica in cani normali.

N. d'ordine	Quantità mg.	Peso Kg.	Glicemia iniziale	Dopo 1 h	2 h	3 h	4 h
1°	20	8.300	1,05 %	0,73	0,62	0,55	0,79
2°	15	8.300	1,12	0,91	0,72	0,67	0,75
3°	15	6.900	1,20	0,90	0,64	0,61	0,77
4°	15	9.000	1,07	0,84	0,70	0,63	0,71
5°	15	5.100	1,03	0,98	0,64	0,70	0,81
6°	20	12.300	1,06	0,80	0,61	0,59	0,74

Tabella II.

Somministrazione orale in cani normali.

N. d'ordine	Quantità mg.	Peso Kg.	Glicemia iniziale	Dopo 1 h	2 h	3 h	4 h
1°	20	9.000	1,17 %	0,87	0,71	0,70	0,83
2°	20	12.300	1,95	0,94	0,82	0,73	0,74
3°	15	5.100	1,06	0,89	0,71	0,70	0,77
4°	20	5.100	1,41	1,15	1,01	1,15	1,38

TABELLA III.

Somministrazione ipodermica in cane spancreato.

N. d'ordine	Quantità mg.	Peso Kg.	Glicemia iniziale	Dopo 1 h	2 h	3 h	4 h
1°	20	6,200	2,45	1,45	1,50	1,62	1,88
2°	20	6,200	2,24	1,51	1,58	1,62	1,69

TABELLA III *bis*.

Variazioni della glicosuria nel cane spancreato sottoposto a trattamento di incretina.

PRIMA DEL TRATTAMENTO CON INCRETINA.

Data	Quantità di urina	Glicosuria	Quantità di glucosio
16–2–47	120 cc.	96 °/₀₀	
17–2–47	140 cc.	94 °/₀₀	
18–2–47	130 cc.	95 °/₀₀	
19–2–47	150 cc.	100 °/₀₀	
media	135 cc.	96 °/₀₀	13 gr.

DOPO IL TRATTAMENTO CON INCRETINA.

Data	Quantità di urina	Glicosuria	Quantità di glucosio
20–2–47	55 cc.	17 °/₀₀	
22–2–42	65 cc.	20 °/₀₀	
media	60 cc.	18,5 °/₀₀	1,15 gr.

CONCLUSIONE. – Dalle nostre esperienze risulta che con iniezioni di estratti (incretina) duodenali di uccelli si ottiene alla dose di 2–3 mg. pro kg. nei cani normali una diminuzione della glicemia. Anche la somministrazione orale 3–4 mg. pro kg., ha dato risultati simili.

Interessanti, per quanto scarso sia il numero di ricerche, sono i risultati ottenuti in un cane spancreato tenuto a dieta costante. Notevole fu la riduzione della glicemia, circa 40 °/₀ ed ancor più quella della glicosuria che (vedi tabella III *bis*) raggiunse il 90 °/₀. Se paragoniamo i nostri dati con quelli riferiti dalla Scuola belga, noi osserviamo che con meno di $\frac{1}{10}$ di sostanza abbiamo raggiunto effetti corrispondenti a quelli ottenuti dagli autori belgi con materiale estratto dal duodeno di maiale. Se questo diverso risultato si deve ad una differente attività dell'incretina estratta dagli intestini di animali che non presentano disturbi nel metabolismo degli idrati di carbonio, dopo l'estirpazione del pancreas, di fronte a quella estraibile dagli animali nei quali il pancreas rappresenta il fattore predominante per difendere l'organismo dal diabete; o se invece ciò sia da ascriversi a qualche dettaglio nella tecnica usata per l'estrazione dell'incretina che abbia permesso nelle nostre esperienze un più alto rendimento dell'incretina, sarà oggetto di ulteriori indagini.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente dà notizia ai Colleghi dell'ultimo fascicolo uscito dei *Rendiconti* accademici e raccomanda a tutti gli Autori la massima sollecitudine nel rinvio delle bozze per rendere possibile la regolare e sollecita pubblicazione dei successivi fascicoli.

Dà pure comunicazione che, per la generosa offerta della somma di tre milioni di lire da parte del Consiglio Nazionale delle Ricerche, sarà possibile stampare le *Memorie* della Classe di Scienze Fisiche già approvate, e la cui pubblicazione era sospesa per mancanza di fondi, e i volumi che ancora sono da pubblicare per completare la collezione destinata a illustrare i risultati della spedizione al Lago Tana.

Ricorda infine ai Colleghi che il 9 maggio prossimo la Classe sarà convocata per la discussione sugli «Ultravirus».

Il Presidente comunica che il Socio Abetti è stato invitato nel Brasile per fare osservazioni in occasione del prossimo eclisse solare e prega il Socio Abetti, presente alla seduta, di voler dare qualche informazione in proposito ai Colleghi.

Il Socio Abetti informa i Colleghi che l'eclisse avrà luogo il 20 maggio prossimo e sarà visibile nelle migliori condizioni lungo una linea che va dal Cile a Pernambuco attraverso il Brasile. La durata dell'eclisse sarà di tre minuti e mezzo e la regione migliore per osservarla è nello stato di Minas Gheraes, a 700 Km. a nord di Rio de Janeiro. L'eclisse darà modo di poter compiere importanti osservazioni sulla corona solare e per questo già diverse spedizioni straniere si sono messe in viaggio verso il Brasile. Prima fra tutte queste spedizioni è quella degli Americani, che è composta di circa 80 astro-

nomi e radiotecnici. Altre spedizioni sono state organizzate dagli Svedesi e dai Norvegesi. L'Italia era stata invitata dal Governo Brasiliano, ma purtroppo, per difficoltà sorte all'ultimo momento circa il trasporto dei materiali necessari per la spedizione, la spedizione stessa non ha potuto aver più luogo.

Il Presidente ringrazia il Socio Abetti della interessante comunicazione.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Bompiani presenta in omaggio il volume V del « Rendiconti di matematica e delle sue applicazioni » pubblicato dall'Istituto Nazionale di Alta Matematica e il « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana del 1946 ».

Il Presidente ringrazia il Socio Bompiani della presentazione dei due volumi.

L'Accademico Segretario presenta le opere giunte in dono all'Accademia, segnalando la commemorazione del Socio Lionello Petri, fatta a cura di Gabriele Goidànich e il volume pubblicato in memoria di Behring dall'Università di Marburgo.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per l'inserzione nei *Rendiconti* accademici i Soci: Abetti Bonino, Bompiani, Cotronei, Picone, Lombardi, Checchia–Rispoli, Krall, Sergi e Sansone.

L'Accademico Segretario legge l'elenco delle Note pervenute.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

Abetti G., « Altezza della cromosfera negli anni 1944–45–46 ed andamento del ciclo solare ».

Bompiani E., « Varietà prodotto topologico di spazi multipli ».

Checchia–Rispoli G., « Sul genere « Brissopatagus Cotteau ».

Krall G., « Asismica delle torri ».

Krall G., « Dinamica ed aerodinamica dei fili. Vibrazioni visibili ». Nota I.

Sacco F., « L'Età delle formazioni con Pietre verdi ».

Scarpa O., « Sulla corrosione elettrochimica del ferro e della ghisa effetto di correnti alternate ».

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Bianchi G., « Il trasporto elettrico degli ioni nei metalli liquidi e solidi – Sistema rame – amalgama di rame, di zinco, di cadmio e di piombo » (presentata dal Corrisp. O. Scarpa).

Bianchi G., « Comportamento anodico dello stagno in soluzione alcalina ». Nota I (pres. dal Corrisp. O. Scarpa).

BIANCHI G., «Comportamento anodico dello stagno in soluzione alcalina». Nota II (pres. dal Corrisp. O. SCARPA).

BIANCHI G., «Contributo alla conoscenza dei fenomeni di passività anodica dello stagno in soluzione alcalina» Nota III (pres. dal Corrisp. O. SCARPA).

BOCCHIOTTI S., BELOTTI B. M., DE LANGLADE E., «Su un fattore ipoglicemizzante dal duodeno di uccelli» (pres. dal Corrisp. U. LOMBROSO).

CASADIO G., «Sulle trasformazioni puntuali che hanno direzioni inflessionali passanti per punti fissi» (pres. dal Socio E. BOMPIANI).

CARBONE F., «Sulle superficie di terzo ordine aventi un punto doppio biplanare o uniplanare» (pres. dal Socio E. BOMPIANI).

CARBONE F., «Sulle superficie analitiche aventi un punto doppio biplanare o uniplanare» (pres, dal Socio E. BOMPIANI).

CASTOLDI L., «Causalità e indeterminazione nei fondamenti della Meccanica quantica» (pres. dal Socio L. ROLLA).

COSTANZO A., «La statura degli italiani ventenni nati dal 1854 al 1920» (pres. dal Corrisp. S. SERGI).

DULBECCO R., «Nuove ricerche sulla sterilizzazione di embrioni di pollo mediante irradiazione con raggi γ. Costante determinazione del sesso femminile negli embrioni irradiati» (pres. dal Socio G. LEVI).

FICHERA G., «Sull'esistenza delle funzioni potenziali nei problemi della fisica matematica» (pres. dal Socio M. PICONE).

GEROLA F. M., «Escreti fungini e mitosi cellulari II» (pres. dal Socio G. GOLA).

GHIZZETTI A., «Condizioni necessarie e sufficienti per il momento di una funzione limitata» (pres. dal Socio M. PICONE).

GIOVANNOZZI R., «Intorno alla trasmissione del moto fra assi sghembi mediante ruote elicoidali» (pres. dal Corrisp. E. PISTOLESI).

MACCAGNO A. M., «Sull'esistenza del Campaniano nella Migiurtinia» (pres. dal Corrisp. G. CHECCHIA-RISPOLI).

MANACORDA T., «Sul comportamento asintotico degli integrali della equazione: $y''(x) + p(x)\,y'(x) + q(x)\,y(x) = 0$ quando $\lim q(x) = +\infty$». Nota I (pres. dal Corrisp. G. SANSONE).

MAZZI V., «Il nucleo intermedio e la regione pretettale del Talamo in alcuni teleostei» (pres. dal Corrisp. N. BECCARI).

MONTEROSSO B., «Note araneologiche – XXV. Considerazioni sul tipo di partenogenesi riscontrato negli Araneidi» (pres. dal Socio A. RUSSO).

SCHREIBER G., «Le grandezze nucleari nello sviluppo e metamorfosi degli Anuri. Considerazioni generali sulle ricerche cariometriche» (pres. dal Socio G. GOLA).

SCONZO P., «Nuovi elementi dell'orbita del pianetino (1177) Gonnessia» (pres. dal Socio G. ARMELLINI).

SIGNORINI R., «Struttura marginale dell'Appennino Lucano» (pres. dal Corrisp. G. CHECCHIA-RISPOLI).

STAMPACCHIA G., « Sulla definizione assiomatica dell'area di una superficie rettificabile » (pres. dal Corrisp. R. CACCIOPPOLI).

STEFANELLI A., « I problemi della determinazione istogenetica e del differenziamento dei neuroni inquadrati nel campo della embriologia sperimentale » (pres. dal Corrisp. G. COTRONEI).

UDESCHINI P., « Moto plastico–viscoso dei ghiacciai » (pres. dal Socio C. SOMIGLIANA).

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 12 aprile 1947

GARCÍA Godofredo. — *Ecuaciones cardinales y escalares generales y completas del movimiento relativo rotacional de los fluídos viscosos complesibles.* Estr. da « Actas de la Academia Nacional de Ciencias exactas, físicas y naturales de Lima », vol. IX, a. IX, 1946, fasc. 3.

— *Generalización de la igualdad de Lagrange y de la desigualdad de Sundman para el caso de más ide tres cuerpos.* Estr. da « Publicaciones del Instituto de Matemática y Estadística », vol. I, 1946, n. 5.

— *Sobre el problema balístico del proyectil–cohete.* Chorillos, Imp. de la Escuela Militar, 1947. Pp. 20, in 8°, con figg.

GOIDÀNICH Gabriele. — *Lionello Petri (1875-1946).* Estr. da « Ricerca scientifica e ricostruzione », a. XVI, 1946, n. 12.

PHILIPPS – UNIVERSITÄT ZU MARBURG. — *Behring zum Gedächtnis.* Reden und wissenschaftliche Vorträge anlässlich der Behring – Erinnerungsfeier, Marburg an der Lahn 4. bis 6. Dezember 1940. Berlin, Bruno Schultz, 1942. Pp. VI – 200, in 4°, con tavv.

SIGNORINI Antonio. — *Meccanica razionale con elementi di statica grafica.* Vol. I. Roma, Perrella, 1944. Pp. 333, in 8°.

SILVESTRI Filippo. — *Seconda nota su alcuni termitofili dell'Indocina con una appendice sul « Macrotermes Barneyi » Light.* Estr. da « Bollettino del laboratorio di Entomologia agraria di Portici », vol. VII, 1947.

ZACCHERINI Giampietro. — *Letture di economia matematica.* Vol. I. *L'economia stazionaria uniforme.* Roma, tip. dell'Università, 1946. Pp. XV-141, in 8°, con figg.

U. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 10 maggio 1947

Presidenza del Socio G. CASTELNUOVO

NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sulla traduzione in equazione integrale lineare di prima specie dei problemi al contorno concernenti i sistemi di equazioni lineari a derivate parziali*(*). Nota (**) del Socio M. PICONE.

Questa Nota è una continuazione della precedente, dallo stesso titolo, apparsa nel fascicolo di aprile di questi « Rendiconti », della quale prosegue la numerazione degli articoli, dei teoremi, delle formole e delle note a pie' di pagina.

3. PROBLEMI AL CONTORNO. – Siano $\beta_{sk}^{i}(P)$ $(s=1,2,\cdots,\nu\,;\ k=1,2,\cdots,p\,;\ i=0,1,\cdots,n_r)$ assegnate funzioni del punto P generalmente continue (8) sulla $\mathfrak{F}D$ e limitate, tali che, in ogni loro comune punto di continuità, posto

$$L_{sk}[u_k]=\sum_{i=0}^{n_r}\beta_{sk}^{i}(P)\,u_k^{(i)},$$

le ν forme lineari nelle $u_k^{(i)}$

$$L_s[U]=\sum_{k=1}^{p}L_{sk}[u_k]=\sum_{k=1}^{p}\sum_{i=0}^{n_r}\beta_{sk}^{i}(P)\,u_k^{(i)},$$

siano linearmente indipendenti e si possano ad esse aggiungere altre ν forme lineari nelle $v_h^{(i)}$, del pari linearmente indipendenti,

$$L_s^{*}[V]=\sum_{h=1}^{p}\sum_{i=0}^{n_r}\beta_{sh}^{*i}(P)\,v_h^{(i)}=\sum_{h=1}^{p}L_{sh}^{*}[v_h],$$

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto nazionale per le applicazioni del calcolo.

(**) Presentata nella seduta dell'8 marzo 1947.

(8) Cioè continue in ogni punto di $\mathfrak{F}D$, eccettuati, al più, quelli di un numero finito di varietà, ciascuna di dimensione non superiore a $r-2$.

con le $\overset{*}{\beta}{}^{ij}_{ch}(P)$, esse pure generalmente continue e limitate sulla $\mathfrak{F}D$, per modo che, comunque si assumano i due vettori U in $\{U\}$ e V in $\{U\}^*$, risulti

$$\int_{\mathfrak{F}D} \sum_{h,k}^{1,p} \sum_{ij}^{0,n_r} b^{ij}_{hk} u^{(i)}_k v^{(j)}_h \, d\sigma = \int_{\mathfrak{F}D} \sum_{s=1}^{\nu} L_s[U] L^*_s[V] \, d\sigma .$$

Le forme $L^*_1, \cdots, L^*_\nu$ si diranno *aggiunte*, ordinatamente, alle forme $L_1, \cdots, L_\nu$, *rispetto alla matrice* E *e al dominio* D e, per ogni $\mu < \nu$, le forme $L_{\mu+1}, L_{\mu+2}, \cdots, L_\nu$, *complementari* alle $L_1, L_2, \cdots, L_\mu$, sempre *rispetto alla matrice* E *e al dominio* D. Nelle attuali ipotesi la (6) si scrive

$$(13) \qquad \int_D U \times E^*[V] \, dT = \int_D F \times V dT + \int_{\mathfrak{F}D} \sum_{s=1}^{\nu} L_s[U] L^*_s[V] \, d\sigma ,$$

e pertanto, ove si verifichino anche le ipotesi del teorema I *a*), l'assegnare su $\mathfrak{F}D$ i valori $\varphi_s(P)$ delle forme $L_s[U]$ $(s = 1, 2, \cdots, \nu)$ determina la soluzione U di (5) e introdotta una matrice fondamentale $((g_{lk}(P, P')))$, si avrà, per P in $D - \mathfrak{F}D$,

$$(14) \quad u_l(P) = \int_D G_l(P, P') \times F(P') \, dT(P') + \int_{\mathfrak{F}D} \sum_{s=1}^{\nu} L^*_s[G_l(P, P')] \varphi_s(P') \, d\sigma(P'),$$

avendo designato con $G_l(P, P')$ il vettore che ha per componenti $g_{lk}(P, P')$ $(k = 1, \cdots, p)$.

Dalla (13) segue il teorema:

II. *Se esistono vettori* V *di* $\{U\}^*$ *che, in* $D - \mathfrak{F}D$, *verificano il sistema omogeneo, aggiunto al sistema* (5)

$$(5^*_0) \qquad E^*[V] = 0 ,$$

non si potrà, ad una soluzione di (5), *prescrivere arbitrariamente il vettore* F *e i valori delle forme* $L_s[U]$ $(s = 1, 2, \cdots, \nu)$ *su* $\mathfrak{F}D$; *per ogni tale vettore devono sussistere le eguaglianze*

$$(15) \qquad \int_D V \times F dT + \int_{\mathfrak{F}D} \sum_{s=1}^{\nu} L^*_s[V] L_s[U] \, d\sigma = 0 .$$

Dopo ciò si pongono vari problemi, dei quali, ispirandoci a quelli della fisica–matematica, considereremo solo i seguenti:

a) *Problema di Cauchy*. Individuare una porzione $\mathfrak{F}_1 D$ di $\mathfrak{F}D$, sulla quale si possono arbitrariamente prescrivere, ad una soluzione U di (5), i valori della ν forme $L_s[U]$, in seguito a che essa riesce determinata.

b) *Problema uniforme*. Fissare un numero naturale $\mu (< \nu)$, per il quale si possono, ad una soluzione U di (5), arbitrariamente prescrivere, su *tutta* la $\mathfrak{F}D$, i valori delle $\mu (< \nu)$ forme $L_1[U], \cdots, L_\mu[U]$, in seguito a che essa riesce determinata.

c) *Problema misto*. Fissare un numero naturale $\mu (< \nu)$ e individuare una porzione $\mathfrak{F}_1 D$ di $\mathfrak{F}D$, in modo che, ad una soluzione U di (5), si possano

su $\mathfrak{F}_1 D$ arbitrariamente prescrivere i valori delle forme $L_1[U], \cdots, L_\mu[U]$ e su $\mathfrak{F}_2 D = \mathfrak{F} D - \mathfrak{F}_1 D$, quelli delle forme complementari $L_{\mu+1}[U], \cdots, L_\nu[U]$, in seguito a che essa riesce determinata.

d) *Problema di propagazione.* Fissare un numero naturale $\mu\,(<\nu)$ e individuare due porzioni $\mathfrak{F}_1 D$ e $\mathfrak{F}_2 D$ di $\mathfrak{F} D$, aventi, al più, in comune, punti dei loro bordi, in modo che, ad una soluzione U di (5), si possano su $\mathfrak{F}_1 D$ arbitrariamente prescrivere i valori di *tutte* le forme $L_1(U), \cdots, L_\nu(U)$, e su $\mathfrak{F}_2 D$ quelli delle $L_1(U), \cdots, L_\mu(U)$, in seguito a che essa riesce determinata.

Per trattare tali problemi si presentano varie vie e le indicherò limitatamente al problema *d*) di propagazione, essendo esse, per gli altri, a quelle del tutto analoghe[9].

Primo metodo. – Posto $\mathfrak{F}_3 D = \mathfrak{F} D - \mathfrak{F}_1 D - \mathfrak{F}_2 D$, per ogni soluzione V di (5_0^*) sussiste la (15), che, essendo

$$(16)\qquad \begin{cases} L_s[U] = \varphi_s, & \text{su } \mathfrak{F}_1 D, \qquad (s = 1, 2, \cdots, \nu), \\ L_s[U] = \psi_s, & \text{su } \mathfrak{F}_2 D, \qquad (s = 1, 2, \cdots, \mu), \end{cases}$$

fornisce

$$(17)\qquad \sum_{s=1}^{\nu-\mu} \int_{\mathfrak{F}_2 D} L^*_{\mu+s}[V]\, L_{\mu+s}[U]\, d\sigma + \sum_{s=1}^{\nu} \int_{\mathfrak{F}_3 D} L^*_s[V]\, L_s[U]\, d\sigma =$$

$$= -\int_D V \times F\, dT - \sum_{s=1}^{\nu} \int_{\mathfrak{F}_1 D} L^*_s[V]\, \varphi_s\, d\sigma - \sum_{s=1}^{\mu} \int_{\mathfrak{F}_2 D} L^*_s[V]\, \psi_s\, d\sigma,$$

e quindi, in un primo metodo, si ricercheranno le porzioni $\mathfrak{F}_1 D$ e $\mathfrak{F}_2 D$ di $\mathfrak{F} D$ ed un'infinità numerabile $\{V_\lambda\}$ di soluzioni di (5_0^*), della classe $\{U\}^*$, in maniera che il sistema $\{\Omega_\lambda\}$ di vettori Ω_λ a $2\nu - \mu$ componenti

$$\omega_{\lambda 1} = L^*_1[V_\lambda], \omega_{\lambda 2} = L^*_2[V_\lambda], \cdots, \omega_{\lambda\nu} = L^*_\nu[V_\lambda] \qquad \text{, su } \mathfrak{F}_3 D,$$

$$\omega_{\lambda,\nu+1} = L^*_{\mu+1}[V_\lambda], \omega_{\lambda,\nu+2} = L^*_{\mu+2}[V_\lambda], \cdots, \omega_{\lambda,2\nu-\mu} = L^*_\nu[V_\lambda], \text{ su } \mathfrak{F}_2 D,$$

sia hilbertianamente completo. Si avrà allora, ortonormalizzando il trovato sistema $\{\Omega_\lambda\}$, detto c_λ il valore assunto dal secondo membro della (17), per $V = V_\lambda$, supposto che riesca $\sum_{\lambda=1}^{\infty} |c_\lambda|^2 < \infty$, nella metrica hilbertiana,

$$L_s[U] = \sum_{\lambda=1}^{\infty} c_\lambda\, \overline{\omega}_{\lambda s} \qquad (\text{per } s = 1, 2, \cdots, \nu, \text{ su } \mathfrak{F}_3 D),$$

$$L_{\mu+s}[U] = \sum_{\lambda=1}^{\infty} c_\lambda\, \overline{\omega}_{\lambda,\nu+s} \qquad (\text{per } s = 1, 2, \cdots, \nu-\mu, \text{ su } \mathfrak{F}_2 D).$$

Note, così, le forme $L_s[U]$ $(s = 1, 2, \cdots, \nu)$ su tutta $\mathfrak{F} D$, supposte verificate le ipotesi del teorema I, risulta determinata la soluzione U di (5) verificante le (16) e, introdotta – ad esempio – una matrice fondamentale, si addiverrà al teorema d'esistenza sottoponendo a verifica la U con le componenti u_l, fornite dalla (14).

(9) Cfr. i miei *Appunti d'Analisi superiore*, loc. cit. (2).

Secondo metodo. – Un secondo metodo, che appare più pratico del precedente poichè non richiede il possesso di soluzioni della (5_0^*) le quali possono essere del tutto ignorate, è suggerita dalla (13) stessa, che fornisce, per una soluzione U di (5) verificante le (16),

$$(18)\quad \int_D E^*[V]\times U\,dT - \sum_{s=1}^{\nu-\mu}\int_{\mathfrak{F}_2 D} L^*_{\mu+s}[V]\,L_{\mu+s}[U]\,d\sigma - \sum_{s=1}^{\nu}\int_{\mathfrak{F}_3 D} L^*_s[V]\,L_s[U]\,d\sigma =$$

$$\int_D V\times F\,dT + \sum_{s=1}^{\nu}\int_{\mathfrak{F}_1 D} L^*_s[V]\,\varphi_s\,d\sigma + \sum_{s=1}^{\mu}\int_{\mathfrak{F}_2 D} L^*_s[V]\,\psi_s\,d\sigma .$$

Si ricerchi, con le $\mathfrak{F}_1 D$ e $\mathfrak{F}_2 D$, un sistema $\{V_\lambda\}$ di vettori di $\{U\}^*$ per i quali il vettore $W_\lambda = E^*[V_\lambda]$ riesca di norma sommabile in D e il sistema $\{W_\lambda\}$ ivi hilbertianamente completo ed inoltre

$$(19)\quad \begin{cases} L^*_{\mu+s}[V_\lambda] = 0\,, & \text{su } \mathfrak{F}_2 D\,, \quad (s = 1, 2, \cdots, \nu-\mu)\,, \\ L^*_s[V_\lambda] = 0\,, & \text{su } \mathfrak{F}_3 D\,, \quad (s = 1, 2, \cdots, \nu)\,. \end{cases}$$

Si trae allora dalla (18), ortonormalizzando il trovato sistema $\{W_\lambda\}$, detto c_λ il valore assunto dal secondo membro della (18) stessa per $V = V_\lambda$, posto che sia $\sum_{\lambda=1}^{\infty} |c_\lambda|^2 < \infty$,

$$(20)\quad U = \sum_{\lambda=1}^{\infty} c_\lambda \overline{W}_\lambda .$$

Terzo metodo. – Ma la (18) suggerisce un terzo procedimento risolutivo che appare più pratico di entrambi i precedenti. Si ricerchi, con le $\mathfrak{F}_1 D$ e $\mathfrak{F}_2 D$, un sistema $\{V_\lambda\}$ di vettori di $\{U\}^*$ per i quali il sistema $\{\Omega_\lambda\}$ di vettori Ω_λ, a $p + 2\nu - \mu$ componenti

$$\omega_{\lambda 1} = E^*_1[V_\lambda] \quad , \quad \omega_{\lambda 2} = E^*_2[V_\lambda], \cdots, \omega_{\lambda p} = E^*_p[V_\lambda], \quad \text{in D},$$

$$\omega_{\lambda, p+1} = -L^*_1[V_\lambda] \quad , \quad \omega_{\lambda, p+2} = -L^*_2[V_\lambda], \cdots, \omega_{\lambda, p+\nu} = -L^*_\nu[V_\lambda], \quad \text{su } \mathfrak{F}_3 D,$$

$$\omega_{\lambda, p+\nu+1} = -L^*_{\mu+1}[V_\lambda]\,, \ \omega_{\lambda, p+\nu+2} = -L^*_{\mu+2}[V_\lambda], \cdots, \omega_{\lambda, p+2\nu-\mu} = -L^*_\nu[V_\lambda], \ \text{su } \mathfrak{F}_2 D,$$

sia di norma sommabile e hilbertianamente completo. Si avrà allora dalla (18), ortonormalizzando il trovato sistema $\{\Omega_\lambda\}$, detto c_λ il valore assunto dal secondo membro della (18) stessa per $V = V_\lambda$, posto che risulti $\sum_{\lambda=1}^{\infty} |c_\lambda|^2 < \infty$, ancora la (20), avendo indicato con W_λ il vettore $E^*[V_\lambda]$. Da essa si trae

$$u_l(P) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \overline{w}_{\lambda l}(P)\Big[\int_D V_\lambda(P')\times F(P')\,dT(P') +$$

$$\sum_{s=1}^{\nu}\int_{\mathfrak{F}_1 D} L^*_s[V_\lambda]\,\varphi_s\,d\sigma(P') + \sum_{s=1}^{\mu}\int_{\mathfrak{F}_2 D} L^*_s[V_\lambda]\,\psi_s\,d\sigma(P')\Big],$$

donde, in ipotesi facili a formulare, fatta, con l'attuale significato dei simboli, la posizione (11), supposto P in $D - \mathfrak{F}D$,

$$(21)\quad u_l(P) = \int_D G_l(P,P') \times F(P')\, dT(P') + \sum_{s=1}^{\nu} \int_{\mathfrak{F}_1 D} L_s^* [G_l(P,P')]\, \varphi_s(P')\, d\sigma(P') + \sum_{s=1}^{\mu} \int_{\mathfrak{F}_2 D} L_s^* [G_l(P,P')]\, \psi_s(P')\, d\sigma(P').$$

Si addiviene così alla costruzione della matrice $((g_{lk}(P,P')))$ che può dirsi una *matrice di Green competente alla* E *e agli operatori* L_s *su* $\mathfrak{F}_1 D$ $(s = 1, 2, \cdots, \nu)$, L_s *su* $\mathfrak{F}_2 D$ $(s = 1, 2, \cdots, \mu)$. Si dimostra, in certe ipotesi, che non può esistere più di una matrice $((g_{lk}(P,P')))$ che, per ogni soluzione U del problema, dia luogo alla (21) per P in $D - \mathfrak{F}D$.

È grande merito dell'Amerio l'aver dimostrato che gl'indicati primo e terzo metodo sono effettivamente perseguibili in notevoli casi particolari, stabilendo, per esempio nel caso di una sola equazione del second'ordine del tipo ellittico nello scalare u, per un problema uniforme nel quale rientra quello di Dirichlet, che un sistema $\{v_\lambda\}$ invocato nel terzo metodo è dato semplicemente, da quello dei monomi $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_r^{\lambda_r}$ $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r = 0, 1, 2, \cdots)$.

4. CASO PARTICOLARE DELLE EQUAZIONI A COEFFICIENTI COSTANTI. – Supposti costanti i coefficienti $a^{hk}_{i_1 i_2 \cdots i_r}$ degli operatori E_{hk}, introdurremo i polinomi

$$a_{hk}(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r) = \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_r \\ i_1 + i_2 + \cdots + i_r \leq 1+n}} a^{hk}_{i_1 i_2 \cdots i_r} \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \cdots \xi_r^{i_r},$$

e denoteremo con $a'_{hk}(\xi_1, \cdots, \xi_r)$ il polinomio costituito dal complemento algebrico dell'elemento a_{hk} nel determinante $\| a_{hk} \|$, con $a(\xi_1, \cdots, \xi_r)$ il polinomio fornito da tale determinante, che sarà detto *polinomio caratteristico* per il sistema (5). Fissata, arbitrariamente, una r^{pla} di valori per i parametri $\xi_1, \cdots, \xi_r$, consideriamo il vettore V_l di componenti.

$$(22)\qquad v_{lh} = a'_{hl}\, e^{-\Sigma \xi_s x_s}, \qquad (l, h = 1, 2, \cdots, p),$$

la sommatoria essendo estesa ai valori dell'indice s da 1 a r. Si ha

$$E_k^*[V_l] = \sum_{h=1}^{p} E_{hk}^* [a'_{hl}\, e^{-\Sigma \xi_s x_s}] = \sum_{h=1}^{p} a_{hk}\, a'_{hl}\, e^{-\Sigma \xi_s x_s},$$

donde

$$(23)\qquad E_k^*[V_l] \begin{cases} = a(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r)\, e^{-\Sigma \xi_s x_s}, & \text{per } k = l, \\ = 0 & \text{per } k \neq l, \end{cases} \qquad (k, l = 1, 2, \cdots, p).$$

Ne segue

$$(24)\qquad \int_D U \times E^*[V_l]\, dT = \int_D \sum_{k=1}^{p} u_k E_k^*[V_l]\, dT = a \int_D u_l\, e^{-\Sigma \xi_s x_s}\, dT,$$

e pertanto, posto

$$\frac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_r} V_l}{\partial\xi_1^{\lambda_1}\partial\xi_2^{\lambda_2}\cdots\partial\xi_r^{\lambda_r}} = V_{l\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_r},$$

derivando parzialmente, l'identità (24), λ_i voltre rispetto a ξ_i $(i = 1, 2, \cdots, r)$,

$$\int_D U \times E^*[V_{l\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_r}]\,dT = \int_D u_l \cdot \left[a x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2}\cdots x_r^{\lambda_r} + \lambda_1 \frac{\partial a}{\partial \xi_1} x_1^{\lambda_1-1} x_2^{\lambda_2}\cdots x_r^{\lambda_r} + \cdots\right] e^{-\Sigma \xi_s x_s}\,dT.$$

Ciò prova che se in un punto $(\xi_1^0, \cdots, \xi_r^0)$ il determinante a risulta diverso da zero, il sistema di vettori

$$E^*[V_{l\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_r}] \qquad (l = 1, 2, \cdots, p\ ;\ \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r = 0, 1, 2, \cdots),$$

per $\xi_s = \xi_s^0$ $(s = 1, \cdots, r)$ è chiuso nella classe dei vettori U sommabili in D. Si ha dunque, poichè quei vettori riescono continui in tutto D, il teorema:

III. *Se il sistema* (5), *a coefficienti costanti, ha polinomio caratteristico non identicamente nullo, la conoscenza su* $\mathfrak{F}$D *di una soluzione del sistema e delle sue derivate parziali dei primi n ordini, la determinata in tutti* D *e ne consente l'effettivo calcolo numerico.*

Il dominio D sia contenuto nel dominio rettangolare R definito dalle limitazioni $x_i^0 - d_i \leqq x_i \leqq x_i^0 + d_i$ $(i = 1, \cdots, r)$ ed inoltre, per ogni r^{pla} di numeri interi negativi, positivi o nulli $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$, si abbia sempre

$$(25) \qquad a\left(\pi i \frac{\lambda_1}{d_1}, \pi i \frac{\lambda_2}{d_2}, \cdots, \pi i \frac{\lambda_r}{d_r}\right) \neq 0,$$

posto, nella (13), in luogo de V, il vettore $V_{l\lambda_1\cdots\lambda_r}$ di componente k^{ma}

$$v_{l\lambda_1\cdots\lambda_r k} = a'_{kl}\left(\pi i \frac{\lambda_1}{d_1}, \cdots, \pi i \frac{\lambda_r}{d_r}\right) e^{-\pi i \Sigma \frac{\lambda_s}{d_s} x_s},$$

essa fornisce, in base all'identità (24),

$$a\left(\pi i \frac{\lambda_1}{d_1}, \cdots, \pi i \frac{\lambda_r}{d_r}\right) \int_D u_l e^{-\pi i \Sigma \frac{\lambda_s}{d_s} x_s}\,dT =$$

$$\int_D F \times V_{l\lambda_1\cdots\lambda_r}\,dT + \int_{\mathfrak{F}D} \sum_{i=1}^{\nu} L_i[U]\, L_i[V_{l\lambda_1\cdots\lambda_r}]\,d\sigma$$

e quindi le coordinate di Fourier di u_l rispetto al sistema $\left(e^{-\pi i \Sigma \frac{\lambda_s}{d_s} x_s}\right)$ $(\lambda_1, \cdots, \lambda_r = \cdots, -1, 0, 1, \cdots)$, donde il suo calcolo numerico. Si perviene così alla matrice fondamentale $((g_{lk}(P, P')))$, per la quale, dette $x'_1, \cdots x'_r$ le coordinate di P', risulta

$$(26) \qquad g_{lk}(P, P') \sim \frac{1}{2^r d_1 \cdots d_r} \sum_{\lambda_1, \cdots, \lambda_r}^{-\infty, +\infty} \frac{a'_{kl}\left(\pi i \frac{\lambda_1}{d_1}, \cdots, \pi i \frac{\lambda_r}{d_r}\right)}{a\left(\pi i \frac{\lambda_1}{d_1}, \cdots, \pi i \frac{\lambda_r}{d_r}\right)} e^{\pi i \Sigma \frac{\lambda_s}{d_s}(x_s - x'_s)}.$$

Se esistono r^{ple} $(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_r)$, in numero finito, tali che per $\lambda_i = \mu_i$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ la (25) non sussiste, si ricercherà, per ognuna di tali r^{ple}, un vettore $V_{l\mu_1\cdots\mu_r}$ che verifichi il sistema

$$(27) \qquad E_k^*[V_{l\mu_1\cdots\mu_r}] \begin{cases} = 0 & , \quad \text{per} \quad l \neq k, \\ = e^{-\pi i \sum \frac{\mu_s}{d_s} x_s} & , \quad \text{per} \quad l = k, \end{cases}$$

dopo di che la (13), postovi $V_{l\mu_1\cdots\mu_r}$ in luogo di V, fornisce

$$\int_D u_l e^{-\pi i \sum \frac{\mu_s}{d_s} x_s} d\mathrm{T} = \int_D F \times V_{l\mu_1\cdots\mu_r} d\mathrm{T} + \int_{\mathfrak{F}D} \sum_{l=1}^{\nu} L_l[U] L_l^*[V_{l\mu_1\cdots\mu_r}] d\sigma,$$

onde segue, per la matrice fondamentale,

$$(28) \qquad 2^r d_1 \cdots d_r g_{lk}(P, P') \sim$$

$$\sum_{\mu_1, \cdots, \mu_r} v_{l\mu_1\cdots\mu_r k}(x_1', \cdots, x_r') e^{\pi i \sum \frac{\mu_s}{d_s} x_s} + \sum_{\lambda_1, \cdots, \lambda_r}^{-\infty, +\infty (\mu)} \frac{a_{kl}'\left(\pi i \frac{\lambda_1}{d_1}, \cdots, \pi i \frac{\lambda_r}{d_r}\right)}{a\left(\pi i \frac{\lambda_1}{d_1}, \cdots, \pi i \frac{\lambda_r}{d_r}\right)} e^{\pi i \sum \frac{\lambda_s}{d_s}(x_s - x_s')},$$

ove, col simbolo $\sum^{(\mu)}$, intendiamo significare che dalla sommatoria, devono essere esclusi i termini per cui $\lambda_i = \mu_i$ $(i = 1, \cdots, r)$ (10).

Se poniamo nella (13), in luogo di V, il vettore V_l di componenti date dalle (22), essa fornisce.

$$(29) \qquad a(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r) \int_D u_l e^{-\sum \xi_s x_s} d\mathrm{T} = \int_D F \times V_l \, d\mathrm{T} + \int_{\mathfrak{F}D} \sum_{l=1}^{\nu} L_l[U] L_l^*[V_l] \, d\sigma,$$

$$(l = 1, \cdots, p),$$

onde il teorema:

IV. *Condizione necessaria affinchè esista una soluzione* U *di* (5), *per la quale le* ν *forme* $L_l[U]$ *assumono su* $\mathfrak{F}D$ *i valori* $\varphi_l(P)$ *è che siano soddisfatte le relazioni che provengono dalle condizioni di divisibilità delle* p *trascendenti intere nelle variabili complesse* $\xi_1, \cdots, \xi_r$,

$$(30) \qquad \int_D \sum_{k=1}^{p} f_k(P) a_{kl}' e^{-\sum \xi_s x_s} d\mathrm{T}(P) + \int_{D\mathfrak{F}} \sum_{l=1}^{\nu} \varphi_l(P) \sum_{k=1}^{p} L_{lk}^*[a_{kl}' e^{-\sum \xi_s x_s}] \, d\sigma(P),$$

$$(l = 1, \cdots, p),$$

per il polinomio caratteristico $a(\xi_1, \cdots, \xi_r)$ *del sistema* (5).

(10) Per indagare la convergenza delle serie (26) e (28) si può fare utilmente ricorso ai criteri che trovansi nel § II della mia Memoria: *Alcuni teoremi di convergenza nella sommazione per rettangoli delle serie multiple e applicazione al problema di Dirichlet* [in *Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari*, Pavia (1936)] e nei miei *Appunti d'Analisi superiore*, loc. cit. (2) *a*), pp. 471–476 e I Vol. della 2ª edizione, a cura di MIRANDA e GHIZZETTI, pp. 543–548, Rondinella, Napoli (1946)].

A importanti relazioni, fra le menzionate in questo teorema, si può, per esempio, pervenire al modo seguente. L'equazione $a = 0$ sia verificata ponendo $\xi_s = \xi_s(\tau_1, \cdots, \tau_q)$, al variare dei parametri $\tau_1, \cdots, \tau_q$, in numero di $q\ (\leqq r-1)$, in un intorno I del punto $\tau_1 = \cdots = \tau_q = 0$, essendo le ξ_s funzioni olomorfe delle τ in I. La (30) riesce una funzione delle τ, olomorfa, essa pure, in I, che indicheremo con Φ, ed il suo identico annullarsi in I, conseguenza della (29), equivale all'annullarsi, nel punto $\tau_1 = \cdots = \tau_q = 0$, di tutte le sue derivate parziali rispetto alle τ. Posto

$$[\xi_s]_0 = c_s \quad , \quad \left[\frac{\partial^{\lambda_1+\cdots+\lambda_q} V_l}{\partial\tau_1^{\lambda_1}\cdots\partial\tau_q^{\lambda_q}}\right]_0 = V_{l\lambda_1\cdots\lambda_q}(P),$$

ove, col simbolo $[\cdots]_0$ intendiamo significare che nella funzione entro le parentesi quadre si è fatto $\tau_1 = \cdots = \tau_q = 0$, si ha

$$(31)\qquad v_{l\lambda_1\cdots\lambda_q k}(P) = \left[\frac{\partial^{\lambda_1+\cdots+\lambda_q}}{\partial\tau_1^{\lambda_1}\cdots\partial\tau_q^{\lambda_q}}\left(a'_{kl}\, e^{-\Sigma\xi_s x_s}\right)\right]_0 = \Pi_{kl\lambda_1\cdots\lambda_q}(P)\, e^{-\Sigma c_s x_s},$$

designando $\Pi_{kl\lambda_1\cdots\lambda_q}(P)$ un determinato polinomio nelle x, di grado non superiore a λ_s in $x_s\ (s = 1, \cdots, r)$. Ma si ha

$$\left[\frac{\partial^{\lambda_1+\cdots+\lambda_q}\Phi}{\partial\tau_1^{\lambda_1}\cdots\partial\tau_q^{\lambda_q}}\right]_0 = \int_D F \times V_{l\lambda_1\cdots\lambda_q}\, dT + \int_{\mathfrak{F}D}\sum_{l=1}^{\nu}\varphi_l(P)\, L_l^*[V_{l\lambda_1\cdots\lambda_q}]\, d\sigma,$$

e pertanto si perviene al risultato: *Il vettore* F *e i valori* φ_l, *che assumono su* $\mathfrak{F}$D *le forme* $L_l[U]$, *devono verificare le infinite eguaglianze*:

$$(32)\qquad \int_D F \times V_{l\lambda_1\cdots\lambda_q}\, dT + \int_{\mathfrak{F}D}\sum_{l=1}^{\nu}\varphi_l(P)\, L_l^*[V_{l\lambda_1\cdots\lambda_q}]\, d\tau = 0$$

$$(l = 1, \cdots, p\ ;\ \lambda_1, \cdots, \lambda_q = 0, 1, \cdots),$$

nelle quali il vettore $V_{l\lambda_1\cdots\lambda_q}$ *ha le componenti fornite dalle* (31).

Se poniamo, nelle (23), $\xi_s = \xi_s(\tau_1, \cdots \tau_q)$ si ottiene $E_k^*[V_l(\tau_1, \cdots, \tau_q)] \equiv 0$ $(k = 1, \cdots, p)$ in I e pertanto $E_k^*[V_{l\lambda_1\cdots\lambda_q}] = 0$ $(k = 1, \cdots, q)$ e vediamo, con ciò, che i vettori $V_{l\lambda_1\cdots\lambda_q}$ sono soluzioni del sistema (5_0^*), onde il verificarsi delle (32) è anche affermato dal teorema II. Per $\xi_s(0, \cdots, 0) = 0$, il vettore $V_{l\lambda_1\cdots\lambda_q}$ ha per componenti i polinomi $\Pi_{kl\lambda_1\cdots\lambda_q}$ nelle x, e si dirà una *soluzione polinomiale* del sistema (5_0^*). Si noti che, nel caso che le ξ_s siano lineari nelle τ, avendosi $\xi_s = c_s - \sum_{i=1}^{q} c_{si}\tau_i$, risulta, semplicemente,

$$v_{l\lambda_1\cdots\lambda_q k}(P)\, e^{\Sigma c_s x_s} = \Pi_{kl\lambda_1\cdots\lambda_q}(P) =$$

$$\sum_{i_1=0}^{\lambda_1}\cdots\sum_{i_q=0}^{\lambda_q}\binom{\lambda_1}{i_1}\cdots\binom{\lambda_q}{i_q}\left[\frac{\partial^{\lambda_1-i_1+\cdots+\lambda_q-i_q} a'_{kl}}{\partial\tau_1^{\lambda_1-i_1}\cdots\partial\tau_q^{\lambda_q-i_q}}\right]_0\left(\sum_{s=1}^{r} c_{s1}\, x_s\right)^{i_1}\cdots\left(\sum_{s=1}^{r} c_{sq}\, x_s\right)^{i_q}.$$

Le condizioni espresse dal teorema IV sono state, dall'Amerio [loc. cit.[3] *a*)], riconosciute sufficienti in un caso particolare notevole, ma è da presumere che ciò debba accadere ben più generalmente.

Geometria. — *Varietà prodotto topologico di spazi multipli.* Nota (*) del Socio E. BOMPIANI.

1. GENERALITÀ. – Alcune questioni sulle corrispondenze fra piani o spazî mi hanno condotto a considerare una nuova classe di varietà algebriche (anzi, razionali) che comprende in sè sia quella delle *varietà di Veronese*, sia quella delle *varietà di C. Segre*.

Di queste nuove varietà mi occupo nella presente Nota.

Ricordo che si dice *varietà di Veronese* quella descritta dal punto di coordinate omogenee

$$X^{i_1 \cdots i_\mu} = x^{i_1} \cdots x^{i_\mu} \text{ (1)}$$

essendo $x^{i_1}, \cdots, x^{i_\mu}$ coordinate omogenee di un punto di un S_m proiettivo. La varietà ha dimensione m, ordine μ^m ed appartiene ad uno spazio di dimensione $\binom{m+\mu}{m} - 1$.

Il primo caso interessante è quello della *superficie di Veronese* F_2^4 di S_5. I punti della $V_m^{\mu^m}$ rappresentano i punti di S_m ciascuno contato μ volte, cioè lo spazio μ–plo S_m.

Si dice invece *varietà di Segre* relativa agli spazî $S_{m_1}, \cdots, S_{m_k}$ la varietà che rappresenta le k–ple non ordinate di punti tolti uno da ciascuno degli spazî dati, cioè il loro prodotto topologico. Se $x^i_1, x^l_2, \cdots, x^p_k$ sono coordinate omogenee rispettivamente in $S_{m_1}, S_{m_2}, \cdots, S_{m_k}$ la varietà è descritta dal punto di coordinate

$$X^{il \cdots p} = x^i_1 \, x^l_2 \cdots x^p_k;$$

essa ha dimensione $m_1 + m_2 + \cdots + m_k$, ordine $\dfrac{(m_1 + m_2 + \cdots + m_k)!}{m_1!\, m_2! \cdots m_k!}$ ed appartiene ad uno spazio di dimensione $(m_1 + 1) \cdots (m_k + 1) - 1$.

2. DEFINIZIONE DELLE NUOVE VARIETÀ. – Consideriamo ancora gli spazî $S_{m_1}, \cdots, S_{m_k}$ e prendiamo un punto in S_{m_1} contandolo μ_1 volte, un punto in S_{m_2} contandolo μ_2 e così via fino ad un punto in S_{m_k} contato μ_k volte.

Le k–ple di punti così ottenuti descrivono una varietà *prodotto topologico degli spazî assegnati con le molteplicità assegnate* per ciascuno di essi, della quale ci vogliamo occupare. Questa varietà potrà indicarsi opportunamente col simbolo $V\left[m_1^{\mu_1}, \cdots, m_k^{\mu_k}\right]$ l'ordine degli argomenti in [ ] essendo inessenziale.

(*) Presentata nella seduta del 12 aprile 1947.

(1) Gli apici *non* indicano elevazione a potenza, ma hanno soltanto valore ordinale; essi possono assumere $m + 1$ valori distinti oppure non distinti. Il loro ordine è inessenziale, quindi $i_1 \cdots i_\mu$ indica una combinazione degli apici.

È chiaro che una *varietà di Veronese* è una $V[m^{\mu}]$, mentre una *varietà di Segre* è una $V\left[m_1^1, \cdots, m_k^1\right] \equiv V[m_1, \cdots, m_k]$.

Le coordinate di un punto della varietà sono del tipo

$$X^{i_1 \cdots i_{\mu_1} \cdot j_1 \cdots j_{\mu_2} \cdot \cdots \cdot l_1 \cdots l_{\mu_k}} = \underset{1}{x^{i_1}} \cdots \underset{1}{x^{i_{\mu_1}}} \underset{2}{x^{j_1}} \cdots \underset{2}{x^{j_{\mu_2}}} \cdots \underset{k}{x^{l_1}} \cdots \underset{k}{x^{l_{\mu_k}}}.$$

3. Ordine e dimensione dell'ambiente di una $V\left[m_1^{\mu_1}, \cdots, m_k^{\mu_k}\right]$. – Indichiamo con $\left[m_1^{\mu_1}, \cdots, m_k^{\mu_k}\right]$ l'ordine per ora incognito della varietà; e seghiamo questa con l'iperpiano che si ottiene ponendo uguale a zero una delle $X^{\cdots}$. Ciò può ottenersi annullando una qualsiasi delle μ_1 coordinate $\underset{1}{x}$, e così via.

Se si annulla una delle $\underset{1}{x}$, la varietà rappresentata dalle $X^{\cdots}$ che *non* si annullano è una $V\left[(m_1 - 1)^{\mu_1}, m_2^{\mu_2}, \cdots, m_k^{\mu_k}\right]$; e perciò gli ordini delle varietà cercate sono legati dalla relazione ricorrente

$$\left[m_1^{\mu_1}, m_2^{\mu_2}, \cdots, m_k^{\mu_k}\right] =$$
$$= \mu_1 \left[(m_1 - 1)^{\mu_1}, m_2^{\mu_2}, \cdots, m_k^{\mu_k}\right] + \cdots + \mu_k \left[m_1^{\mu_1}, m_2^{\mu_2}, \cdots, m_k - 1)^{\mu_k}\right].$$

Risulta da essa, e si verifica poi subito, che *l'ordine della* $V\left[m_1^{\mu_1}, \cdots, m_k^{\mu_k}\right]$ *è*

$$\left[m_1^{\mu_1}, m_2^{\mu_2}, \cdots, m_k^{\mu_k}\right] = \frac{(m_1 + m_2 + \cdots + m_k)!}{m_1!\, m_2! \cdots m_k!}\, \mu_1^{m_1} \mu_2^{m_2} \cdots \mu_k^{m_k}.$$

La dimensione dell'ambiente è

$$\binom{m_1 + \mu_1}{m_1}\binom{m_2 + \mu_2}{m_2} \cdots \binom{m_k + \mu_k}{m_k} - 1$$

e quella della varietà è $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = m$.

4. Alcune proprietà delle varietà in esame. – È anzitutto evidente la razionalità delle varietà introdotte. Infatti le coordinate dei suoi punti sono funzioni razionali delle coordinate dei k punti presi in $S_{m_1}, \cdots, S_{m_k}$; e viceversa il rapporto di due coordinate X che differiscano per un solo fattore fornisce il rapporto di due coordinate (omogenee) di un punto di uno degli spazî, punto che viene perciò univocamente determinato.

Si fissino $k - 1$ punti della k–pla che fornisce un punto della varietà e si lasci variare il rimanente: il punto rappresentativo varia sopra una varietà di Veronese; precisamente se il punto variabile descrive S_{m_1} si ha una $V\left[m_1^{\mu_1}\right]$; e di queste ve ne sono $\infty^{m_2 + \cdots + m_k}$.

Si ha quindi:

Esistono su $V\left[m_1^{\mu_1}, \cdots, m_k^{\mu_k}\right]$ *k diversi sistemi di varietà di Veronese* $V\left[m_j^{\mu_j}\right]$ *per* $j = 1, \cdots, k$, *di dimensioni* $m - m_j$; *per un punto della varietà in esame passa una ed sola varietà di Veronese di ciascun sistema. Gli spazî a queste tangenti nel punto determinano lo spazio ivi tangente alla varietà data.*

Analogamente se si lascia variare un punto in S_{m_1}, e un punto in S_{m_2} e si fissano $k-2$ punti negli spazî rimanenti si ha una $V\left[m_1^{\mu_1}, m_2^{\mu_2}\right]$; e questa, al variare dei punti prima fissati, descrive un sistema $\infty^{m-m_1-m_2}$.

Questi sistemi sono $\binom{k}{2}$. E così, più in generale:

Su $V\left[m_1^{\mu_1},\cdots,m_k^{\mu_k}\right]$ *esistono* $\binom{k}{p}$ *diversi sistemi di varietà* $V\left[m_{j_1}^{\mu_{j_1}},\cdots,m_{j_p}^{\mu_{j_p}}\right]$ *ove* $j_1,\cdots,j_p$ *sono* p *valori distinti presi in* $1,\cdots,k$; *la dimensione di uno di questi sistemi è* $m-(m_{j_1}+\cdots+m_{j_p})$.

Per un punto della varietà prodotto topologico passa una varietà di ciascuno dei sistemi indicati.

Una varietà $V\left[m_{j_1}^{\mu_{j_1}},\cdots,m_{j_p}^{\mu_{j_p}}\right]$ si dirà *varietà subordinata di indici* $j_1,\cdots,j_p$; due tali varietà si diranno *complementari* se i loro indici presi insieme dànno una qualsiasi disposizione di $1,2,\cdots,k$. Si ha allora che:

Due varietà subordinate con gli stessi indici sono punteggiate proiettivamente dalle varietà ad esse complementari.

5. VARIETÀ DUALI. — Ci si può anche chiedere come si rappresentino (nel caso che almeno uno dei numeri $m_1,\cdots,m_k$ sia maggiore di uno) le k–ple di spazî $S_{m_1'},\cdots,S_{m_k'}$ presi ordinatamente in $S_{m_1},\cdots,S_{m_k}$ $(m_i'<m_i)$.

Una di queste k–ple è rappresentata, entro $V\left[m_1^{\mu_1},\cdots,m_k^{\mu_k}\right]$ da una $V\left[(m_1'^{\mu_1},\cdots,m_k'^{\mu_k}\right]$; e queste descrivono un sistema di dimensione

$$\Sigma_i\,(m_i'+1)\;(m_i-m_i').$$

Se in particolare $m_i'=m_i-1$ una di quelle k–ple è rappresentata da una $V\left[(m_1-1)^{\mu_1},\cdots,(m_k-1)^{\mu_k}\right]$ e di queste esistono ∞^m ciascuna appartenente ad uno spazio di dimensione

$$\binom{m_1+\mu_1-1}{m_1-1}\cdots\binom{m_k+\mu_k-1}{m_k-1}-1.$$

Si consideri ora una di queste $V\left[(m_1-1)^{\mu_1},\cdots,(m_k-1)^{\mu_k}\right]$ e lo spazio $(\mu_1+\cdots+\mu_k-1)$–osculatore o $S(\mu_1+\cdots+\mu_k-1)$ lungo la varietà precedente alla $V\left[m_1^{\mu_1},\cdots,m_k^{\mu_k}\right]$, cioè lo spazio contenente gli $S(\mu_1+\cdots+\mu_k-1)$ osculatori a $V\left[m_1^{\mu_1},\cdots,m_k^{\mu_k}\right]$ in tutt'i punti di $V\left[(m_1-1)^{\mu_1},\cdots,(m_k-1)^{\mu_k}\right]$; si trova che questo $S(\mu_1+\cdots+\mu_k-1)$ è un iperpiano; questi ∞^m iperpiani costituiscono una varietà duale della $V\left[m_1^{\mu_1},\cdots,m_k^{\mu_k}\right]$. Quindi:

Una k*–pla di* $S_{m_1-1},\cdots,S_{m_k-1}$ *entro gli spazî dati si rappresenta su* $V\left[m_1^{\mu_1},\cdots,m_k^{\mu_k}\right]$ *in una* $V\left[(m_1-1)^{\mu_1},\cdots,(m_k-1)^{\mu_k}\right]$; *lo spazio* $(\mu_1+\cdots+\mu_k-1)$*–osculatore lungo questa alla* $V\left[m_1^{\mu_1},\cdots,m_k^{\mu_k}\right]$ *è un iperpiano (nell'ambiente della ultima varietà) e la totalità di questi iperpiani è una varietà duale della* $V\left[m_1^{\mu_1},\cdots,m_k^{\mu_k}\right]$.

Relazioni di dualità analoghe si trovano considerando in ciascuno degli S_{m_i} dati un S_{m_i-r} e un S_{r-1} (il caso precedente corrisponde ad $r=1$).

6. Le varietà in esame come sezioni di varietà di Segre. – La varietà $V\left[m_1^{\mu_1}, \cdots, m_k^{\mu_k}\right]$ può anche considerarsi come sezione con un opportuno spazio di una varietà di Segre relativa a μ_1 spazî S_{m_1}, a μ_2 spazî $S_{m_2}, \cdots$, a μ_k spazî S_{m_k} cioè ad una $V[\underbrace{m_1 \cdots m_1}_{\mu_1}, \underbrace{m_2 \cdots m_2}_{\mu_2}, \cdots, \underbrace{m_k \cdots m_k}_{\mu_k}]$. Allo scopo si pongano $\mu_1 - 1$ proiettività fra gli spazî S_{m_1}, $\mu_2 - 1$ proiettività fra gli spazî S_{m_2} e così via. Se ora si considerano μ_1 punti fra loro corrispondenti nelle proiettività date fra gli spazî S_{m_1}, μ_2 punti corrispondentisi nelle proiettività date fra gli spazî S_{m_2}, e così via, il punto della varietà di Segre rappresentante questi $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k$ punti descrive una $V\left[m_1^{\mu_1}, \cdots, m_k^{\mu_k}\right]$.

7. Alcuni esempi. – Consideriamo alcuni esempi di varietà prodotti topologici di spazî multipli. In ciascuno di questi casi è facile trovare con considerazioni dirette i caratteri della varietà.

I. – *Retta semplice e retta doppia*: $V[1^1, 1^2]$. È la V_2^4 di S_5 rigata con ∞^1 rette e ∞^1 coniche che si punteggiano proiettivamente. Essa è sezione della $V[1, 1, 1]$ di Segre che è una V_3^3 di S_7. Dette r_1, r_2, r_3 le tre rette che servono a definirla, fissato un punto su r_1 e una proiettività fra $r_2 r_3$ questa è rappresentata su V_3^3 da una conica che, al variare del punto su r_1, descrive la V_2^4. Gli S_3 tangenti a V_3^3 nei punti di una conica stanno in uno S_6 e questi, al variare della conica cioè del punto su r_1, passano tutti per lo S_5 di V_2^4.

II. – *Due rette doppie*: $V[1^2, 1^2]$. È la V_2^8 di S_8 trovata dal Del Pezzo [2].

Si può aggiungere qui incidentalmente che *questa superficie è caratterizzata differenzialmente dal fatto di appartenere ad un* S_n *con* $n \geqq 8$ *e di possedere per ogni punto due elementi del 3° ordine*, E_3, *piani*. Essa può ottenersi come sezione della V_4^{24} di S_{17} di Segre relativa a quattro rette r_1, r_2, r_3, r_4: data una proiettività fra r_1, r_2 ed un'altra fra r_3, r_4 una coppia di punti corrispondenti su r_1, r_2 ed una coppia di punti corrispondenti su r_3, r_4 danno un punto di V_2^8; variando a piacere una delle due coppie e tenendo fissa l'altra si hanno le due coniche di V_2^8 per il punto.

III. – *Piano semplice e retta doppia*: $V[2^1, 1^2]$. È una V_3^6 di S_8 con ∞^2 coniche e ∞^1 piani che si punteggiano proiettivamente. La coppia costituita da una retta del piano e da un punto della retta si rappresenta in una retta di V_3^6; gli ∞^3 S_7 che sono osculatori a V_3^6 lungo le sue ∞^3 rette costituiscono la varietà duale della V_3^6 stessa.

IV. – *Retta semplice e piano doppio*: $V[1^1, 2^2]$. È una V_3^{12} di S_{11} che contiene ∞^2 rette (ciascuna corrispondente ad un punto del piano cui si associ un punto variabile sulla retta) e ∞^1 superficie di Veronese F_2^4 (punto della retta associato ad un punto variabile del piano) che si punteggiano proiettivamente. Le coppie punto–retta (punto sulla retta semplice, retta nel piano doppio) si rappresentano sulle ∞^3 coniche di V_3^{12}: gli spazî 2–oscula-

(2) P. Del Pezzo, *Sulle superficie dell'n–esimo ordine immerse nello spazio di n dimensioni*. « Rendic. Circ. Matem. di Palermo », t. I, 1887, 241–271, § IX.

tori a V_3^{12} nei punti di una conica sono S_{10} è la loro totalità (∞^3) è duale della V_3^{12}. Uno di questi S_{10} sega V_3^{12} in una V_2^4 rigata di S_5 (v. I) contata due volte e in una superficie F_2^4 di Veronese (che hanno in comune la conica lungo cui S_{10} è osculatore).

V. – *Piano semplice e piano doppio*: $V[2^1, 2^2]$. È una V_4^{24} di S_{17} contenente ∞^2 F_2^4 di Veronese e ∞^2 piani che si punteggiano proiettivamente. Una coppia punto (nel piano semplice)–retta (nel piano doppio) si rappresenta in una conica, per cui passano una F_2^4 di Veronese e una V_3^6 di S_8 (tipo III). Gli S_{15} che sono 2–osculatori a V_4^{24} nei punti di una delle sue ∞^4 coniche costituiscono la varietà duale di quella della ∞^4 rette della V_4^{24}. Invece le coppie retta (nel piano semplice)–punto (nel piano doppio) si rappresentano sulle ∞^4 rette di V_4^{24} (per ciascuna delle quali passa una V_3^{12} di S_{11} del tipo IV e un piano); e gli S_{14} che sono 2–osculatori lungo queste rette costituiscono la varietà duale di quella dei piani delle coniche.

Infine le coppie retta–retta si rappresentano in V_2^4 rigate di S_5 (del tipo I) per ciascuna delle quali passano una V_3^{12} di S_{11} (del tipo IV) e una V_3^6 di S_8 (del tipo III). Gli ∞^4 S_{16} che risultano 2–osculatori a V_4^{24} ciascuno nei punti di una V_2^4 costituiscono la varietà duale della stessa.

8. RAPPRESENTAZIONE DI ALCUNE CORRISPONDENZE FRA PIANI. – Gioviamoci della V_4^{24} di S_{17} per rappresentare su di essa alcune corrispondenze fra piani (π semplice, π' contato due volte).

I. – *Collineazioni*: Una collineazione non degenere fra π e π' si rappresenta (sulla V_4^{24}) in una superficie di Veronese F_2^9 di S_9. Se la collineazione è *semplicemente degenere* da π' a π (cioè, dette x, y, z coordinate omogenee in π e x', y', z' in π', se è il determinante jacobiano $\mathfrak{D}\begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{pmatrix} = 0$) la sua immagine è la F_2^8 di S_8 proiezione della F_2^9 di S_9 da un suo punto. Se invece la collineazione è semplicemente degenere da π a π', $\mathfrak{D}\begin{pmatrix} x' & y' & z' \\ x & y & z \end{pmatrix} = 0$, la sua immagine è la F_2^5 di S_6 proiezione della F_2^9 di S_9 da un suo piano tangente. Se poi la collineazione è *doppiamente degenere* da π a π' la sua immagine è una F_2^4 di Veronese.

II. – *Trasformazioni quadratiche*. Hanno per immagini le F_2^{13} di S_{11} proiezioni da tre suoi punti di una F_2^{16} di S_{14} rappresentante le C^4 piane.

II. – *Corrispondenze* [1, 2] definite da una rete di coniche con due punti base in π. La superficie rappresentativa è una F_2^{14} di S_{12} proiezione della F_2^{16} di S_{14} da due suoi punti.

Astronomia (Astrofisica). — *Altezza della cromosfera negli anni 1944–45–46 ed andamento del ciclo solare*(*). Nota(**) del Socio G. Abetti.

I risultati medi delle osservazioni della cromosfera solare eseguite con l'equatoriale di Amici ad Arcetri negli anni 1944–45–46, come usualmente di 30° in 30° di latitudine, sono raccolti nella seguente tabella. Dettagli delle osservazioni sono dati nelle « Osservazioni e Memorie dell'Osservatorio di Arcetri ».

Arcetri

Latitudine	Altezza			Latitudine	Altezza		
	1944	1945	1946		1944	1945	1946
+ 90° N	10″.0	11″.4	10″.8	— 90° S	9″.7	11″.1	10″.5
+ 60 E	9 .5	10 .4	10 .1	— 60 W	9 .1	10 .7	9 .9
+ 30 E	8 .8	9 .9	10 .1	— 30 W	8 .8	10 .4	10 .2
0 E	8 .9	9 .8	10 .1	0 W	8 .8	9 .8	9 .9
— 30 E	9 .2	10 .6	10 .6	+ 30 W	8 .7	10 .4	10 .3
— 60 E	9 .3	10 .3	10 .0	+ 60 W	9 .4	10 .9	10 .1

Da cui risultano le altezze medie annuali:

Altezze medie: 1944, 9″.18; 1945, 10″.47; 1946, 10″.21.

Benchè questi valori non siano ancora ridotti all'osservatore medio (1), come è necessario per un confronto fra i diversi anni, tuttavia è molto probabile che il minimo dell'altezza media si sia presentato contemporaneamente al minimo dell'attività solare, cioè nel 1944, come è indicato da queste medie, mentre negli anni seguenti si è avuto il ritorno all'altezza normale uniformemente distribuita attorno al globo solare.

L'area totale delle protuberanze, dedotta dalle osservazioni di Arcetri, è risultata minima nel 1943. Da questo anno al 1944 è cresciuta di + 40 unità di protuberanza; dal 1944 al 1945, di + 285; dal 1945 al 1946, di + 461. Mentre ora ci si avvicina rapidamente al massimo di attività, il minimo delle protuberanze sarebbe caduto durante il 1943, mentre quello delle macchie è avvenuto nel 1944.2 (2). La migrazione delle protuberanze ad alta latitudine è in corso, essendo arrivato il massimo, nel 1946, rispettivamente a + 57° per l'emisfero boreale, e a – 55° per l'emisfero australe. Caratteristica di questo ciclo è quella di presentare un massimo molto accentuato e relativamente precoce (3), che si è dimostrato con alti « numeri relativi » delle macchie

(*) Lavoro eseguito all'Osservatorio Astrofisico di Arcetri, Firenze.

(**) Presentata nella seduta del 12 aprile 1947.

(1) Cfr. « Osservazioni e Memorie Arcetri » fasc. 63, p. 50 (1946).

(2) « Astr. Mitt. Zürich », nr. 144, p. 116 (1945).

(3) Cfr. M. G. Fracastoro, « Ricerca Scientifica », ottobre 1946 p. 1473.

i quali, nella media dell'annata 1946 sono saliti a circa 92, al confronto del minimo relativo dato da Zurigo [4] per il 1945, di 33.

Inoltre durante il corso del 1946 si sono presentati due grandi gruppi di macchie, che hanno sorpassato in dimensioni tutti quelli precedentemente osservati e di cui si sieno fatte misure sufficientemente precise. Il primo gruppo, a latitudine 27° N, passò al meridiano centrale fra le date 5–6 febbraio e la sua area massima raggiunse, secondo la media di vari osservatori, circa 5000 milionesimi dell'emisfero solare. Il gruppo fu classificato bipolare, con alcune anomalie nella macchia seguente. Notevoli eruzioni cromosferiche accompagnarono il gruppo nei giorni 6, 7 e 9 febbraio. Forti perturbamenti della ionosfera, ed una grandissima tempesta magnetica ebbe inizio fra il 7 e 8 febbraio, quando il gruppo era passato da due giorni per il meridiano centrale.

Il secondo grande gruppo, alla latitudine di 23° N, passò il meridiano centrale fra il 26 e il 27 luglio. Benchè di dimensioni inferiori a quello precedente, avendo raggiunto al massimo sviluppo, l'area di 4000 milionesimi, tuttavia anche questo sorpassa tutti i precedenti di cui si ha precisa notizia; anche questo fu un gruppo bipolare complesso. Una intensa eruzione cromosferica fu osservata il 25 luglio; una grande tempesta magnetica ebbe luogo fra il 26 e 27 luglio. In Inghilterra e negli Stati Uniti è stata osservata una intensa aurora boreale nella notte fra il 26 e 27 luglio.

Si calcola che almeno 30 gruppi sono stati visibili ad occhio nudo nel corso del 1946.

Anche per il fenomeno delle protuberanze eruttive l'anno 1946 segna un primato, con la protuberanza che apparve al lembo orientale del sole il 23 maggio, a 55° di latitudine S. Secondo le osservazioni eseguite a Monte Wilson [5] ed alla stazione dell'osservatorio di Harvard a Climax (Colorado) [6] il 2 giugno, la protuberanza, in forma di grande arco dotato di moto vorticoso, si estendeva per ben 90° di longitudine, alla latitudine 48° S. Il 4 giugno era protesa fuori del lembo, fino all'altezza di 1.700.000 chilometri. La più alta protuberanza che si era finora fotografata nel precedente massimo dell'attività solare (20 marzo 1938), arrivò all'altezza di 1.550.000 chilometri; la velocità della eruzione raggiunse 312 km/sec.

Numerosissime eruzioni cromosferiche sono state fotografate nell'idrogeno (Hα) e nel calcio (K_{23}) nel secondo semestre del 1946. In una scala empirica, da 1 (deboli) a 3 (molto intense), ne sono state registrate 20 di intensità 3. Infine si può aggiungere che nel primo trimestre del 1947 si sono osservati numeri relativi delle macchie molto alti, e il 10 marzo è passato al meridiano centrale un altro notevole gruppo di macchie a 22° di latitudine S, di estensione paragonabile ai due sopracitati e quindi anch'esso di dimensioni maggiori di quelle registrate anteriormente al 1946.

(4) « Astr. Mitt. Zürich », nr. 148, p. 6 (1946).

(5) E. PETTIT, *An eruptive prominence of record height*, June 1946, « Publ. Astr. Soc. Pacific », vol. 58, p. 310.

(6) « Sky and Telescope », vol. V, n. 10, p. 11, August 1946.

Chimica. — *Adsorbimento attivato del deuterio sull'ossido di zinco.* Nota (*) di G. Natta e N. Agliardi, presentata (**) dal Corrisp. G. Natta.

In lavori precedenti (1) avevamo esaminato l'adsorbimento attivato dell'idrogeno su ossido di zinco in assenza ed in presenza di piccole quantità di promotori.

Nello studio cinetico dell'adsorbimento attivato si era trovato che il processo complessivo risulta la somma di due processi distinti, di cui il primo, più rapido, corrisponde, a basse temperature, ad un processo reversibile di 1° ordine, mentre il secondo, più lento e di natura non ancora ben chiarita, prevale a temperatura più alta e si protrae per tempi lunghissimi superiori alle 300 ore.

Potrebbe apparire logico l'attribuire la prima fase, più rapida, all'adsorbimento sulla superficie esterna dei granuli, quella seconda, più lenta, alla diffusione dell'idrogeno nell'interno dei granuli stessi, qualora si ammetta che il secondo adsorbimento abbia luogo prevalentemente a temperatura alta.

Allo scopo di esaminare se tale ipotesi corrisponde alla realtà, abbiamo effettuato delle misure comparative di adsorbimento con idrogeno e con deuterio, nelle stesse condizioni di temperatura e pressione con lo stesso campione di ossido di zinco.

Altri autori hanno confrontato l'adsorbimento del deuterio con quello dell'idrogeno su metalli (2) e su carbone (3), ma nessuno su ossido di zinco.

Per ridurre l'effetto di altri fattori si è usato ossido di zinco esente di promotori preparato con lo stesso metodo indicato in una Nota precedente (1) e già usato per circa due mesi in esperienze precedenti con idrogeno.

Per ridurre ulteriormente l'effetto dell'invecchiamento ed ottenere curve il più possibile riproducibili, si è calcinato l'ossido di zinco ad una temperatura (520°) superiore a quelle usate (400–420°) nelle prove precedenti. L'alta temperatura di calcinazione ha ridotto notevolmente le proprietà adsorbenti dell'ossido di zinco, ma ciò non ha importanza dato lo scopo del presente lavoro, che è quello di raffrontare le curve di adsorbimento del H_2 con quelle del D_2.

Il deuterio è stato preparato da noi per elettrolisi di acqua pesante al titolo di 99,87 % di D_2O, gentilmente offertaci dalla Soc. Norsk Hydro.

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano e Centro studi di Chimica Industriale del C. N. R.

(**) Nella seduta dell'8 marzo 1947.

(1) G. Natta e N. Agliardi, *Influenza dei promotori sull'adsorbimento attivato dell'ossido di zinco.* (Questi « Atti », Nota precedente).

(2) A. Magnus e G. Sartori, « Z. Phys. Chem. », *A 175*, 329, (1936); S. Iizima, « Rev. Phys. Chem. Japan », *12*, 83, (1938).

(3) W. van Dingenen, A. van Itterbeck, « Physica », *6*, 49, (1939).

Il deuterio, così preparato, è stato purificato dalle tracce di ossigeno per passaggio su rame metallico a 350–400° essiccato su anidride fosforica e poteva essere inviato nell'apparecchio di adsorbimento senza pericoli di inquinamento.

Le esperienze sono state eseguite nell'ordine seguente A_1, A_2, B_1, B_2, le prime due con idrogeno e le ultime con deuterio e ciascuna di esse è stata preceduta da un trattamento di evacuazione identico come temperatura (max. 430°) e durata (12 ore) con una pompa a vapori di mercurio a tre stadi.

Operando con tali accorgimenti si sono ottenute curve più riproducibili che nelle prove precedenti, ma non ancora esattamente coincidenti.

TABELLA.

Prova di adsorbimento con	t°C	P mm Hg	ore	Ncm³ adsorbiti
Idrogeno	238	261	1	1,40
			4	1,95
			6	2,14
			8	2,27
			10	2,46
Deuterio	238	261	1	1,30
			4	2,41
			6	2,84
			8	3,22
			10	3,58

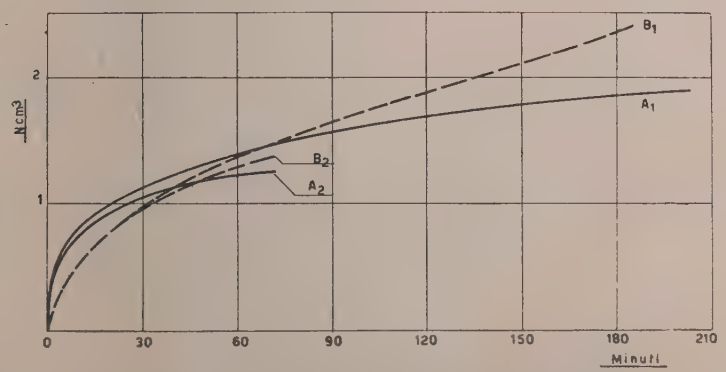


Fig. 1. – Adsorbimento attivato di H_2 e D_2 su ZnO

t = 238°C. P = 261 mm Hg

Curve a linea piena: idrogeno Curve a tratti: deuterio

Nella tabella sono indicati i risultati sperimentali delle esperienze A_1 e B_1, graficamente riportati in figura, ottenuti alla temperatura di 238° ed alla pressione costante di mm. 261.

Dal raffronto delle curve con idrogeno e con deuterio si nota che la prima fase di adsorbimento è molto più rapida con idrogeno, forse più di quanto sarebbe giustificato dalla maggiore velocità di diffusione del H_2 rispetto al D_2.

Appare invece sorprendente l'inclinazione della seconda parte delle curve per il deuterio, che è maggiore, per lunghi tempi di adsorbimento, di quella dell'idrogeno.

Bisogna ammettere, per spiegare questo andamento delle curve, che l'equilibrio finale di adsorbimento corrisponda a volumi adsorbiti molto più forti per il deuterio che per l'idrogeno. Dopo 10 ore vengono adsorbiti 2,46 Ncm^3 di idrogeno e 3,60 Ncm^3 di deuterio.

Questa constatazione è molto interessante perchè normalmente si considera l'adsorbimento attivato, a differenza di quello fisico, come dovuto ad una reazione chimica di superficie.

Mentre nei comuni equilibri chimici il comportamento degli isotopi è praticamente identico, appare invece dai nostri risultati che, nel caso delle reazioni di superficie, la massa abbia una influenza, analogamente a quanto avviene per l'adsorbimento fisico.

Elettrochimica. — *Sulla corrosione elettrochimica del ferro e della ghisa per effetto di correnti alternate.* Nota (*) del Corrisp. O. Scarpa.

1. L'elettrolisi con corrente alternata è stato oggetto di notevoli ricerche riguardanti in special modo le possibili applicazioni industriali, ma non risulta trattata la azione corrodente esercitata su elettrodi di ferro, di ghisa, di piombo, di zinco, immersi in soluzioni elettrolitiche del tipo dei liquidi circolanti nel suolo, problema che interessa gli eventuali guasti che correnti alternate disperse da impianti industriali possono causare alle membrature metalliche tubi per gas, per acquedotti, cavi elettrici, ecc.) interrati in terreni molto umidi. Ricordo che a dispersioni di correnti alternate vennero attribuite corrosioni notevoli osservate anni or sono nelle città di Vienna e di Parigi (1) e che oltre a correnti disperse per cattivo isolamento si debbono considerare quelle dovute a induzione elettromagnetica, le quali secondo i calcoli di Besig (2) possono assumere, nel caso di lunghe tubazioni interrate nelle vicinanze di conduttori percorsi da intense correnti alternate, intensità assai forti. E ciò anche quando i circuiti si chiudono attraverso al circostante terreno.

(*) Presentata nella seduta del 12 aprile 1947.

(1) S. Jellinek, *Elektrotechnik und Machinenbau*, 52 Heft 49 (1934).

(2) *Journal für Gasbel.*, 56 (1913), *Gas und Wasserfach*, 70 (1927).

Premetto che se si considera una corrente alternata sinusoidale attraversante un elettrolizzatore di cui un elettrodo è costituito con un metallo che reagendo con gli anioni dell'elettrolita dà origine a sali solubili, e l'altro è indifferente, il primo deve venir corroso durante i semiperiodi in cui funziona da anodo. Tale corrosione, ove non intervengano speciali fenomeni (passività ecc.) che complicano l'andamento dell'elettrolisi, dovendo esser proporzionale alla quantità di elettricità che attraversa l'elettrolizzatore nel semiperiodo dovrebbe esser proporzionale a:

$$I \int_0^{T/2} \operatorname{sen} 2\pi \frac{t}{T} dt = 0{,}45\, \mathfrak{I}\, T$$

ove $\mathfrak{I}$ indica il valore efficace della corrente. E quindi se nei semiperiodi negativi non venisse ridepositato sull'elettrodo nessuno dei cationi metallici entrati in soluzione (come sensibilmente avviene allorquando essi formano con molecole e ioni dell'elettrolita degli anioni complessi e la frequenza della corrente non è elevatissima) la quantità di metallo corroso in un tempo Θ comprendente m periodi, sarebbe un po' meno della metà di quella che sarebbe contemporaneamente corrosa da una corrente continua con intensità numericamente eguali a $\mathfrak{I}$.

Ma nelle condizioni usuali una parte più o meno grande dei cationi entrati in soluzione viene ridepositata sull'elettrodo nei semiperiodi negativi, salvo quella che per effetto della diffusione, di agitazione del liquido, ecc.; troppo si allontana dallo elettrodo e salvo quella che, formando eventuali composti poco solubili, non è più in grado di venir riportata dal campo sullo elettrodo.

Dovendo venir verificata la condizione di continuità è necessario che i cationi metallici che non possono ridepositarsi sieno sostituiti nella scarica catodica (nei semiperiodi negativi) da altri cationi già esistenti oppure di nuova formazione nell'elettrolita, e siccome gli straterelli insolubili eventualmente formati sulla superficie metallica alterano, talvolta enormemente, la velocità degli ioni nel cammino che debbono percorrere per attraversarli (mentre in taluni casi posseggono conduttività elettrica propria) anche per questi fatti l'andamento e l'entità delle corrosioni può venire radicalmente cambiato.

Ne segue che la teoria della corrosione elettrochimica per effetto di correnti alternate è molto più complessa di quanto generalmente si ritiene, e più ancora lo diventa allorquando la corrente non sia sinusoidale. Se infine essa è dissimmetrica, sorgono altre gravissime difficoltà per una soddisfacente trattazione analitica del problema.

2. In questa Nota riferirò brevemente su recenti esperienze da me eseguite (che si possono riguardare come guida per ulteriori ricerche) che riguardano elettrodi di ferro e di ghisa, riserbando ad altra Nota quelle su elettrodi di Piombo e di Zinco. Ho impiegato elettrolizzatori con ambo gli elettrodi dello stesso metallo (in modo da poterne osservare il medio compor-

tamento) e in una prima serie di misure, allo scopo di semplificare la ricerca, ho adoperato come elettrolita una soluzione di Cloruro di sodio al 3% ed elettrodi di ferro assai puro (privo per quanto possibile di scorie) aventi lo spessore di 1 mm. e la superficie cm. 7×8 completamente immersa. I due elettrodi vennero posti alla distanza di cm. 5 entro a vaschette di vetro assai profonde facendo percorrere l'elettrolizzatore per più mesi da una corrente alternata sensibilmente sinusoidale (frequenza 42) con l'intensità efficace 0,2 Ampère.

Inoltre, allo scopo di esaminare l'azione di elettroliti con costituzione fisica più prossima (da alcuni punti di vista) a quella del suolo, ho disposto in serie un altro voltametro avente eguali elettrodi ed eguali dimensioni, ripieno di sabbia quarzosa ben impregnata con la sopradetta soluzione, e, (per rendere ancor più difficili i moti convettivi del liquido e diminuire la velocità delle diffusioni) ne ho inserito un terzo ripieno con cellulosa imbevuta con il medesimo elettrolita.

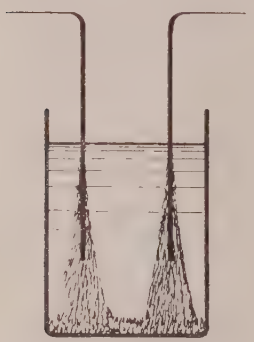


Fig. 1.

Poichè le sostanze colloidali, ad esempio la gelatina, esercitano notevolissime azioni sulla formazione di molti depositi galvanici, ho voluto saggiare l'azione di questo colloide sulle corrosioni per effetto della corrente alternata, epperciò ho utilizzato un quarto elettrolizzatore simile al primo, ma con notevole aggiunta di gelatina all'elettrolita.

Fin dal primo tempo dopo la chiusura del circuito ho osservato nel primo elettrolizzatore una abbondante formazione di idrossido di ferro che dalla superficie degli elettrodi cadeva sul fondo, come schematicamente mostra la fig. 1; il che prova la pronta azione corrodente della corrente che alternativamente fa formare su ogni elettrodo cloruro di ferro e idrossido di sodio, con frequenza sufficiente per la loro mutua reazione.

Nel seguito, gli elettrodi si ricoprirono di idrossido e la velocità delle corrosioni diminuì in modo che dopo 120 giorni consecutivi si riscontrò (dopo accurata pulitura) su ogni elettrodo la diminuzione media di peso di appena un grammo sui 39 originali. Ne segue che il rendimento della corrente alternata rispetto alla corrosione fu in questo elettrolizzatore molto inferiore all'uno per cento, mentre quello di una corrente continua di pari valore efficace sarebbe stato superiore al 90%. Ciò non toglie però che la corrosione dell'elettrodo sia visibile come mostra la fig. 2 che riproduce, in grandezza naturale, l'apparenza della superficie corrosa dopo un'accurata sabbiatura. Corrosioni più localizzate e più intense (fig. 3) si ebbero nell'elettrolizzatore contenente la sabbia quarzosa in diretto contatto con tutta la superficie degli elettrodi. In tal caso, la diminuzione di peso fu di 6 grammi.

Ancor più profonde (fig. 4) furono le corrosioni prodotte nel terzo elettrolizzatore, ove la diminuzione di peso per ogni elettrodo raggiunse in media 9 grammi.

Tutti questi risultati vennero confermati (nell'andamento generale) mediante successive esperienze.

Fig. 2.

Fig. 3.

Nell'elettrolizzatore contenente gelatina la diminuzione di peso di ogni elettrodo fu di gr. 5,5 ma la superficie dopo sabbiata, mostra (fig. 5) un tipo di corrosione che pur rivelandosi più sentita di quella nel 1° elettrolizzatore

(si osservano craterini più profondi) è più uniforme, fenomeno che ben si accorda con le note proprietà di questo colloide rispetto alla elettrodeposizione dei cationi metallici.

Fig. 4.

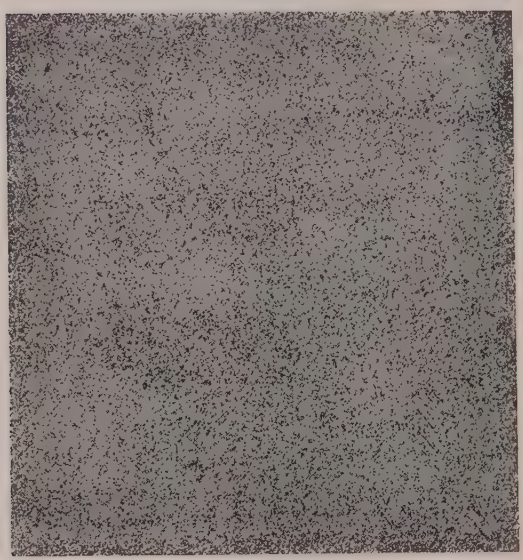


Fig. 5.

3. Particolare interesse presenta il caso di elettrodi costituiti con piastre di ghisa (composizione: C totale 3,04%, Mn 0,44, Si 2,85, P 0,36; S 0,11).

In tal caso vennero impiegati due soli tipi di elettrolizzatori, quelli contenenti la soluzione oppure la sabbia con essa impregnata. Come elettrolita si adoperò, per speciali ragioni, una soluzione con la composizione 5% NaCl, 1% NH_4Cl, 1% Na_2SO_4.

La parte immersa degli elettrodi fu cm. 6×8 e la distanza cm. 5. La intensità efficace della corrente alternata si mantenne costantemente (mediante opportuni reostati) a 0,2 Amp. La durata della prova fu 117 giorni e la temperatura si mantenne costante a 20° mediante refrigerazione.

Nell'elettrolizzatore con sabbia si osservò la formazione di durissimi agglomerati aderenti agli elettrodi mentre in quello con solo elettrolita si riosservò il fenomeno di cui la figura 1 dà un'immagine schematica.

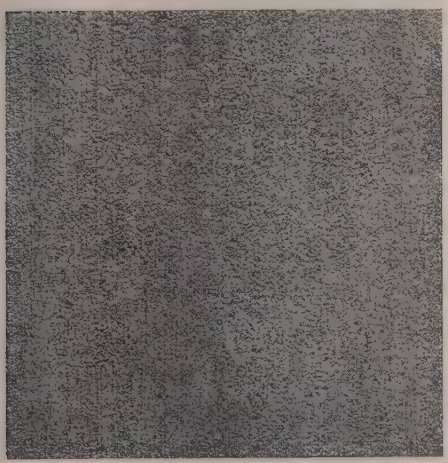


Fig. 6.

Fig. 7.

La determinazione della quantità di ferro corroso proveniente dall'intacco della ghisa immersa nella soluzione non potendo venir eseguita, con sufficiente precisione, per differenza fra i pesi degli elettrodi prima e dopo l'intacco (in causa del loro forte peso, essendo lo spessore di cm. 1) venne eseguita raccogliendo tutto l'idrossido precipitato, sommandolo con quello che con accurata spazzolatura fu possibile distaccare dagli elettrodi, sciogliendo il tutto in acido cloridrico, prendendo una parte aliquota e titolando.

Risultò in totale 6 grammi di ferro corroso, cioè un intacco di 3 grammi per elettrodo.

La corrosione della superficie apparve assai uniforme (fig. 6: parte dell'elettrodo in grandezza naturale dopo sabbiatura) e divenne microscopicamente evidentissima (fig. 7 ingrandimento 10 diametri).

Per la sopradetta ragione non fu possibile determinare la quantità di metallo corroso nel caso in cui elettrodi sono immersi nella sabbia, ma la figura 8 mostra in grandezza naturale parte dell'elettrodo (dopo sabbiatura) ove sono ben visibili forti corrosioni con distribuzione disuniforme.

A tal proposito è bene confrontare questa apparenza con quella della superficie della medesima porzione dello stesso elettrodo prima dellá sabbiatura (fig. 9) poichè da tal confronto risulta la necessità (più volte da me affermata, ma sovente trascurata) di esaminare le corrosioni delle membrature metalliche e in particolare di quelle di ferro e di ghisa non soltanto come direttamente appaiono, ma dopo accurata sabbiatura. L'ossido aderente maschera infatti, sovente, il vero stato della superficie metallica.

Avendo, per confronto, posto in serie con i due detti elettrolizzatori due simili ma con elettrodi di ferro, ho trovato che le corrosioni di questi ultimi pur essendo, come quantità di metallo corroso, del medesimo ordine di grandezza che per la ghisa, hanno apparenza meno disuniforme.

Fig. 8.

Fig. 9.

4. Le cause delle grandi disuniformità delle corrosioni prodotte dalle correnti unidirezionali, che sono caratteristiche in molte membrature metalliche interrate sottoposte all'azione delle correnti vaganti, viene generalmente attribuita a inomogeneità del metallo. Ma le esperienze sopra riportate e altre del medesimo tipo mostrano che molto sovente forti disuniformità si presentano anche nel caso di metalli con struttura omogenea, quando la loro superficie è in contatto con mezzi fisicamente e chimicamente eterogenei (quali sono ad esempio i terreni specialmente se umidi o le sabbie da me impiegate). E ciò anche nel caso di correnti alternate.

La produzione di tali forti disuniformità si deve quindi attribuire anche (e in generale specialmente) al fatto che le condizioni chimico–fisiche della superficie metallica (resistenza elettrica, stato di polarizzazione, reagibilità, ecc.) divengono localmente differenti in causa dei contatti della superficie metallica con il mezzo discontinuo, aggravando la disuniformità dei depositi che poco a poco rivestono la superficie dell'elettrodo. Ne segue che la superficie metallica viene attraversata da correnti distribuite in modo

disuniforme, causando, a parità di tempo, maggiori corrosioni laddove maggiore ne è la densità. Naturalmente sulla distribuzione disuniforme della corrente possono e anzi debbono aver influenza anche altri fattori fra cui, non indifferente, l'esistenza di eventuali inomogeneità chimiche e fisiche del metallo.

La causa della minor corrosione totale (cioè del minor rendimento della corrente alternata) nel primo elettrolizzatore con elettrodi di ferro (prima serie di misure) deve venir attribuita al rivestimento aderentissimo di ossido all'elettrodo metallico il quale, come sopradetto, può molto ritardare la diffusione degli ioni metallici verso l'elettrolita, in modo da facilitarne la rideposizione durante i semiperiodi negativi. La disuniformità di questi rivestimenti nel secondo e terzo elettrolizzatore e la non eguale compattezza nel quarto hanno evidentemente concesso il maggior rendimento della corrente.

Conclusioni. – Le presenti esperienze mostrano che la corrente alternata produce effettivamente visibili corrosioni agli elettrodi di ferro e di ghisa immersi nelle soluzioni contenenti sali alcalini, e che:

1° l'entità di queste corrosioni è assai minore di quanto si poteva ritenere in base all'esame del fenomeno durante tempi troppo brevi.

2° Che la grandezza delle corrosioni è localmente molto più forte e quella complessiva è talvolta maggiore quando gli elettrodi di ferro e di ghisa, invece di essere immersi in una soluzione omogenea, sono in contatto con mezzi eterogenei, in modo da far assumere alla corrente corrodente densità assai differenti da regione a regione.

3° Che la presenza di notevoli quantità di gelatina (e probabilmente di altri colloidi) tende a uniformizzare le sopradette corrosioni.

4° Al fine dello studio delle azioni deleterie sulle membrature interrate, si deve tener presente che corrosioni di non grave apparenza (quali sono ad esempio quelle causate in molti casi da correnti alternate) possono acquistare notevolissima importanza in quanto possono indirettamente provocare o facilitare più profonde corrosioni locali derivanti dalle note azioni chimiche ed elettrochimiche caratteristiche dei terreni umidi, specialmente se aereati e fortemente inquinati, fenomeno che probabilmente si è verificato nelle sopracitate gravi corrosioni, con forature dei tubi di ghisa, avvenute nella città di Vienna.

Geologia. — *L'Età delle formazioni con Pietre Verdi.* Nota (*) del Socio F. Sacco.

Da circa mezzo secolo, cioè dal 1889 al 1938, ho combattuto (colle armi leali della Paleontologia, della Litologia, della Stratigrafia, della Tettonica e col rilevamento geologico metodico dell'Appennino) mediante la pubblicazione di una ventina di Note e di una diecina di Carte e molte sezioni geologiche al 100.000, per dimostrare ai Colleghi italiani che gli Argilloscisti ofiolitiferi, colla facies prevalentemente di «Argille scagliose» sul lato padano e di «Galestri» su quello tirreno dell'Appennino, non appartengono all'Eocene, come si riteneva quasi come dogma, ma al Cretaceo (str. s.), chiudendo la questione con una Nota, quasi testamentaria, sopra *I Problemi delle formazioni ofiolitifere delle Alpi e dell'Appennino* («Boll. Uff. geol. d'Italia», vol. LIX, 1934).

Ma ecco che intanto vennero in Italia diversi geologi stranieri, specialmente tedeschi (come Stille, Teichmuller, Köber, Steinmann, Ludwig, Wijkerslooth, Bermann, ecc.), i quali, avendo osservato che nei calcari alberesi inglobati fra gli Argilloscisti ofiolitiferi dell'Appennino sonvi resti di Calpionelle, da essi ritenute fossili giurassico–infracretacei, riferirono a tale età anche detti argilloscisti appenninici, senza tener conto che questi racchiudono invece Bennettiti, Uintacrini, Inocerami, Ammoniti (*Acanthoceras*, *Pachidiscus*, *Schloembachia*, *Hamites*, *Desmoceras*, *Turrilites*, ecc.), denti di Pticodi, di Ictiosauri ecc., tipici del Cretaceo (str. s.), mentre le Calpionelle, come i Radiolari, sono esseri semplici caratteristici per la batimetria ma poco per l'età.

E così vedemmo comparire Carte geologiche dell'Apennino settentrionale, per esempio quella del Teichmuller, *Die grenze von Alpen u. Apennin* (1935) in cui la tipica formazione degli Argilloscisti ofiolitiferi dell'Appennino è colorata come giurassica e quindi la sovrastante potente serie dei Calcari a fucoidi (*Liguriano*) come cretacea!

E per ancora maggior confusione alcuni geologi, come per esempio Termier e Boussac (1911), De Stefani (1913) ed altri, confondevano come formazione compreensiva (per passaggio laterale o altrimenti), la formazione cristallina con Pietre Verdi del Gruppo di Voltri con quella argilloscistosa ofiolitifera dell'Appennino genovese.

Ma vi ha di più. Mentre che, attraverso varii decenni di faticoso rilevamento, concretato in diverse Carte e sezioni geologiche (spesso ricopiate dal vero), avevo delineato l'Appennino come una regione a regolare, per quanto complessa, tettonica a pieghe, spesso ripetute, isoclinali, coricate (anche con lembi staccati, per erosione, di terreni antichi su giovani), invece detti geologi stranieri, dopo alcune escursioni nell'Appennino, volendo applicarvi le loro teorie ultranappistiche lo interpretarono come una regione di careg-

(*) Presentata nella seduta del 12 aprile 1947.

giamenti (*nappe*) giganteschi, anche di oltre 100 chilometri di sviluppo immaginando una serie di Peloritanidi, Calabridi, Italidi, Centralidi, Appenninidi, Corsidi, Carraridi, Pisanidi, Toscanidi scavalcate dalle Liguridi, ecc. Ciò che in gran parte è solo un prodotto di Geofantasia. È vero che detti autori non sono d'accordo sulla provenienza di queste straordinarie nappe, alcuni (come Staub) facendole giungere dall'oriente verso occidente altri (come Steinmann, Termier, Wijkerslooth, ecc.) invece da ovest verso est; ma intanto tali idee, accolte pure da alcuni geologi italiani, insieme alla sovraccennata diversa interpretazione cronologica dei terreni, a cui si aggiungeva anche l'idea, adottata da molti, che la *facies* arenacea (*Macigno*) dell'Eocene medio–superiore stesse sotto (e non sopra come sta realmente) agli Argilloscisti ofiolitiferi, produssero una deplorevole confusione negli studi geologici dell'Appennino [1].

Un'altra questione, un po' analoga a quella sovraccennata per l'Appennino, quantunque un po' diversa e pure originata dalla povertà dei fossili, è quella della formazione delle cosidette *Pietre Verdi* delle Alpi.

Riguardo a questo problema, ed a quello analogo appenninico, è da notare che le Pietre Verdi, come le analoghe Ofioliti, sono di origine endogena ma non di tipo eruttivo, bensì intrusivo abissolitico (come *Laccoliti*, *Bismaliti Sfenoliti*, *Facoliti*, *Sills* ecc.) dei magmi basici, originalmente fluidissimi quindi variamente intercalati nei terreni sedimentari (mentre le *Batoliti* dei magmi acidi possono attraversarli in vario modo e senso) e quasi senza metamorfismo di contatto, salvo mineralizzazioni piritiche, calcopiritiche, magnetitiche ecc.

Quindi l'età di queste *Pietre Verdi* (*Grünstein*, *Greestone*, cioè Anfiboliti, Prasiniti, Diabasi, Peridotiti, ecc.) anche più volte intercalate ai terreni sedimentari, è quella di questi ultimi, i quali sono pure di origine abissale o batiale, ciò che ne spiega la povertà in fossili.

Per quanto già anticamente si fossero raccolti rarissimi fossili mesozoici in tali scisti cristallini con Pietre Verdi nelle Alpi, così Belemniti da Charpentier (1814), Belemniti, Grifee e Pentacrini da Studer ed Escher (1839), mentre De Beaumont e Sismonda per ragioni tettoniche (però erronee) interpretavano detti scisti come *Giurassico metamorfosato* (1834–62), tuttavia rimase sempre una certa diffidenza sul valore di detti fossili ed una grave incertezza sull'età di tali formazioni di aspetto tanto antico. Ch. Lory, che li denominò *Schistes lustrés* (1861), pei suoi studi geologici li attribuì al Trias, interpretazione a cui si associò il Favre (1862) e lo Stoppani, mentre che Theobald li avvicinò piuttosto al Lias.

Ma il Gastaldi, sotto l'influenza dell'americano Sterry Hunt, li riportò addirittura all'Arcaico (1871), pur separandoli (come *Zona delle Pietre Verdi*) dalla potente formazione gneissica sottostante; interpretazione che fece scuola con Zaccagna (1882 →) seguìto da Bertrand, Potier, Bonney (1889), Termier, Kilian, Diener (1891–92) ecc.

(1) F. Sacco, *L'età del Macigno* (« Rendic. Acc. Lincei », maggio 1947).

Intanto le formazioni (a Pietre Verdi) del «Gruppo di Voltri», analoghe a quelle alpine in questione, si facevano oscillare dai geologi (Pareto, Sismonda, ecc.) dall'Arcaico all'Eocene, tanto più che venivano collegate coi terreni ofiolitiferi del contiguo Appennino, finchè nel 1883 Issel e Mazzuoli riuscirono a separarle; ma purtroppo esse furono di nuovo collegate da Termier e Boussac (1911) e da De Stefani (1913), con diverse interpretazioni.

Ma verso la fine dello scorso secolo il Parona scopriva (1891) negli scisti silicei di Cesana, in connessione a Diabasi e Serpentine dei Calcescisti, numerosi Radiolari di tipo giurassico; contemporaneamente Heim segnalava Pentacrini, Grifee, Belemniti, Ammoniti in analoghi scisti cristallini della Svizzera, riconfermando i ritrovati di mezzo secolo prima. Finalmente il Franchi coi suoi accurati rilevamenti geologici nelle Alpi occidentali (specialmente marittime) riusciva ad affermare l'età mesozoica della zona delle Pietre Verdi (1898). Con ciò veniva definitivamente riconosciuto che nelle Alpi, oltre alla facies normale (detta anche *brianzonese*) essenzialmente calcareo–dolomitica (specialmente del Trias), è sviluppatissima una speciale facies metamorfica detta degli *Schistes lustrés* da Lory (1861), *Zona delle Pietre Verdi* (Gastaldi, 1871), *lepontina* o *retica* (Steinmann, 1897), *piemontese* da Haug (1909), *pennina* da Argand (1909), o semplicemente *cristallina* da Franchi (1898). Sono i *Bundnerschiefer* di Erscher e Studer, il *Kalksthonschiefer*, i *Glimmerkalk*, i *Kalkphyllite* e tanti altri *Schiefer*, *Phillite*, ecc. delle Alpi. Questa formazione, potentissima (forse sino a 2000 m.), fortemente corrugata, pieghettata in grande e piccola scala, detta, dai geologi italiani, dei *Calceschisti* o dei *Calcemicascisti*, è il prodotto di un intenso e ripetuto fenomeno di metamorfismo dinamico–idrotermale; essa racchiude (generalmente intercalate tra gli strati) svariate formazioni abissolitiche di origine endogena, laccolitica (l. s.) come: Anfiboliti talora granatifere, spesso glaucofaniche, Orneblenditi, Prasiniti svariate passanti a Epidotiti, Ovarditi, ecc.; Diabas, pure svariate, pirosseniche, epidotiche, cloritiche, oliviniche, ecc.; Peridotiti (Lherzoliti), Serpentine, ed inoltre Gabbro o Eufotide e tufi metamorfici. Cioè le *Pietre Verdi* del Gastaldi, i *Grünstein* dei tedeschi, ecc.

Però giustamente, come sovraccennato, il Gastaldi separò questa sua Zona delle Pietre Verdi dalla potentissima, sottostante, formazione, ancor più intensamente metamorfosata e cristallizzata degli Gneiss e Micascistii già riferibili al Paleozoico e che anche essa racchiude, ma in minor quantità e grandezza, varie Pietre Verdi, specialmente Anfiboliti, talora granatifere e glaucofanitiche, Prasiniti laminate, ecc.

Stabilita, nella seconda metà del secolo scorso, l'età mesozoica, prevalentemente liassica (pur estendendosi dal Trias al Giurese, secondo le regioni) della grande formazione metamorfica con Pietre Verdi, i geologi delle Alpi si applicarono (quasi come si era verificato per l'Appennino) alla sua tettonica.

Mentre che, alla maggior parte dei geologi italiani parve che la tettonica alpina potesse spiegarsi per corrugamenti più o meno intensi, spesso isoclinali, anche talora con estesi lembi staccati, per modo da risultarne terreni antichi sovrapposti a quelli più recenti (esempio tipico il Cervino), come

cercai di segnare schematicamente in nove sezioni geologiche inserite nel lavoro sopra *Les Alpes Occidentales* (1913), invece sorse tosto e si sviluppò subito (come sovraindicato per l'Appennino) la teoria dei carreggiamenti, spinta ben presto ad un ultranappismo che non sembra talora accettabile.

È la teoria delle grandi nappe o falde di giganteschi carreggiamenti sviluppantisi per centinaia di chilometri, con diverse sovrapposizioni che realmente si possono constatare in alcune regioni alpine e che si possono spiegare coll'enorme rinserramento che dovette verificarsi più volte, in successivi diastrofismi, nella gigantesca morsa crostale africo–europea. Questa teoria, capitanata da Argand, e seguìta da una pleiade di valorosi geologi, quali Lugeon, Schmidt, Steinmann, Köber, Amferer, Staub, Spitz, Haug, Termier, ecc. nonchè da alcuni italiani come Cacciamali, Rovereto, G. B. Dal Piaz, ecc. è ormai illustrata da oltre duecento pubblicazioni e non è quindi il caso di esaminarla, tanto più che, non avendo fatto io un rilevamento geologico metodico in tutta la catena alpina, non posso giudicare con sicurezza su tale questione, pure parendomi che siasi spesso esagerato.

Ritornando alla questione dell'età delle formazioni con Pietre Verdi, è da ricordare che alcuni geologi, come Staub, Kossmatt e specialmente Steinmann colla Nota sopra *Die Ophiolitischen Zone in den mediterranen Kaltgebirge* (1927) tendono ad attribuire tutte queste formazioni (salvo quelle antipermiane) al Giura–Infracretaceo; delineando una successione nelle eruzioni abissali da quelle ultrabasiche, e peridotiche, a quelle relativamente meno basiche, le Diabasi, ecc.

Recentemente R. Routhier pubblicò, nel « Bull. Soc. géol » (5ª serie, tome XIV, 1944)[2] un *Essai sur la Chronologie des Roches Vertes mesozoiques*, nel quale, appoggiandosi specialmente a studi fatti nella formazione degli *Schistes lustrés* del Queiras (Alpi Marittime) sviluppa l'idea che nelle Alpi Occidentali si possano distinguere due gruppi di Pietre Verdi, cioè, dall'alto in basso:

Infracretaceo Giura	Paragabbro, Dolerite, Pirossenite, Lawsonite, Peridotite, Serpentina ecc. con Radiolariti; il tutto con carattere di poca scistosità e poca laminazione.
Infragiura Trias	Prasiniti, Anfiboliti, con Albite, Epidoto, Clorite, Uralite, ecc. il tutto intensamente metamorfico, molto scistoso e laminato.

Da tali serie l'autore ricava tutta una storia geologica della generazione delle Pietre Verdi e della loro trasformazione, serpentinizzazione, consolidazione, glaucofanizzazione e laminazione in periodi successivi nella regione alpina.

Tale distinzione credo che abbia un fondo di verità nel senso che Anfiboliti e Prasiniti corrispondono ad una fase di metamorfismo più avanzato, più profondo, più ripetuto e quindi anche di qualche maggiore antichità che non le Pirosseniti, le Peridotiti e le Serpentine, almeno in linea generale

(2) I tomi 1941–46 del « B. S. G. France » furono, per cause belliche e postbelliche, distribuiti in Italia solo nel gennaio 1947.

e complessiva, tenendo anche conto della laminazione che indica di aver subìto un maggiore sforzo orogenetico; quindi la zona anfibolitifera–prasinitifera ecc., può riferirsi al Trias superiore e più probabilmente al Lias. Ma quanto all'età della zona superiore (a Peridotiti, Pirosseniti, ecc.) che il Routhier riferisce al Giura superiore–Infracretaceo è lecito dubitarne sino a prova paleontologica contraria. Infatti tettonicamente la regione di Queiras (su cui si basa specialmente il Routhier) è a pieghe isoclinali ripetute e drizzate (vedi F. Sacco, *Les Alpes Occidentales*, 1913, Sez. 9ª), per cui è difficile separarvi gli strati inferiori dai superiori; quanto a fossili le Radiolariti non costituiscono (come le Calpionelle) un vero carattere stratigrafico ma piuttosto batimetrico; quanto alla litologia, se in complesso prevale la differenza sovraindicata, essa non è però assoluta e costante ma presenta spesso eccezioni ed intrecci. È vero che la Anfiboliti–Prasiniti stanno essenzialmente nella zona inferiore, ma vediamo la roccia gabbrica comparire in basso ed in alto come nel Gruppo di Rocca bianca e colle Serpentine come presso la P.te Marcel, quasi in continuazione delle Radiolariti.

Se poi si aggiunge la considerazione che ambedue i detti gruppi di Pietre Verdi sono inglobati in una stessa formazione, dei Calcemicascisti o *Schistes lustrés*, si accentua il dubbio che entrambe appartengano ad una stessa od analoga età e che i fatti sovraccennati dipendano da ripetizioni di serie, sia naturali sia per fenomeni locali o tettonici.

Ma ciò che non è affatto accettabile è il parallelismo che il Routhier fa della sua seconda formazione (pirossenica, ecc.) delle Alpi colla formazione ofiolitifera dell'Appennino; giacchè, pur essendo ambedue formazioni di origine abissale, quella alpina è di scisti cristallini per profondo metamorfismo epizonico, mentre quella appenninica è solo rappresentata da argilloscisti più o meno lapidificati e contengono tutta una serie di fossili di tipo assolutamente cretaceo (str. s.). Col parallelismo del Routhier si ricade nell'errore antico di Pareto (1846), purtroppo ripetuto recentemente da Steinmann, Termier, Boussac, De Stefani, per la regione genovese, mentre che nello stesso foglio « Genova » della Carta geologica d'Italia al 100.000, pubblicato nel 1942, sono già ben distinte le tre differenti zone di Pietre Verdi, cioè:

Appennino genovese	Argilloscisti con Diabasi, Serpentine, con Radiolariti, ecc. del Cretaceo.
Gruppo di Voltri	Calcemicascisti con Serpentine, Peridotiti, Eufotidi o Gabbri spesso laminati, Gabbri glaucofanitici, Anfiboliti, Prasiniti, Eclogiti, Pirosseniti, ecc. del Mesozoico (l. s.).
Massiccio cristallino di Savona	Gneiss e Micascisti con Anfiboliti e Pirosseniti zonate del Paleozoico.

Concludendo, mentre rimando per ulteriori dettagli al mio precedente lavoro sopra *I Problemi delle formazioni ofiolitifere delle Alpi e degli Appennini* (« Boll. Uff. geol. », vol. LIX, 1934), posso riassumere i fatti sovraccennati nel seguente quadro:

Quadro schematico delle formazioni con Pietre Verdi.

Ere			Metamorfismo	Roccie, sedimenti abissali	Roccie endogene abissolitiche	Resti organici	Noduli e Concrezioni
ANTROPOZOICO (oceani attuali)			Nullo	Fanghiglia argilloso calcarea, *Abyssal Ooze, Red Mud, Red Clay*	Roccie basaltiche, specialmente oliviniche Ankaraniti Oceaniti, Basaniti, Diabesi oliviniche Teraliti, Tufi basici	*Radiolarian Ooze* *Globigerina Ooze* Fanghi a Coccoliti Crinoidi, Rostri di Cefalopodi, Denti di Squalidi, Otoliti di Cetacei	Noduli di Ossidi di ferro o di manganese. Noduli siliciferi. Concrezioni di Barite o di Aragonite
MESOZOICO	Appennino	CRETACEO	*Facies modeniana o appenninica*	Scleromorfismo (Cementazione Lapidificazione Struttura cataclastica)	Serpentine Diabasi, Epidiabasi Peridotite (Lherzolite) Gabbro (Eufotide) Tufi metamorfici (Mancano Prasiniti e Anfiboliti)	Radiolariti, Bennettiti, Calcari a Calpionella Calcari a Globigerina, Uintacrini, Inocerami Ammoniti varie Denti di Pticodi e di Squalidi, Ittiosauri	Noduli di Ossidi di ferro o di manganese Noduli siliciferi Concrezioni di Barite o di Aragonite
	Alpi	Specialmente LIAS	*Facies retica o leventina pennina o piemontese*	Anamorfismo della Epizona (Scistosità e Laminazione).	Calcemicascisti *Schistes lustrés* Filladi *Bundnerschiefer* *Glauzschiefer* *Schieferhulle* (p. p.) Scisti selciosi Calcari cristallini	Serpentine, Serp. scisti Diabasi pirosseniche, epidotiche, cloritiche, oliviniche, Peridotiti (Lherzoliti Talcoscisti, Cloritoscisti, Gabbri (Eufotidi) laminati Glaucofaniti Anfiboliti, Prasiniti.	Radiolariti Pentacrini Grifee Ammoniti (Arietiti) Aptici Belemniti	Scisti siliciferi *Kieselknolle* *Hornstein* *Cherts, Flint*
PALEOZOICO (alpino)			Anamorfismo della Metazona	Scisti cristallini varii Micascisti Gneiss Calcari saccaroidi	Anfiboliti e Prasiniti laminate. Roccie glaucofaniche, ecc.	Calcari cristallini Scisti grafitosi, forse di origine organica (p. p.)	Noduli silicei

Paleontologia. — *Sul genere «Brissopatagus» Cotteau* (*). Nota (**) del Corrisp. G. Checchia-Rispoli.

Il fortunato rinvenimento di un notevole numero di esemplari di *Brissopatagus* nei terreni cenozoici della Migiurtinia mi dà l'opportunità di riprendere lo studio di questo singolare e rarissimo genere di Echinide, sulla di cui diagnosi, per causa dell'insufficiente stato di conservazione del materiale finora raccolto, regna qualche incertezza.

Com'è noto, il genere *Brissopatagus* (1) è stato stabilito dal Cotteau sin dal 1863 per un individuo dell'Eocene di Biarritz e distinto per la particolare disposizione degli ambulacri pari, i quali, anzichè essere situati in solchi ben definiti, si trovano in depressioni più o meno circolari del guscio, che interessano maggiormente le adiacenti aree interambulacrali.

Il Cotteau avvicinava il nuovo genere a *Brissus*, che è un brisside, ed a *Brissoides* (*Eupatagus*), che è uno spatangide. In realtà appare piuttosto che *Brissopatagus*, più che prossimo a *Brissus*, il quale si distingue per la sua forma cilindrica e per i petali lunghi e stretti, si debba considerare come intermediario tra *Brissoides* e *Brissopsis*, anche questo un brisside: differendo dal primo per i petali depressi e dal secondo per la presenza di pochi grossi tubercoli scrobicolati racchiusi nello spazio circoscritto dalla fasciola peripetala.

Il Cotteau comprendeva nel nuovo genere *Brissopatagus Caumonti* di Biarritz ed un esemplare proveniente dal terziario dell'isola di Giava, ritenuto allora eocenico, distinto col nome di *Brissopatagus javanicus*, echinide già riferito da Herclots a *Spatangus*. Più tardi lo stesso Cotteau nella *Paléontologie Française* vi aggiunse *Brissopatagus Beyrichi* Dames, 1877, dell'Eocene veronese, *Brissopatagus sundaicus* Bôhm, 1882, di Madura, creduto pure eocenico e *Brissopatagus sindensis* Duncan e Sladen, 1883, dell'Eocene di Tong (India). Tutte queste specie sono rappresentate da esemplari unici che, per giunta, sono quasi sempre mal conservati (2). Più recentemente il Fourtau istituiva per l'Eocene medio egiziano il suo *Brissopatagus Humei*, 1913 (3).

Però non tutte queste specie oggi possono essere riferite al genere *Brissopatagus*, nè tutte sono da attribuirsi all'Eocene.

Infatti, secondo gli Autori dell'*Essai*, *Brissopatagus sundaicus* per la presenza di due soli pori genitali all'apice, per i petali pari meno depressi e

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Geopaleontologico dell'Università di Roma.

(**) Presentata nella seduta del 12 aprile 1947.

(1) Cotteau, *Échinides fossiles des Pyrenées*. Congr. scient. de France, Session de Bordeaux, p. 146 (1863).

(2) Cotteau, *Paléontologie Française; Échinides Éocènes*. T. I., 1885–1889.

(3) Fourtau, *Catal. d. Invertebrés foss. de l'Égypte: Échinides Éocènes*, «Geol. Surw. Egypt: Paléont. Sér., 1913.

per quelli posteriori meno divergenti trova il suo posto nel genere *Plesiopatagus* Pomel 1888 (4). Circa poi la distribuzione geologica delle varie specie, bisogna rilevare che secondo i più recenti studi (1937) del *Jannet* e del *Martin* sulla geologia dell'Arcipelago Indiano, gli strati di *Tijdaven*, che contengono *Brissopatagus javanicus* sono da riferirsi invece al più giovane Miocene (5). Sicchè il genere *Brissopatagus* a tutt'oggi comprende sei specie ben definite, compreso *Brissopatagus Venzoi*, descritto nella presente Nota. Di queste, quattro sono eoceniche (*Br. Caumonti*; *Br. Beyrichi*, *Br. Humei* e *Br. sindensis*) e due mioceniche (*Br. javanicus* e *Br. Venzoi*). Numero davvero esiguo se si considera la vasta distribuzione geografica del genere (Europa occidentale, Egitto, Somalia, regione indiana). La massima diffusione è nell'Eocene; poi il genere scomparve dalla regione mediterranea e continuò a vivere in quella indiana, estinguendosi nel più alto miocene con *Br. javanicus* (6).

La scoperta di *Brissopatagus Venzoi* nella parte più bassa dell'Aquitaniano della Migiurtinia assume perciò grande importanza, perchè si viene così a colmare, in parte, la grande lacuna esistente tra le specie dell'Eocene medio e quelle del Miocene più elevato. Nè minore è l'interesse dal punto di vista sistematico del rinvenimento di *Br. Venzoi*, perchè la conservazione, talora soddisfacente, di alcuni individui ha permesso di riconoscere con sicurezza, come sarà detto nella parte descrittiva, le caratteristiche del genere *Brissopatagus* sulle quali non tutti gli autori erano d'accordo.

Brissopatagus Venzoi fa parte del ricco materiale paleontologico raccolto dalla Missione geologica dell'«Agip», durante gli anni 1935–39 nei terreni terziari della Migiurtina. Il materiale echinitico affidatomi in istudio comprende numerose specie dell'Eocene, dell'Oligocene e del Miocene. Quello eocenico è stato in gran parte già illustrato (7). Con la presente Nota viene iniziato lo studio degli echinidi oligo–miocenici.

(4) Lambert et Thiery, *Essai de nomenclature raisonnee des Échinides*, p. 491, 1924.

(5) Jannet et Martin, *Ueber neozoische Echinoidea aus dem Niederlamdisch. Indischen Arcipel.* « Overduck int. Leidsche geologische Mededeelingen », VIII, 1937.

(6) Esiste nella letteratura echinologica un *Brissopatagus sundaicus* Boehm I. (*nec* Boehm A.). (v. «Monatschr. Zeitsch. Deutsch. Geolog. Gesellsch », 1903), il quale secondo il Lambert è invece una nuova specie di *Pericosmus* del Miocene.

(7) G. Checchia-Rispoli, *Su alcuni generi di Antillasteridi.* «Rend. R. Acc. d'Italia», serie VII, vol. II, 1940; «*Migliorinia*» *nuovo genere di Echinide dell'Eocene.* « Rend. R. Acc. d'Italia, serie VII, vol. III, 1941; *Brissoidi eocenici della Migiurtinia.* «Mem. R. Accad. d'Italia », vol. XIV, 1943; *Echinidi eocenici della Migiurtinia.* « Boll. Uff. Geol. d'Italia », vol. LXX, 1945–46.

Brissopatagus Venzoi Checchia-Rispoli

(Tav. I, fig. 1–13).

Dimensioni:

Lunghezza	mm.	42,	40, 37
Larghezza	»	37,	35, 33
Altezza	»	23,	22, 22

DESCRIZIONE. – Specie di medie dimensioni, dal guscio poco spesso, a contorno piuttosto cordiforme che ovale, arrotondato e lievissimamente sinuoso avanti, ristretto indietro, con la massima larghezza circa verso la metà della lunghezza. Faccia superiore gonfia, abbastanza elevata, un po' appiattita in alto, fortemente declive da tutti i lati, con la massima altezza nel primo quarto anteriore avanti l'apparecchio apicale; di qui il guscio scende rapidamente verso il bordo anteriore, mentre è meno declive nella parte posteriore, ove si osserva un'ottusa carena, che si abbassa verso il periprotto. Faccia posteriore molto ristretta, verticalmente troncata. Faccia inferiore pianeggiante nella regione marginale, sporgente sul piastrone, con una acutissima carena nel mezzo. Bordo poco arrotondato.

Apparecchio apicale eccentrico, situato a circa un terzo dell'asse antero-posteriore, etmoliso, allungato. I quattro pori genitali, piccoli e circolari, occupano il centro del sistema e sono molto avvicinati tra di loro. Madreporite stretta avanti, slargata rapidamente indietro protraendosi lungamente per finire in punta molto ottusa. Ocellari microscopiche. L'apparato, nell'insieme, è di forma pentagonale.

Solco anteriore largo; nullo al principio, va in seguito guadagnando una debole profondità in modo da intaccare appena il bordo anteriore, per scomparire del tutto sulla faccia inferiore. Area ambulacrale larga, finamente granulosa, composta di alte placche portanti nel centro due minutissimi pori situati in piccole escavazioni.

Petali pari piccoli, situati in leggere depressioni ovali, che si sviluppano maggiormente nelle attigue zone interambulacrali. Gli anteriori sono molto divergenti, quasi trasversi, diritti, più o meno ovali, socchiusi all'estremità, con la zona porifera anteriore più incurvata della posteriore e descrivente una convessità, talora molto forte, rivolta verso avanti. I petali posteriori sono un po' più lunghi e più stretti degli anteriori ed avvicinati. Zone perifere strette, composte di coppie piuttosto distanziate di pori uguali in ogni coppia, di forma ovale, internamente appuntiti, coniugati. Verso l'apice le zone sono atrofizzate, specialmente quelle anteriori dei petali anteriori. Nei petali anteriori ogni zona porifera consta di 12–13 coppie; nei posteriori di 15–16. Spazi interzonali su per giù larghi quanto una zona porifera.

Interambulacri pari poco sporgenti, un po' depressi nel mezzo per causa di una certa turgidezza delle placche coronali; il posteriore è ottusamente carenato.

Peristoma molto spostato avanti, a circa il primo terzo della lunghezza del guscio, superficiale, piccolo, reniforme, con labbro poco sporgente e quasi rettilineo.

Periprotto piccolo, longitudinale, ovale, appuntito sopra e sotto, situato in alto della troncatura posteriore del guscio.

Fasciola peripetala stretta, circoscrivente molto da vicino i petali, passante anteriormente un po' al disopra della metà della distanza tra l'apice ed il bordo anteriore.

Fasciola sottoanale larghissima, racchiudente uno spazio cordiforme ornato di grossi tubercoli disposti in serie, con 7–8 coppie di pori.

La faccia abactinale è uniformemente coperta di minuti granuli mammellonati, i quali s'ingrandiscono lentissimamente verso il bordo e poi sulla faccia inferiore, trasformandosi in tubercoli disposti in serie regolari. Pochi e grossi tubercoli, profondamente scrobicolati si osservano unicamente nelle zone posteriori degli interambulacri posteriori; il numero di questi tubercoli, cinque in tutto, di cui uno più piccolo, è costante in tutti gli esemplari studiati; così pure costante è la loro disposizione. Questi tubercoli sono circoscritti dalla fasciola peripetala.

Grossi tubercoli si osservano anche nello spazio circoscritto dalla fasciola sottoanale e sul piastrone, ove sono seriati; sulle larghissime zone periplastronali si osservano a forte ingrandimento delle verrucosità vermicolari.

Rapporti e differenze. – Gli esemplari studiati, circa una ventina, sono inseparabili fra di loro e, salvo la maggiore o la minore altezza del guscio, presentano tutti la medesima forma, un debolissimo solco anteriore, quattro pori genitali, le depressioni interambulacrali moderatamente depresse, un peristoma superficiale con labbro rettilineo e poco sporgente, un periprotto piccolo, longitudinale, appuntito, le medesime fasciole e infine una costanza nel numero e nella disposizione dei grossi tubercoli scrobicolati negli interambulacri posteriori.

Brissopatagus Caumonti Cotteau, tipo del genere, ha il solco impari molto stretto e profondo, i petali posteriori più lunghi degli anteriori, le depressioni anteriori molto più sviluppate delle posteriori e infine il peristoma con labbro arrotondato e molto sporgente.

Brissopatagus Beyrichi Dames, dell'Eocene veronese, è molto allungato e ristretto indietro, le depressioni interambulacrali sono molto forti con grossi e numerosi tubercoli in tutte le aree ed i petali anteriori fortemente convessi indietro.

Brissopatagus sindensis Duncan e Sladen, dell'Eocene indiano, ha il guscio meno elevato, molto stretto ed allungato; il solco impari più forte ed i petali anteriori con la convessità rivolta indietro.

Brissopatagus Humei Fourtau, dell'Eocene egiziano, ha il solco impari più profondo, ed i grossi tubercoli limitati agli interambulacri anteriori.

Infine il Miocenico *Brissopatagus javanicus* del Miocene e più elevato, ha il solco anteriore anch'esso molto profondo, i petali pari anteriori con la

convessità rivolta avanti e i grossi tubercoli scrobicolati in tutti e quattro gli interambulacri.

Gli esemplari della nuova forma vanno perciò distinti da tutte le congeneri. Essi effettivamente costituiscono una specie nuova, che distinguo col nome del prof. Venzo, che li ha raccolti.

Località. – I fossili studiati portano la seguente indicazione: « *Uebi Scebeli*; n. 10035 e 10045. Ripa di Eil a circa 30 metri al disopra del Nogal. Livello ad Echini, 31 marzo 1938 ».

Il prof. Sergio Venzo, che ha fatto parte della Missione dell'« Agip », mi ha gentilmente comunicato il profilo della serie *Eil–Nogal*, accompagnandola con molte precise indicazioni. Egli ha anche voluto gentilmente esaminare qualche esemplare. Dai dati stratigrafici fornitimi risulta che tutti gli esemplari descritti provengono dagli strati più bassi dell'Aquitaniano a circa una quindicina di metri al disopra dell'Oligocene superiore (Chattiano).

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA I

Fig. 1. – *Brissopatogus Venzoi* Ch. Risp. Visto dalla faccia abactinale. Ingrandimento dell'esemplare a Fig. 2, per mostrare la larga fasciola peripetola e la disposizione dei tubercoli negli interambulacri posteriori pari.

» 2–3 » » Due esemplari della medesima specie visti dalla faccia abactinale, a grandezza naturale.

» 4–7 » » Quattro esemplari della medesima specie, visti dalla faccia actinale, i quali mostrano la fasciola sottoanale. Grandezza naturale.

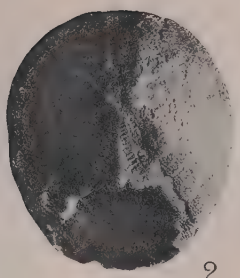
» 8 » » Un altro esemplare visto dalla faccia posteriore per mostrare il periprotto, a grandezza naturale.

» 9 » » Profilo antero–posteriore (a–p) di un esemplare, a grandezza naturale.

» 10–11 » » Due esemplari visti davanti per mostrare il solco impari, che si approfondisce verso il bordo inferiore, a grandezza naturale.

» 12–13 » » Due esemplari visti dalla faccia abactinale, a grandezza naturale.

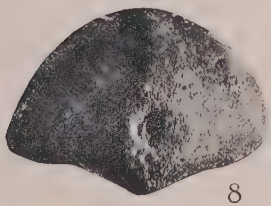
N. B. – Tutti gli esemplari sono stati riprodotti a grandezza naturale; la fig. 1 è un ingrandimento della fig. 12.


2

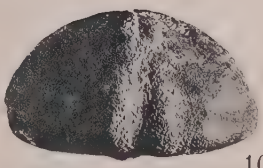
1

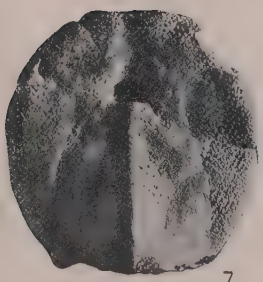
3

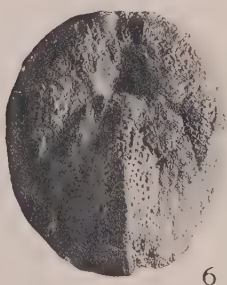
4


8

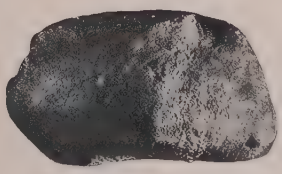
5


10


7

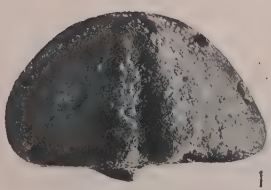

6

p


a

9

12


11

13

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Risoluzione delle equazioni funzionali lineari nel campo analitico, mediante un numero finito di integrazioni.* Nota di M. CARAFA, presentata (*) dal Socio G. CASTELNUOVO.

Come ho annunciato in una Nota precedente (1), applicando la *Teoria dei funzionali analitici* del prof. Luigi Fantappiè, si ottiene in forma esplicita l'integrale generale dell'equazione differenziale $\frac{d^n y}{dx^n} - a(x)\, y = f(x)$, mediante integrali definiti in numero finito ed una derivazione, a partire dagli elementi noti e da una certa funzione indipendente (2) da detti elementi e quindi calcolabile *una volta per sempre*. Questo risultato si estende ad equazioni funzionali lineari molto più generali, come dimostro in un altro lavoro di prossima pubblicazione (3), che qui riassumo. Precisamente, applicando detta *Teoria dei funzionali analitici*, si riesce a calcolare *mediante un numero finito di integrazioni e due particolari funzioni universali* (indipendenti cioè dal nucleo w e dal termine noto $f(x)$), il *nucleo risolvente* dell'equazione integrale:

$$(1) \qquad \gamma(x,\lambda) - \frac{\lambda}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{\alpha}\, w\left(x, \frac{1}{\alpha}\right) \gamma(\alpha,\lambda)\, d\alpha = f(x)$$

a cui può sempre ridursi (4) l'equazione funzionale lineare più generale:

$$(2) \qquad F[y(t); x] = f(x).$$

Nella (1) il *nucleo* $w(x,\alpha)$ e la $f(x)$ sono funzioni analitiche assegnate, mentre $\gamma(x,\lambda)$ è la funzione incognita. La $w(x,\alpha)$ deve soddisfare a certe condizioni che limitano la generalità della (1) (ovvero della (2)), ma che fanno ugualmente rientrare in essa una vasta classe di equazioni funzionali lineari, tra le quali figurano, per esempio, le equazioni integrali di seconda

(*) Nella seduta dell'8 marzo 1947.

(1) M. CARAFA, *Risoluzione effettiva, mediante integrali definiti, dell'equazione differenziale binomia*: $\frac{d^n y}{dx^n} - a(x)\, y = f(x)$. « Rend. dell'Accademia Nazionale dei Lincei », vol. II, ser. VIII, 1947, pp. 152–158.

(2) Per brevità diremo in seguito che una funzione o un funzionale è *invariabile*, relativamente ad una certa equazione funzionale, se è indipendente da **tutti** gli elementi noti dell'equazione stessa, ivi comprese anche le eventuali condizioni iniziali.

(3) Sulla « Investigatio Mathematica » che inizierà prossimamente le sue pubblicazioni in Barcellona (Spagna).

(4) Cfr. L. FANTAPPIÈ, *Le equazioni funzionali lineari nel campo complesso.* « Rend. dell'Acc. Nazionale dei Lincei », vol. IX, ser. 6ª, 1929, pp. 603–608.

specie di Frehdholm e di Volterra e quindi anche *tutte le equazioni differenziali lineari* che si possono sempre ridurre ad equazioni integrali di Volterra.

Espongo ora i vari passaggi, rimandando per le dimostrazioni alla Memoria citata.

1. Il funzionale lineare « prolungamento analitico ». – Sia data una funzione analitica $f(x)$ e sia $\rho \neq 0$ il raggio di convergenza del suo sviluppo in serie di potenze relativo all'origine $x = 0$. Sia poi x_1 un punto qualunque interno alla circonferenza di convergenza $(0, \rho)$ e la $f(x)$ *sia nota effettivamente* (cioè se ne conoscano numericamente i valori) *soltanto* lungo una curva chiusa C, interna alla circonferenza $(0, \rho)$ e contenente il punto x_1. Consideriamo ora quella che chiameremo la *funzione di prolungamento*:

$$(3) \qquad {}^{1}P_{x_1}(x, t, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - x_1)^k}{(t - x_1)^{k+1}} \frac{\theta^{k!}}{k!}.$$

Supposta nota la P_{x_1}, si dimostra che in *ogni punto ove converga lo sviluppo in serie di potenze della* $f(x)$ *relativo al punto* x_1, si ottiene:

$$(4) \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - x_1)^k}{k!} f^{(k)}(x_1) = \frac{\partial}{\partial \theta_{\theta=1}} \frac{1}{2\pi i} \oint_C P_{x_1}(x, t, \theta) f(t)\, dt.$$

Per $x_1 = 0$ ed $x = 1$ si pone $P_{x_1}(x, t, \theta) = P_0(t, \theta)$, funzione che sarà spesso impiegata nel seguito.

2. Alcune corrispondenze biunivoche nel campo dei numeri interi. – Si dimostra che c'è corrispondenza biunivoca tra le m^{uple} *ordinate* $(h_1, h_2, \cdots, h_m)$ di numeri interi positivi o nulli ed i numeri interi:

$$(5) \qquad [h_1, h_2, \cdots, h_m] = h_1\, 2^{h_2+h_3+\cdots+h_m+m-1} + \sum_{s=2}^{m} 2^{h_s+h_{s+1}+\cdots+h_m+m-s}.$$

Si dimostra poi anche che c'è corrispondenza biunivoca tra i numeri:

$$(6) \qquad E = \sum_{s=1}^{n} (n+1)^{p_s}$$

(dove gli esponenti p_s sono interi positivi o nulli) e le n^{uple} *non ordinate* $p_1, p_2, \cdots, p_n$, da cui ne viene che il numero

$$(7) \qquad \sum_{s=1}^{n} (n+1)^{p_s} - \sum_{s=1}^{n} (n+1)^{q_s}$$

è nullo soltanto quando le due n^{uple}, $p_1, p_2, \cdots, p_n$ e $q_1, q_2, \cdots, q_n$ risultano formate con gli stessi elementi.

3. La potenza n^{esima} funzionale generalizzata. – Generalizzando il concetto di *prodotto funzionale simmetrico* e quello di *potenza* n^{esima} *di composizione simmetrica*, introdotti dal prof. L. Fantappiè, si arriva rispet-

tivamente alla definizione di *prodotto funzionale generalizzato* e di *potenza n^{esima} funzionale generalizzata*. Per brevità, in questa Nota ci limitiamo a considerare soltanto la *potenza n^{esima} funzionale generalizzata* delle funzioni di due variabili.

Data una funzione analitica $w(x, \alpha)$ il cui sviluppo

$$w(x, \alpha) = \sum_{0}^{\infty}{}_{k,h}\, s_{k,h}\, x^k\, \alpha^h \tag{8}$$

converga per $|x| < \rho_1$ ed $|\alpha| < \rho_2$ con $\rho_1 \rho_2 > 1$, si definisce quale *potenza n^{esima} di composizione simmetrica* il *prodotto funzionale simmetrico* multiplo successivo:

$$\overset{\circ}{w}{}^n(x, \alpha) = \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \oint_{C_{n-1}} \frac{1}{\alpha_{n-1}}\, w\left(x, \frac{1}{\alpha_{n-1}}\right) d\alpha_{n-1} \cdot \oint_{C_{n-2}} \frac{1}{\alpha_{n-2}}\, w\left(\alpha_{n-1}, \frac{1}{\alpha_{n-2}}\right) d\alpha_{n-2} \cdots \tag{9}$$

$$\cdots \oint_{C_1} \frac{1}{\alpha_1}\, w\left(\alpha_2, \frac{1}{\alpha_1}\right) w(\alpha_1, \alpha)\, d\alpha_1$$

e si trova anche che:

$$\overset{\circ}{w}{}^n(x, \alpha) = \sum_{0}^{\infty}{}_{k_n, h_n, h_{n-1}, \cdots, h_1} s_{k_n, h_n} \cdot s_{h_n, h_{n-1}} \cdots s_{h_2, h_1}\, x^{k_n}\, \alpha^{h_1}. \tag{10}$$

Dato invece l'insieme $J(Q)$ di coefficienti:

$$Q = Q_{k_n, h_n; k_{n-1}, h_{n-1}; \cdots; k_1, h_1} \qquad \begin{pmatrix} k_s, h_s = 0, 1, 2, \cdots \\ s = 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix} \tag{11}$$

(in generale funzioni di più variabili $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_q$) se accade che la serie:

$$[w^n(\overset{\bullet}{x}, \overset{\bullet}{\alpha})]_{J(Q)} = \tag{12}$$

$$= \sum_{0}^{\infty}{}_{k_n, h_n; k_{n-1}, h_{n-1}; \cdots; k_1, h_1} s_{k_n, h_n} \cdot s_{k_{n-1}, h_{n-1}} \cdots s_{k_1, h_1}\, Q_{k_n, h_n; \cdots; k_1, h_1}$$

converge *assolutamente*, la sua somma verrà detta *potenza n^{esima} funzionale (generalizzata) di trama* $J(Q)$ della funzione $w(x, \alpha)$. La $[w^n(\overset{\bullet}{x}, \overset{\bullet}{\alpha})]_{J(Q)}$ coincide con la $\overset{\circ}{w}{}^n(x, \alpha)$ quando l'insieme $J(Q)$ è così definito:

$$Q_{k_n, h_n; \cdots; k_1, h_1} = \begin{cases} 1 & \text{per } k_s = h_{s+1} \quad \text{con } s = 1, 2, \cdots, n-1 \\ 0 & \text{in ogni altro caso.} \end{cases} \tag{13}$$

4. LE FUNZIONI PREPARATRICI E LE FUNZIONI-STAMPO. – Consideriamo quella che verrà detta la *funzione preparatrice n^{esima}*:

$$M_n(xr, \alpha r, \xi) = \sum_{0}^{\infty}{}_{k,h} (xr)^k\, (\alpha r)^h\, \xi^{(n+1)^{[k,h]}} \tag{14}$$

dove è $|r| \leq \rho_r < 1$, $|\xi| = 1$ e gli esponenti $[k, h]$ sono i numeri interi considerati al n. 2, in corrispondenza biunivoca con le *coppie ordinate* (k, h).

Il *prodotto funzionale simmetrico* della M_n per la w:

$$(15) \qquad \overline{w}_n(\xi, r) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{C_1} \frac{dx}{x} \oint_{C_2} \frac{d\alpha}{\alpha} M_n\left(\frac{r}{x}, \frac{r}{\alpha}, \xi\right) w(x, \alpha) = \sum_{0}^{\infty}{}_{k,h} s_{k,h}\, \xi^{(n+1)^{[k,h]}} r^{k+h}$$

dà quella che diremo la *preparata n^{esima} della w*. Nella *preparata* $\overline{w}_n$ ogni elemento $s_{k,h}$ dello sviluppo (8) ha come *fattore caratteristico* la potenza $\xi^{(n+1)^{[k,h]}}$. Si definisce poi, con la seguente espressione, la *funzione-stampo per la potenza n^{esima} funzionale di trama* J (Q):

$$(16) \qquad [S_n(\xi, r)]_{J(Q)} = \sum_{0}^{\infty}{}_{k_n, h_n; \ldots; k_1, h_1} \eta_{k_n, h_n; \ldots; k_1, h_1}\, r^{m_{k_n, h_n; \ldots; k_1, h_1}}\, Q_{k_n, h_n; \ldots; k_1, h_1}\, \xi^{-\sum_{s=1}^{n} (n+1)^{[k_s, h_s]}}$$

dove è $|r| \leq \rho_r' < 1$, $|\xi| = 1$, mentre i coefficienti η e gli esponenti m sono opportuni numeri reali e $Q_{k_n, h_n, \ldots, k_1, h_1}$ è il generico coefficiente dell'insieme J (Q) definito dalla (11).

Si dimostra infine che:

$$(17) \qquad [w^n(\overset{\bullet}{x}, \overset{\bullet}{\alpha})]_{J(Q)} = \frac{\partial}{\partial \theta_{\theta=1}} \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{C_r} dr \oint_{C_\xi} \frac{d\xi}{\xi} P_0(r, \theta) [S_n(\xi, r)]_{J(Q)} \overline{w}_n^n(\xi, r)$$

come si verifica tenendo conto che gli esponenti delle potenze della ξ nella $\overline{w}_n^n$ e nella $[S_n]_{J(Q)}$ sono del tipo E del n. 2, perciò nella (17) l'integrazione rispetto alla ξ lascia *soltanto* quei termini della $\overline{w}_n^n$ (moltiplicandoli anche per i corrispondenti coefficienti Q) *che sono in corrispondenza biunivoca con quelli della* $[S_n]_{J(Q)}$ e che verranno quindi poi a formare la potenza funzionale voluta. La funzione $[S_n]_{J(Q)}$ è in sostanza lo « *stampo* » che *modella la potenza ordinaria n^{esima} $\overline{w}_n^n$ della preparata* $\overline{w}_n$ nella corrispondente *potenza n^{esima} funzionale di trama* J (Q), da cui la denominazione datale. Sia la $[S_n]_{J(Q)}$, sia la M_n sono indipendenti dalla w e quindi possono calcolarsi *una volta per sempre*. Nella (17) il funzionale « prolungamento » considerato al n. 1 è impiegato a portare la variabile r (parametro di convergenza) dal cerchio $|r| \leq \bar{\rho}_r < 1$ al punto $r = 1$.

5. Calcolo della potenza N^{esima} di composizione simmetrica. – Come si è detto la *potenza n^{esima} di composizione simmetrica* è una particolare *potenza n^{esima} funzionale generalizzata*, perciò possiamo calcolarla con il metodo indicato al n. 4. Conviene però per le successive applicazioni, impiegare un'altra funzione *preparatrice* M, che diremo la funzione *preparatrice generale*, la quale permette di calcolare la potenza $\overline{w}_n^n$, per n qualunque, con un numero di operazioni finito ed indipendente da n; la sua espressione è la seguente:

$$(18) \qquad M(xr, \alpha r, \xi, t) = \sum_{s=1}^{\infty} t^s r^s M_s(xr, \alpha r, \xi)$$

dove M_s è la *preparatrice* s^{esima} definita dalla (14). La *preparata generale* della w è data dal *prodotto funzionale simmetrico*:

$$(19) \qquad \overline{w}(\xi, r, t) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{C_1} \frac{dx}{x} \oint_{C_2} \frac{d\alpha}{\alpha} M\left(\frac{r}{x}, \frac{r}{\alpha}, \xi, t\right) w(x, \alpha).$$

Dalla potenza *ordinaria* n^{esima} della $\overline{w}$ si ottiene la potenza *ordinaria* n^{esima} della $\overline{w}_n$ (a meno di un coefficiente), con il calcolo di residuo:

$$(20) \qquad \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_t} \frac{dt}{t^{nn+1}} \overline{w}^n(\xi, r, t) = r^{n^2} \overline{w}_n^n(\xi, r).$$

Si chiama poi *funzione-stampo per la potenza* n^{esima} *di composizione simmetrica*, la seguente:

$$(21) \quad S_n(x,\alpha,\xi,r) = \sum_0^\infty {}_{k_n, h_n, h_{n-1}, \ldots, h_1} \eta_{k_n, h_n, \ldots, h_1} x^{k_n} \alpha^{h_1} r^{k_n + \sum_1^n h_s} \xi^{-(n+1)^{[k_n, h_n]} - \sum_{s=1}^{n-1} (n+1)^{[h_{s+1}, h_s]}}$$

ed applicando la (17), tenendo conto della (20), si trova:

$$(22) \quad \overset{\circ}{w}^n(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \theta_{\theta=1}} \frac{1}{(2\pi i)^3} \oint_{C_r} dr \oint_{C_\xi} \frac{d\xi}{\xi} \oint_{C_t} \frac{dt}{t^{nn+1}} P_0(r, \theta) S_n(x, \alpha, \xi, r) \overline{w}^n(\xi, r, t).$$

6. CALCOLO DEL NUCLEO RISOLVENTE. – Sia

$$(23) \qquad R(\lambda; x, \alpha) = \sum_{n=1}^\infty \lambda^{n-1} \overset{\circ}{w}^n(x, \alpha)$$

il *nucleo risolvente* dell'equazione (1) di partenza. Per λ in modulo abbastanza piccolo, la soluzione unica della (1) è data dall'espressione

$$(24) \qquad \gamma(x, \lambda) = f(x) + \frac{\lambda}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{\alpha} R\left(\lambda; x, \frac{1}{\alpha}\right) f(\alpha)\, d\alpha.$$

Consideriamo ora quella che diremo la *funzione stampo generale di composizione simmetrica*:

$$(25) \qquad S(x, \alpha, \xi, r, t, u) = \sum_{n=1}^\infty \frac{r^{n^2}}{t^{nn+1} u^{n+1}} S_n(x, \alpha, \xi, r)$$

dove S_n è la generica funzione-stampo definita dalla (21) ed u è un parametro ausiliario. La funzione *preparatrice generale* e la *funzione-stampo* S sono *invariabili* (cioè indipendenti dalla w) e quindi basterà calcolarle *una volta per sempre*. Tenendo poi presente che per opportuni valori delle variabili è:

$$(26) \qquad \sum_{n=0}^\infty (n\lambda)^n \overline{w}^n(\xi, r, t) = \frac{1}{1 - n\lambda \overline{w}(\xi, r, t)}$$

si trova infine che il *nucleo rivolvente* R è dato dall'espressione:

$$(27) \qquad R(\lambda; x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial\theta_{\theta=1}} \frac{1}{(2\pi i)^4} \oint_{C_r} dr \oint_{C_\xi} d\xi \oint_{C_t} dt \oint_{C_u} du \frac{P_0(r,\theta)\, S(x,\alpha,\xi,r,t,u)}{\xi[\lambda - u\lambda^2 \overline{w}(\xi,r,t)]}$$

cioè: *il nucleo risolvente* R *può ottenersi con 6 integrali definiti* (calcoli di residuo) *ed una derivazione, a partire dal nucleo w e dalle funzioni* (*invariabili*) $P_0 \cdot S$ *ed* M *indipendenti dal nucleo stesso.* La (27) può anche scriversi più brevemente così:

$$(28) \qquad R(\lambda; x, \alpha) = \mathfrak{S}_0 \left| \frac{1}{\lambda - u\lambda^2 \overline{w}(\xi, r, t)}; x, \alpha \right|$$

dove $\mathfrak{S}_0$ è simbolo di funzionale lineare, il cui valore si ricava subito dal confronto della (28) con la (27). Quello che più importa rilevare è che $\mathfrak{S}_0$ è *invariabile* (cfr. nota [2]), quindi: *il nucleo risolvente* R *è un funzionale lineare invariabile di una certa funzione della preparata* $\overline{w}$, *la quale ultima a sua volta è un funzionale lineare invariabile del nucleo w* (come risulta immediatamente dalla sua espressione (19)).

Dalla (24) per mezzo della (27) si ottiene l'espressione esplicita della $\gamma(x, \lambda)$ che può mettersi nella forma:

$$(29) \qquad \gamma(x, \lambda) = \bar{\mathfrak{S}}_0 \left| \frac{f(\alpha)}{1 - u\lambda \overline{w}(\xi, r, t)}; x \right|$$

dove $\bar{\mathfrak{S}}_0$ è simbolo di funzionale lineare, *invariabile*, cioè indipendente dal *nucleo* $w(x, \alpha)$ e dal termine noto $f(x)$. Si dimostra poi che le stesse formule valgono anche nel caso in cui lo sviluppo (8) del *nucleo* $w(x, \alpha)$ converga per $|x| < \rho_1$ ed $|\alpha| < \rho_2$ con $\rho_1 \cdot \rho_2 = 1$, quando è soddisfatta una certa condizione che restringe il campo della (1), nel modo però che si è già detto al principio.

7. Calcolo degli operatori che sono funzioni di un dato operatore lineare. – Il prof. L. Fantappiè ha dimostrato che è possibile dare significato all'operatore $g(F)$ *funzione g di un dato operatore analitico lineare* F ed ha trovato che:

$$(30) \qquad g(F) f(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\lambda} \frac{1}{\lambda} \gamma\left(x, \frac{1}{\lambda}\right) g(\lambda)\, d\lambda$$

essendo $\gamma(x, \lambda)$ la funzione data dalla (24) se si prende quale *nucleo* $w(x, \alpha)$ della (1) l'*indicatrice simmetrica* dell'operatore F. Sostituendo quindi alla γ la sua espressione (29), si ottiene:

$$(31) \qquad g(F) f(x) = \bar{\mathfrak{S}}_0 [g(u\overline{w}(\xi, r, t)) \cdot f(\alpha); x].$$

Si ricordi che $\mathfrak{S}_0$ è *invariabile* e si noti la stretta somiglianza formale tra i simboli del primo membro della (31) e quelli del secondo che traducono i

primi in calcolo effettivo. La (31) ci rivela poi, che la *non linearità* (in generale) dell'operatore $g(F)f(x)$, considerato come *funzionale (analitico) del nucleo* $w(x, \alpha)$, dipende *soltanto* dalla non linearità della funzione $g(\lambda)$. In un prossimo lavoro mostrerò che *questa proprietà si riscontra in tutti i funzionali analitici non lineari*. I risultati esposti nei nn. precedenti possono estendersi al caso delle equazioni funzionali lineari con funzioni incognite di più variabili, il che permette di dare in forma esplicita l'integrale generale *dell'equazione alle derivate parziali, lineare, a coefficienti variabili, di qualunque ordine* con le condizioni di Cauchy su un'ipersuperficie generica.

Matematica. — *Sull'esistenza delle funzioni potenziali nei problemi della Fisica matematica* (*). Nota di G. FICHERA, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

È ben noto come l'introduzione della funzione di Airy nel problema di elastostatica piana, in cui sono assenti forze di massa e dove figurano come dati al contorno le forze agenti su questo, ne consenta una notevole semplificazione, riconducendolo alla determinazione di una funzione bi-iperarmonica, della quale si conoscano sul contorno del campo i valori suoi e della sua derivata normale. L'impiego di tale funzione non appare, però, altrettanto utile nei problemi in cui sono assegnati su tutto il contorno o su parte di esso gli spostamenti, dato che non agevole è l'esprimere le componenti di spostamento u e v per mezzo delle derivate della funzione di Airy. Si può allora pensare di introdurre una funzione F tale che u e v possano esprimersi come combinazioni lineari di sue derivate. Ciò, ad esempio, è stato fatto dal Marguerre in una Memoria del 1935 (1). Ora, poichè la considerazione di una funzione F di tipo siffatto si presenta non solo nell'anzidetto problema, ma anche in altri della Fisica matematica, il Sobrero (2) è stato condotto a dare la seguente generale definizione di funzione potenziale: *se il vettore* S, *di componenti* $u, v, w, \cdots$, *funzione delle variabili indipendenti* $x, y, z, \cdots$, *è soluzione di un determinato problema fisico, si dirà che quel vettore ammette una funzione potenziale* $F(x, y, z, \cdots,)$ *se esistono ben determinati operatori differenziali lineari a coefficienti costanti* $D_1, D_2, D_3, \cdots$ *tali che sia possibile esprimere* $u, v, w, \cdots$, *al modo seguente*

$$u = D_1 F \quad , \quad v = D_2 F \quad , \quad w = D_3 F, \cdots$$

Egli dimostra che *ogni vettore soluzione di un problema fisico, il quale si traduca in un sistema di due equazioni differenziali lineari omogenee a*

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 12 aprile 1947.

(1) K. MARGUERRE, *Spannungsverteilung und Wellenausbreitung in der Kontinuierlich gestützten Platte.* [« Ingenieur-Archiv », IV Band 1933, Springer (Berlin)] pp. 332-353.

(2) L. SOBRERO, *Delle funzioni analoghe al potenziale intervenienti nella Fisica matematica.* [« Rend. Acc. Naz. Lincei », serie VI, vol. XXI (1935)].

coefficienti costanti in due variabili indipendenti, ammette una funzione potenziale.

In un mio lavoro in corso ho dimostrato vera una presunzione suggeritami dal prof. Picone, secondo la quale, in generale, se si considera il sistema di n equazioni nelle n componenti $u_1, u_2, \cdots, u_n$ di un vettore incognito S, funzione delle due variabili indipendenti x e y

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij} u_j = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots; n),$$

essendo Δ_{ij} un operatore differenziale lineare a coefficienti costanti, si possono determinare n operatori del tipo anzidetto $D_1, D_2, \cdots, D_n$, tali che per ogni soluzione $S \equiv \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ del sistema considerato si ha

$$u_1 = D_1 F \quad , \quad u_2 = D_2 F, \cdots, u_n = D_n F,$$

essendo la F un'arbitraria soluzione di una ben determinata equazione lineare a coefficienti costanti.

Si può, quindi, affermare che tutti i vettori soluzioni di problemi della Fisica matematica, che si traducono in sistemi come quello considerato, in due variabili, ammettono una funzione potenziale.

Si potrebbe essere indotti a credere che un tale fatto seguita a sussistere anche quando il numero delle variabili indipendenti è maggiore di due, ma dimostreremo che ciò non è in generale vero, facendo vedere che ad esempio il vettore spostamento nell'equilibrio di un corpo elastico, isotropo e omogeneo a tre dimensioni non ammette una funzione potenziale.

È questo l'oggetto della presente Nota.

Se D è un operatore differenziale lineare a coefficienti costanti di ordine n nelle tre variabili x, y, z

$$D = \sum_{i+j+k \leq n} a_{ijk} \frac{\partial^{i+j+k}}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k},$$

indicheremo con la stessa lettera il suo polinomio caratteristico

$$D = \sum_{i+j+k \leq n} a_{ijk} \xi^i \eta^j \zeta^k,$$

inoltre nelle dimostrazioni dei teoremi che considereremo ci varremo del seguente noto

LEMMA. – *Se* A *e* B *sono due operatori differenziali lineari a coefficienti costanti, condizione necessaria e sufficiente perchè ogni soluzione dell'equazione* $Af = 0$ *verifichi l'equazione* $Bf = 0$ *è che il polinomio* B *sia divisibile per* A.

Scriviamo al modo seguente le equazioni indefinite – nelle componenti u, v, w del vettore spostamento S – dell'equilibrio di un solido elastico isotropo e omogeneo, in assenza di forze di massa:

$$(1)\qquad \begin{cases} \lambda\Delta_2 u + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) = 0, \\ \lambda\Delta_2 v + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) = 0, \\ \lambda\Delta_2 w + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) = 0. \end{cases}$$

λ è una costante che si esprime per mezzo delle costanti elastiche del corpo e che ha valore positivo. A noi basterà supporre $\lambda = -1$.

Dalle (1), com'è noto, si trae $\Delta_4 u = \Delta_4 v = \Delta_4 w = 0$, e posto

$$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

segue anche $\Delta_2 \omega_x = \Delta_2 \omega_y = \Delta_2 \omega_z = 0$ (3).

I TEOREMA. – *Condizione necessaria e sufficiente perchè, comunque si consideri il vettore* $S \equiv \{u, v, w\}$ *soluzione del sistema* (1), *si abbia* $Lu = 0$ ($Lv = 0$, $Lw = 0$), *con* L *operatore lineare e coefficienti costanti, è che sia* $L = C\Delta_4$, *essendo* C *un operatore lineare a coefficienti costanti.*

È ovvia la sufficienza della condizione. Dimostriamone la necessità. Sia f un'arbitraria funzione bi-iperarmonica delle tre variabili indipendenti x, y, z, considerato il vettore di componenti

$$(2)\qquad u = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \quad v = -\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}, \quad w = \lambda\Delta_2 f + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

esso verifica il sistema (1). Sarà allora per ipotesi $Lu = 0$, cioè $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial z} Lf = 0$, e quindi, in forza del lemma, data l'arbitrarietà della funzione bi-iperarmonica f, $L = C\Delta_4$, c. d. d.

II TEOREMA. – *Condizione necessaria e sufficiente perchè, comunque si consideri il vettore* $S \equiv \{u, v, w\}$ *soluzione del sistema* (1), *si abbia*

$$(3)\qquad C_1 \omega_x + C_2 \omega_y + C_3 \omega_z = 0$$

con C_1, C_2, C_3, *operatori lineari a coefficienti costanti, è che sia*

$$C_1 = \frac{\partial}{\partial x} C + K'\Delta_2, \quad C_2 = \frac{\partial}{\partial y} C + K''\Delta_2, \quad C_3 = \frac{\partial}{\partial z} C + K'''\Delta_2,$$

essendo C, K', K'', K''' *operatori lineari a coefficienti costanti.*

Anche in questo caso è ovvia la sufficienza.

(3) Posto $\Theta = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}$, derivando ambo i membri della prima delle (1) rispetto a x, quelli della seconda rispetto a y e quelli della terza rispetto a z e quindi sommando membro a membro e dividendo per $\lambda + 1$, ne viene $\Delta_2 \Theta = 0$. Applicando l'operatore Δ_2 a ciascuna delle (1), segue allora $\Delta_4 u = \Delta_4 v = \Delta_4 w = 0$. Derivando poi ambo i membri della terza equazione rispetto a y, quelli della seconda rispetto a z e sottraendo poscia da questi quelli, ne viene $\Delta_2 \omega_x = 0$. In modo analogo si trae $\Delta_2 \omega_y = 0$, $\Delta_2 \omega_z = 0$.

Detta f un'arbitraria funzione bi-iperarmonica, consideriamo il vettore, soluzione del sistema (1), che ha le componenti definite dalle (2). Si ha

$$\omega_x = (\lambda + 1)\frac{\partial}{\partial y}\Delta_2 f \quad , \quad \omega_y = -(\lambda + 1)\frac{\partial}{\partial x}\Delta_2 f \quad , \quad \omega_z = 0 .$$

Deve quindi essere per la (3)

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} C_1 - \frac{\partial}{\partial x} C_2\right)\Delta_2 f = 0 .$$

Data l'arbitrarietà della funzione bi-iperarmonica f deve sussistere la seguente identità

$$\eta C_1 - \xi C_2 = K(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2), \tag{4}$$

con K polinomio in ξ, η, ζ. Da essa traiamo

$$C_1 = \frac{\xi C_2 + K(\xi^2 + \zeta^2)}{\eta} + K\eta . \tag{5}$$

Poniamo: $C_2 = \eta C_2' + C_2''$, avendo indicato con $\eta C_2'$ la somma di tutti i termini che contengono η e con C_2'' quella dei restanti, e in modo analogo: $K = \eta K' + K''$. Sarà ovviamente: $\xi C_2'' + K''(\xi^2 + \eta^2) = 0$. Deve pertanto essere detto K_2 un polinomio: $K'' = \xi K_2$.

Dalla (5) si trae

$$C_1 = \xi C_2' + K'(\xi^2 + \zeta^2) + K'\eta^2 + \xi\eta K_2 .$$

Posto $C = C_2' + \eta K_2$, si ha

$$C_1 = \xi C + K'(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) .$$

Dalla (4) segue inoltre

$$C_2 = \eta C + \frac{\eta K' - K}{\xi}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = \eta C + K''(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) .$$

Poichè, analogamente a come s'è conseguita la (4), può pervenirsi alla seguente identità

$$\zeta C_2 - \eta C_3 = H(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2),$$

abbiamo

$$C_3 = \zeta C + \frac{\zeta K'' - H}{\eta}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = \zeta C + K'''(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$$

e il teorema è così dimostrato.

III Teorema. – *Non esistono tre operatori* D_1, D_2, D_3 *lineari e a coefficienti costanti tali che, comunque si consideri il vettore* $S = \{u, v, w\}$ *soluzione del sistema* (1), *esiste una funzione* F *per la quale si abbia*

$$u = D_1 F \quad , \quad v = D_2 F \quad , \quad w = D_3 F .$$

Procediamo per assurdo. Supponiamo esistenti i tre operatori D_1, D_2, D_3, che potremo ovviamente supporre primi fra di loro. La funzione F deve verificare le tre seguenti equazioni

$$LF \equiv \left\{ \lambda \Delta_2 D_1 + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} D_1 + \frac{\partial}{\partial y} D_2 + \frac{\partial}{\partial z} D_3\right)\right\} F = 0,$$

$$MF \equiv \left\{ \lambda \Delta_2 D_2 + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} D_1 + \frac{\partial}{\partial y} D_2 + \frac{\partial}{\partial z} D_3\right)\right\} F = 0,$$

$$NF \equiv \left\{ \lambda \Delta_2 D_3 + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial x} D_1 + \frac{\partial}{\partial y} D_2 + \frac{\partial}{\partial z} D_3\right)\right\} F = 0.$$

Poichè si ha $D_1 LF = Lu = 0$, $D_2 MF = Mv = 0$, $D_3 NF = Nw = 0$, deve essere (teor. I) $L = C_1 \Delta_4$, $M = C_2 \Delta_4$, $N = C_3 \Delta_4$, con C_1, C_2, C_3 operatori lineari a coefficienti costanti.

Devono pertanto sussistere le tre seguenti identità

$$\begin{cases} [\lambda(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+\xi^2] D_1 + \xi\eta D_2 + \xi\zeta D_3 \equiv C_1 (\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2, \\ \xi\eta D_1 + [\lambda(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+\eta^2] D_2 + \eta\zeta D_3 \equiv C_2 (\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2, \\ \xi\zeta D_1 + \eta\zeta D_2 + [\lambda(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+\zeta^2] D_3 \equiv C_3 (\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2. \end{cases}$$

Si ottiene, allora, seguitando a chiamare con C_1, C_2, C_3, tali operatori moltiplicati per $\frac{1}{\lambda^2+\lambda}$.

$$(6) \qquad \begin{cases} D_1 = (\lambda+1)\Delta_2 C_1 - \frac{\partial}{\partial x}\left(C_1 \frac{\partial}{\partial x} + C_2 \frac{\partial}{\partial y} + C_3 \frac{\partial}{\partial z}\right), \\ D_2 = (\lambda+1)\Delta_2 C_2 - \frac{\partial}{\partial y}\left(C_1 \frac{\partial}{\partial x} + C_2 \frac{\partial}{\partial y} + C_3 \frac{\partial}{\partial z}\right), \\ D_3 = (\lambda+1)\Delta_2 C_3 - \frac{\partial}{\partial z}\left(C_1 \frac{\partial}{\partial x} + C_2 \frac{\partial}{\partial y} + C_3 \frac{\partial}{\partial z}\right). \end{cases}$$

Posto $G = C_1 \frac{\partial F}{\partial x} + C_2 \frac{\partial F}{\partial y} + C_3 \frac{\partial F}{\partial z}$, si ha quindi

$$u = (\lambda+1)\Delta_2 C_1 F - \frac{\partial G}{\partial x}, \quad v = (\lambda+1)\Delta_2 C_2 F - \frac{\partial G}{\partial y},$$

$$w = (\lambda+1)\Delta_2 C_3 F - \frac{\partial G}{\partial z}$$

e da qui traiamo

$$C_2 u - C_1 v = \frac{\partial C_1 G}{\partial y} - \frac{\partial C_2 G}{\partial x}, \quad C_3 v - C_2 w = \frac{\partial C_2 G}{\partial z} - \frac{\partial C_3 G}{\partial y},$$

$$C_1 w - C_3 u = \frac{\partial C_3 G}{\partial x} - \frac{\partial C_1 G}{\partial z},$$

e pertanto: $C_1 \omega_x + C_2 \omega_y + C_3 \omega_z = 0$.

Deve allora essere (teorema II)

$$C_1 = \frac{\partial}{\partial x} C + K'\Delta_2 \quad , \quad C_2 = \frac{\partial}{\partial y} C + K''\Delta_2 \quad , \quad C_3 = \frac{\partial}{\partial z} C + K'''\Delta_2 .$$

Sostituendo nelle (6) otteniamo

$$D_1 = \Delta_2 \left\{ \lambda \frac{\partial}{\partial x} C + (\lambda + 1)\Delta_2 K' - \frac{\partial}{\partial x}\left(K' \frac{\partial}{\partial x} + K'' \frac{\partial}{\partial y} + K''' \frac{\partial}{\partial z} \right) \right\},$$

$$D_2 = \Delta_2 \left\{ \lambda \frac{\partial}{\partial y} C + (\lambda + 1)\Delta_2 K'' - \frac{\partial}{\partial y}\left(K' \frac{\partial}{\partial x} + K'' \frac{\partial}{\partial y} + K''' \frac{\partial}{\partial z} \right) \right\},$$

$$D_3 = \Delta_2 \left\{ \lambda \frac{\partial}{\partial z} C + (\lambda + 1)\Delta_2 K''' - \frac{\partial}{\partial z}\left(K' \frac{\partial}{\partial x} + K'' \frac{\partial}{\partial y} + K''' \frac{\partial}{\partial z} \right) \right\}.$$

Contrariamente all'ipotesi che D_1 , D_2 , D_3 siano primi fra di loro. Possiamo dimostrare il teorema anche nell'ipotesi $\lambda = -1$.
In tal caso le (1) possono scriversi al modo seguente

$$(1') \qquad \frac{\partial \omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y} = 0$$

e pertanto, detta f un'arbitraria funzione armonica, ogni vettore $S \equiv \{u, v, w\}$ soddisfacente le equazioni

$$(1'') \qquad \omega_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad , \quad \omega_y = \frac{\partial f}{\partial y} \quad , \quad \omega_z = \frac{\partial f}{\partial z} ,$$

soddisfa anche le (1'). In particolare è soluzione del sistema il vettore $S = \text{grad}\, g$, con g funzione arbitraria. Deve allora esistere una funzione F verificante le equazioni

$$\frac{\partial g}{\partial x} = D_1 F \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial y} = D_2 F \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial z} = D_3 F .$$

Da ciò segue

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} D_2 - \frac{\partial}{\partial y} D_1 \right) g = \left(\frac{\partial}{\partial y} D_3 - \frac{\partial}{\partial z} D_2 \right) g = \left(\frac{\partial}{\partial z} D_1 - \frac{\partial}{\partial x} D_3 \right) g = 0 ,$$

ciò che implica, per l'arbitrarietà di g e supposti, com'è lecito, D_1 , D_2 , D_3 primi fra di loro: $D_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $D_2 = \frac{\partial}{\partial y}$, $D_3 = \frac{\partial}{\partial z}$ e quindi si arriverebbe all'assurdo che le soluzioni del sistema (1') sono solamente del tipo $S = \text{grad}\, F$, mentre le (1'') ci dicono che esistono soluzioni diverse da queste.

Matematica. — *Condizioni necessarie e sufficienti per i momenti di una funzione limitata.* Nota di A. GHIZZETTI (*), presentata (**) dal Socio M. PICONE.

In una precedente Memoria (1), considerando una funzione quasi continua $f(x)$ definita in un intervallo finito o infinito (a, b) ed ivi verificante la limitazione

$$0 \leq f(x) \leq 1 , \tag{1}$$

ho risolto il problema di determinare entro quali limiti possa variare il $(k+1)$-esimo momento

$$\mu_k = \int_a^b x^k f(x)\, dx , \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{2}$$

della $f(x)$ quando si conoscono i k momenti precedenti $\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_{k-1}$. Si può dire che le disuguaglianze ottenute rappresentano delle *condizioni necessarie* affinchè i numeri della successione

$$\mu_0, \mu_1, \mu_2, \cdots \tag{3}$$

siano i momenti di una $f(x)$ verificanti la (1).

Scopo di questa Nota è dimostrare che, supposto *finito* l'intervallo (a, b), le predette condizioni sono anche *sufficienti*.

Prima di enunciare il relativo teorema, conviene richiamare alcune nozioni già introdotte in (M).

Data la successione (3) dei momenti e introdotti i cosidetti *bimomenti a sinistra* $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \cdots$ ed i *bimomenti a destra* $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \cdots$, formalmente definiti dalle

$$e^{-(\mu_0 z + \mu_1 z^2 + \mu_2 z^3 + \cdots)} = 1 - \sigma_0 z - \sigma_1 z^2 - \sigma_2 z^3 - \cdots ,$$

$$e^{\mu_0 z + \mu_1 z^2 + \mu_2 z^3 + \cdots} = 1 + \delta_0 z + \delta_1 z^2 + \delta_2 z^3 + \cdots ,$$

dovremo considerare le tre successioni di numeri

$$\begin{cases} \Delta_0 , \Delta_1 , \Delta_2 , \Delta_3 , \cdots , \\ \Delta'_1 , \Delta'_2 , \Delta'_3 , \cdots , \\ \Delta''_1 , \Delta''_2 , \Delta''_3 , \cdots , \end{cases} \tag{4}$$

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 12 aprile 1947.

(1) Vedi A. GHIZZETTI, *Ricerche sui momenti di una funzione limitata compresa fra limiti assegnati*, « Memorie della R. Accademia d'Italia », ser. VII, vol. XIII, fasc. 20 (1942), pp. 1165-1199. Questa Memoria sarà citata con l'indicazione (M).

ove si è posto:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} \sigma_0 & \sigma_1 & \cdots & \sigma_k \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_{k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_k & \sigma_{k+1} & \cdots & \sigma_{2k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_0 & \delta_1 & \cdots & \delta_k \\ \delta_1 & \delta_2 & \cdots & \delta_{k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_k & \delta_{k+1} & \cdots & \delta_{2k} \end{vmatrix}, \quad (2)$$

$$\Delta'_k = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^k \\ \sigma_0 & \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_k \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \cdots & \sigma_{k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{k-1} & \sigma_k & \sigma_{k+1} & \cdots & \sigma_{2k-1} \end{vmatrix}, \quad \Delta''_k = (-1)^k \begin{vmatrix} 1 & b & b^2 & \cdots & b^k \\ \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 & \cdots & \delta_k \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \cdots & \delta_{k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{k-1} & \delta_k & \delta_{k+1} & \cdots & \delta_{2k-1} \end{vmatrix}.$$

Chiameremo le (4) le *successioni associate* alla (3). Importa notare che Δ_k è un polinomio in $\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_{2k}$, mentre Δ'_k, Δ''_k sono polinomi in $\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_{2k-1}$.

Inoltre, dati, sull'asse x, $2n$ punti $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \cdots < \alpha_n < \beta_n$, chiameremo *funzione rettangolare di ordine n*, avente per *estremi sinistri* i punti $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ e per *estremi destri* i punti $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$, la funzione che vale 1 negli intervalli $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \cdots, (\alpha_n, \beta_n)$ e zero altrove. Diremo poi che una tale funzione *appartiene ad un assegnato intervallo* (α, β), finito o infinito, se si ha $\alpha \leq \alpha_1 < \beta_1 < \cdots < \alpha_n < \beta_n \leq \beta$.

Ciò posto, ecco il teorema che vogliamo dimostrare:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè gli infiniti numeri $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \cdots$ *siano i momenti, relativi all'intervallo finito* (a, b) *di una (ed una sola*[3]*) funzione quasi continua* $f(x)$ *verificante quasi ovunque la limitazione* $0 \leq f(x) \leq 1$, *è che le tre successioni associate alla* $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \cdots$ *godano di una (ed una sola) delle seguenti proprietà*:

A) *siano costituite da numeri tutti positivi*;

B) *siano costituite da numeri tutti nulli*;

C) *esista un intero positivo n tale da aversi*

$$\Delta_0 > 0 \;,\; \Delta_1 > 0, \cdots, \Delta_{n-1} > 0 \;,\; \Delta_n = 0 \;,\; \Delta_{n+1} = \Delta_{n+2} = \cdots = 0,$$

$$\Delta'_1 > 0, \cdots, \Delta'_{n-1} > 0 \;,\; \Delta'_n \geq 0 \;,\; \Delta'_{n+1} = \Delta'_{n+2} = \cdots = 0,$$

$$\Delta''_1 > 0, \cdots, \Delta''_{n-1} > 0 \;,\; \Delta''_n \geq 0 \;,\; \Delta''_{n+1} = \Delta''_{n+2} = \cdots = 0.$$

Nel caso B) *la* $f(x)$ *è quasi ovunque nulla; nel caso* C) *essa coincide quasi ovunque con una ben determinata funzione rettangolare di ordine n, appartenente all'intervallo* (a, b), *con il primo estremo sinistro* $\alpha_1 > a$ *oppure* $= a$ *secondochè* $\Delta'_1 > 0$ *oppure* $= 0$, *con l'ultimo estremo destro* $\beta_n < b$ *oppure* $= b$ *secondochè* $\Delta''_n > 0$ *oppure* $= 0$.

(2) Per l'uguaglianza dei due determinanti scritti, vedi (M), § 1.

(3) Per un noto teorema di Lerch. Si intende che due funzioni si riguardano identiche quando sono quasi ovunque uguali.

Dim. – La necessità della predetta condizione è già stata provata in (M); altrettanto dicasi per quanto afferma il teorema nei casi B), C) (4).

Rimane quindi da provare la sufficienza nel caso A).

Facciamo anzitutto vedere che, comunque si fissi il numero intero e positivo n, si può costruire una ben determinata funzione rettangolare $f_n(x)$, di ordine n e appartenente all'intervallo (a, b), la quale abbia come primi $2n$ momenti i primi $2n$ elementi $\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_{2n-1}$ della successione assegnata. Infatti, in virtù delle $\Delta_0 > 0, \Delta_1 > 0, \cdots, \Delta_{n-1} > 0$, esiste in $(-\infty, +\infty)$ una e una sola funzione rettangolare di ordine n la quale abbia come primi $2n$ momenti $\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_{2n-1}$ (cfr. (M), § 3, teorema IV). Tale funzione risulta appartenente all'intervallo $(a, +\infty)$ in quanto valgono le $\Delta'_1 > 0$, $\Delta'_2 > 0, \cdots, \Delta'_n > 0$ (cfr (M), § 3, teorema V) ed anche all'intervallo $(-\infty, b)$ perchè sussistono le $\Delta''_1 > 0, \Delta''_2 > 0, \cdots, \Delta''_n > 0$ (cfr. (M), § 3, teorema VII).

Immaginando costruita, per ogni n, la funzione $f_n(x)$ di cui sopra, otteniamo in (a, b) una successione di funzioni $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$, ognuna delle quali assume soltanto i valori 0 ed 1 e tali da aversi per $n = 1, 2, 3, \cdots$:

$$\int_a^b x^k f_n(x)\, dx = \mu_k, \qquad (k = 0, 1, \cdots, 2n-1). \tag{5}$$

Posto, per $a \leq x \leq b$:

$$\int_a^x f_n(t)\, dt = F_n(x), \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots), \tag{6}$$

consideriamo in (a, b) la nuova successione

$$F_1(x), F_2(x), \cdots, F_n(x), \cdots \tag{7}$$

costituita da funzioni non negative e non decrescenti.

Le (7) sono equilimitate, perchè $0 \leq F_n(x) \leq F_n(b) = \int_a^b f_n(t)\, dt = \mu_0$, ed equiuniformemente continue (anzi equiuniformemente lipschitziane),

(4) Vedi (M), § 7, teor. I. Qui abbiamo leggermente modificato le notazioni usate in (M) scrivendo Δ'_k, Δ''_k rispettivamente in luogo di $\Delta'_k(a), (-1)^k \Delta''_k(b)$. Vi è inoltre da osservare che, nel citato teorema di (M), sono menzionate certe altre disuguaglianze $\Delta^*_k(a, b) \geq 0$ che, pur essendo essenziali per le questioni ivi trattate, non occorre qui esplicitamente considerare perchè esse sono conseguenze delle $\Delta'_k \geq 0, \Delta''_k \geq 0$.

Il teorema dimostrato in questa Nota ha un precedente in F. HAUSDORFF, *Momentprobleme für ein endliches Intervall*, «Math. Zeits.», Bd. 16, 1923, pp. 220–248 (vedi più particolarmente p. 237), che ha ricavato le condizioni sotto altra forma e con procedimento del tutto diverso dal mio. Mi lusingo di ritenere che il mio teorema risolva la questione in modo assai più semplice e completo che non quello di Hausdorff, e ciò per le ragioni già esposte alla fine del § 7 di (M).

giacchè si ha $|F_n(x'') - F_n(x')| = \left| \int_{x'}^{x''} f_n(t)\,dt \right| \leq x'' - x'$. Per il teorema di Ascoli–Arzelà si può quindi estrarre dalla (7) una successione parziale $F_{h_1}(x), F_{h_2}(x), \cdots, F_{h_\nu}(x), \cdots$ convergente verso una funzione $F(x)$ non negativa, non decrescente e lipschitziana: $|F(x'') - F(x')| \leq x'' - x'$ (5). Tale $F(x)$ ammette quasi ovunque derivata $F'(x) = f(x)$, risultando, ove $f(x)$ è definita, $0 \leq f(x) \leq 1$. Dico che la $f(x)$ così costruita ha come momenti gli infiniti numeri assegnati $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \cdots$.

Si tratta di provare che

$$(8) \qquad \int_a^b x^k\,dF(x) = \mu_k, \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

A tale scopo osserviamo che dalle (5), (6) segue $\int_a^b x^k\,dF_n(x) = \mu_k$ (per $k = 0, 1, \cdots, 2n-1$) e quindi $\lim_{n\to\infty} \int_a^b x^k\,dF_n(x) = \mu_k$ (per $k = 0, 1, 2, \cdots$) ovvero, limitandoci a far percorrere a n la successione $h_1, h_2, \cdots, h_\nu, \cdots$ sopra definita, $\lim_{\nu\to\infty} \int_a^b x^k\,dF_{h_\nu}(x) = \mu_k$ (per $k = 0, 1, 2, \cdots$). Perciò la (8) equivale alla

$$(9) \qquad \lim_{\nu\to\infty} \int_a^b x^k\,d[F_{h_\nu}(x) - F(x)] = 0, \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

Ma integrando per parti si ottiene

$$(10) \qquad \int_a^b x^k\,d[F_{h_\nu}(x) - F(x)] = -k \int_a^b x^{k-1}[F_{h_\nu}(x) - F(x)]\,dx, \quad (k = 0, 1, 2, \cdots),$$

giacchè per ogni n si ha $F_n(a) = 0$, $F_n(b) = \mu_0$ e quindi anche $F(a) = 0$, $F(b) = \mu_0$. Nell'integrale a secondo membro di (10) si può passare al limite (per $\nu\to\infty$) sotto il segno di integrale, perchè $|F_{h_\nu}(x) - F(x)| \leq \mu_0$, ed allora, ricordando che $F_{h_\nu}(x) \to F(x)$ (per $\nu\to\infty$) si ottiene l'asserita (9).

È da notare che, se si applicasse lo stesso procedimento nel caso C), risulterebbe $f_n(x) = f_{n+1}(x) = f_{n+2}(x) = \cdots$ e quindi $f(x) = f_n(x)$.

(5) Per la costruzione della $F(x)$ si può anche applicare il teorema di Helly; cfr. per esempio, A. WINTNER, *Spektraltheorie der unendlichen Matrizen*, Leipzig 1929, p. 81.

Matematica (Analisi). — *Sul comportamento asintotico degli integrali dell'equazione:* $y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=0$ *quando* $\lim_{x\to+\infty} q(x)=+\infty$ (*). Nota I di T. MANACORDA, presentata (**) dal Corrisp. G. SANSONE.

1. Scopo della presente Nota è quello di estendere all'equazione

$$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=0, \tag{1}$$

nella quale in $x_0\leq x<+\infty$, $p(x)$ è funzione continua e limitata di x, $q(x)$ funzione continua, positiva con $\lim_{x\to+\infty} q(x)=+\infty$

(2) $|p(x)|\leq A$, $q(x)>0$, $x_0\leq x<+\infty$, $\lim_{x\to+\infty} q(x)=+\infty$, A costante,

un teorema già noto per gli integrali dell'equazione:

$$y''(x)+q(x)y(x)=0 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} q(x)=+\infty \ (1). \tag{3}$$

Tale teorema può dedursi da quello valido per la (3) quando la (1) sia trasformabile, con un cambiamento della funzione incognita o della variabile, in una equazione del tipo (3). È questa la via seguita da G. Sansone in un suo lavoro destinato alle equazioni del tipo (3) ma in cui estende anche i risultati ottenuti per questo tipo di equazioni a equazioni della forma (1) (2). Noi tuttavia abbiamo trattato l'equazione (1) in modo diretto e in ipotesi meno restrittive per i coefficienti $p(x)$ e $q(x)$ di quelle poste dall'Autore citato nel suo lavoro.

2. CONDIZIONI SUFFICIENTI AD ASSICURARE AGLI INTEGRALI DELLA (1) IL POSSESSO DI INFINITI ZERI. – *Esista una costante* α *positiva tale che per* $x\geq x_0$ *sia*:

$$e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt} \leq \alpha \quad , \quad x_0\leq x<+\infty \ (3). \tag{4}$$

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Matematico dell'Università di Firenze.

(**) Nella seduta del 12 aprile 1947.

(1) Cfr. anche per la bibliografia, G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, vol. II, pp. 56–62, (Bologna, 1941).

(2) G. SANSONE, *Sopra il comportamento asintotico delle soluzioni di una equazione differenziale della dinamica*, in *Scritti matematici offerti a L. Berzolari*, pp. 385-403. In particolare le pp. 402–403.

(3) Questa ipotesi, in particolare verificata se $p(x)$ è non negativo, è più generale di quella posta da Z. BUTLEWSKI, *Sur les Intégrales oscillantes et bornés*, « Ann. Sc. Norm. Pisa » (2), 9, 187–200 (1940), in quanto in tale Nota l'A. suppone l'esistenza del $\lim_{x\to+\infty}\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt<+\infty$, mentre a noi basta che sia $\lim_{x\to+\infty}\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt>-\infty$.

In tali ipotesi tutti gli integrali della (1) *possiedono infiniti zeri.*

Cominciamo con l'osservare che per $x \geq x_0$ i massimi e i minimi relativi degli integrali della (1), se esistono, sono rispettivamente positivi e negativi. In un punto estremante è infatti $y' = 0$, e, dalla (1), $y'' = -qy$. Perciò, essendo $q(x) > 0$ per $x \geq x_0$, se $y > 0$, $y'' < 0$, e il punto è di massimo, mentre se $y < 0$, $y'' > 0$ e il punto è di minimo.

Ciò premesso, supponiamo per assurdo che per $x \geq x_0$ sia $y(x) > 0$ $[y(x) < 0]$. Esisterà quindi al più un punto $\bar{x} \geq x_0$ di massimo (minimo) e si potrà trovare un x_1 tale che per $x \geq x_1$ sia contemporaneamente:

$$(5) \qquad y(x) > 0 \,,\, y'(x) > 0 \qquad [y(x) < 0 \,,\, y'(x) < 0],$$

ovvero

$$(5') \qquad y(x) > 0 \,,\, y'(x) < 0 \qquad [y(x) < 0 \,,\, y'(x) > 0].$$

Esaminiamo separatamente i due casi.

Sia verificata la (5) e poniamo:

$$(6) \qquad \lim_{x \to +\infty} y(x) = a > 0.$$

Sia a finito. Fissato un numero $\sigma > 0$, esiste allora un x_2 tale che per $x \geq x_2$ è $y(x) \geq a - \sigma$, e potremo scegliere σ in modo che sia $b = a - \sigma > 0$. La (1) può scriversi:

$$(1') \qquad \frac{d}{dx}(\vartheta y') = -\vartheta(x)\, q(x)\, y(x) \quad , \quad \vartheta(x) = e^{\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt}$$

e per $x \geq x_2$ è $\frac{d}{dx}(\vartheta y') < 0$, esiste quindi una costante B tale che per $x \geq x_2$ $0 < \vartheta y' \leq B$, e quindi:

$$(7) \qquad 0 < y'(x) \leq \alpha B.$$

Dalla (1) allora:

$$y''(x) = -p(x)\, y'(x) - q(x)\, y(x) \leq -p(x)\, y'(x) - bq(x),$$

e per la ipotesi $\lim_{x \to +\infty} q(x) = +\infty$, e per essere $p(x)$ e $y'(x)$ limitate per le (2) e (7), fissata comunque una costante $K > 0$ esiste un x_3 tale che per $x \geq x_3$ è:

$$y''(x) < -K \quad , \quad x_3 \leq x < +\infty.$$

Ma allora:

$$y'(x) = y'(x_3) + \int_{x_3}^{x} y''(x)\,dx \leq y'(x_3) - K(x - x_3),$$

da cui $\lim_{x \to +\infty} y'(x) = -\infty$ contro la (5). Analogo ragionamento se $a = +\infty$.

Dimostriamo adesso che anche la (5') è assurda.

Confrontiamo la (1) con l'equazione ausiliaria:

$$\zeta''(x) + 2l\zeta'(x) + m^2\zeta(x) = 0, \tag{8}$$

in cui l ed m sono due costanti positive soddisfacenti alle condizioni $p(x) \leqq 2l$, $l < m$. Fissate l ed m, si può crescendo al più x_1 fare in modo che per $x \geqq x_1$ sia $q(x) \geqq m^2$. Nelle nostre condizioni la (8) ha l'integrale $\zeta(x) = ce^{-lx}\operatorname{sen}(\nu x + k)$, c e k costanti arbitrarie, $\nu^2 = m^2 - l^2$. Moltiplicando la (1) per ζ, la (8) per y e sottraendo si ha:

$$\frac{d}{dx}(\zeta' y - y'\zeta) + 2l(\zeta' y - y'\zeta) = (p(x) - 2l)y'\zeta + (q(x) - m^2)y\zeta,$$

da cui:

$$\zeta' y - y'\zeta = y^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{\zeta}{y}\right) = e^{-2lx}\left\{\int_{x_2}^{x} e^{2lt}[(p(t) - 2l)y'\zeta + (q(t) - m^2)y\zeta]\,dt + C\right\}, \tag{9}$$

$$C = \zeta'(x_1)y(x_1) - y'(x_1)\zeta(x_1).$$

Scegliendo tra tutti gli integrali della (8) quello che soddisfa alle condizioni: $\zeta(x_1) = y(x_1) > 0$, $\zeta'(x_1) = y'(x_1)$ è $C = 0$, e, per le ipotesi fatte, il secondo membro della (9) risulta positivo fino a quando ζ è non negativa. Poichè $\dfrac{\zeta(x_1)}{y(x_1)} = 1$, sarà quindi $\zeta(x) \geqq y(x) > 0$ per $x \geqq x_1$ e $\zeta(x) \geqq 0$. Ma $\zeta(x)$ si annulla certamente in un punto almeno compreso tra x_1 e $x_1 + \dfrac{\pi}{\nu}$, e quindi esiste certamente un valore $\bar{x} < x_1 + \dfrac{\pi}{\nu}$ per cui $y(\bar{x}) = 0$.

Rimane così dimostrato che nella nostra ipotesi ogni integrale della (1) possiede infiniti zeri.

3. LIMITAZIONI PER L'INTERVALLO TRA UN PUNTO DI ZERO DI $y(x)$ E UNO DI $y'(x)$. - *La funzione* $p(x)$ *sia continua, non negativa e limitata, la funzione* $q(x)$ *continua, positiva e non decrescente*:

$$0 \leqq p(x) \leqq 2l\ ,\ l \text{ costante}\ ,\ 0 < q(x)\ ,\ \lim_{x \to +\infty} q(x) = +\infty\ ,\ x_0 \leqq x < +\infty. \tag{10}$$

Siano x_{2n-1} e x_{2n} $(n = 1, 2, \cdots)$ rispettivamente le ascisse dei punti di zero ed estremanti di un integrale $y(x)$ della (1) (cfr. n° 2). *Vogliamo mostrare che nelle ipotesi* (10) *esiste un* n_1 *tale che per* $n \geqq n_1$ *sussistono le disuguaglianze*:

$$\frac{\pi - 2b_n}{2\sqrt{q(x_{2n}) - l^2}} < x_{2n} - x_{2n-1} < \frac{\pi}{2\sqrt{q(x_{2n-1})}},$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{q(x_{2n+1})}} < x_{2n+1} - x_{2n} < \frac{\pi + 2b_n}{2\sqrt{q(x_{2n}) - l^2}}, \tag{11}$$

$$b_n = \operatorname{arctg}\frac{l}{\sqrt{q(x_{2n}) - l^2}}\ 0 \leqq b_n < \frac{\pi}{2}.$$

Consideriamo, accanto alla (1), le due equazioni:

$$(12_1) \quad u''(x) + m^2 u(x) = 0 \quad , \qquad (12_2) \quad v''(x) + 2lv'(x) + m^2 v(x) = 0 ,$$

in cui l è la costante che figura nelle (10), mentre m è una costante positiva *a priori* arbitraria.

Moltiplicando la (1) per u e la (12_1) per y e sottraendo si ha:

$$(13) \quad \frac{d}{dx}(y'u - u'y) = -p(x)y'(x)u(x) - (q(x) - m^2)y(x)u(x).$$

Integrando tra x_{2n-1} ed x e ponendo

$$(14) \quad u(x) = \frac{y'(x_{2n-1})}{m} \operatorname{sen} m(x - x_{2n-1}) \quad , \quad m^2 = q(x_{2n-1}),$$

cosicchè $u(x_{2n-1}) = y(x_{2n-1}) = 0$, $u'(x_{2n-1}) = y'(x_{2n-1})$, si ottiene:

$$y'(x)u(x) - u'(x)y(x) = u^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{u}\right) = \int_{x_{2n-1}}^{x} \{[m^2 - q(t)]u(t)y(t) - p(t)y'(t)u(t)\}\,dt.$$

Senza alterare le generalità possiamo prendere $y'(x_{2n-1}) > 0$, cosicchè è $y'(x) \geqq 0$, $y(x) \geqq 0$, $x_{2n-1} \leqq x \leqq x_{2n}$ e $u(x) > 0$ in un intorno a destra di x_{2n-1}.

Ciò porta per le ipotesi fatte, $\left(\frac{y}{u}\right)' < 0$ in un intorno a destra di x_{2n-1}, ed essendo $\lim_{x \to x_{2n-1}} \frac{y(x)}{u(x)} = 1$, $y(x) \leqq u(x)$ per $x_{2n-1} \leqq x$ e finchè $u(x) \geqq 0$, e che quindi $u(x_{2n}) > 0$. Ponendo allora nell'ultima relazione scritta $x = x_{2n}$ e tenuto conto della (14) e della (10)

$$-y'(x_{2n-1})y(x_{2n})\cos m(x_{2n} - x_{2n-1}) =$$

$$= \int_{x_{2n-1}}^{x_{2n}} \{[m^2 - q(t)]u(t)y(t) - p(t)y'(t)u(t)\}\,dt < 0$$

e quindi:

$$x_{2n} - x_{2n-1} < \frac{\pi}{2\sqrt{q(x_{2n-1})}} .$$

Ponendo invece nella (13) $u(x) = y(x_{2n})\cos m(x - x_{2n})$ e $m^2 = q(x_{2n+1})$ con un ragionamento del tutto analogo si trova che

$$x_{2n+1} - x_{2n} > \frac{\pi}{2\sqrt{q(x_{2n+1})}} .$$

Moltiplichiamo invece adesso la (1) per $v(x)$, la (12_2) per $y(x)$ e sottraiamo. Si ottiene

$$(15) \quad \frac{d}{dx}(y'v - v'y) + 2l(y'v - v'y) = [2l - p(x)]y'v + [m^2 - q(x)]yv.$$

È sempre possibile trovare un n_1 tale che per $n \geq n_1$ sia $q(x_{2n}) > l^2$. Ponendo allora nella (12_2) $m^2 = q(x_{2n})$, e nella (15)

$$v(x) = \frac{y'(x_{2n-1})}{\nu} e^{-l(x-x_{2n-1})} \operatorname{sen} \nu (x - x_{2n-1}) \quad , \quad \nu^2 = q(x_{2n}) - l^2$$

e integrando tra x_{2n-1} e x:

$$y'(x)\, v(x) - v'(x)\, y(x) = \nu^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{v}\right) =$$

$$= e^{-2lx} \int_{x_{2n-1}}^{x} e^{2lt} [(m^2 - q(t))\, yv + (2l - p(t))\, y'\, v]\, dt .$$

Supponendo al solito $y'(x_{2n-1}) > 0$, si vede che nelle nostre ipotesi il secondo membro è positivo in un intorno a destra di x_{2n-1}. La funzione $v(x)$ si annulla in x_{2n-1} ed ha il suo successivo zero in $x_{2n-1} + \frac{\pi}{\sqrt{q(x_{2n}) - l^2}}$. Se $x_{2n} < x_{2n-1} + \frac{\pi}{\sqrt{q(x_{2n}) - l^2}}$, ponendo nell'ultima relazione scritta $x = x_{2n}$ si ha

$$-\frac{y(x_{2n})\, y'(x_{2n-1})}{\nu} e^{-l(x_{2n}-x_{2n-1})} \{-l \operatorname{sen} \nu (x_{2n} - x_{2n-1}) + \nu \cos \nu (x_{2n} - x_{2n-1})\} =$$

$$= e^{-2lx_{2n}} \int_{x_{2n-1}}^{x_{2n}} e^{2lt} \{[m^2 - q(t)]\, yv + [2l - p(t)]\, y'\, v\}\, dt > 0$$

ciò che porta:

$$\cos [\nu (x_{2n} - x_{2n-1}) + b_n] < 0 \quad , \quad 0 \leq b_n = \operatorname{arctg} \frac{l}{\sqrt{q(x_{2n}) - l^2}} < \frac{\pi}{2}$$

e quindi:

$$x_{2n} - x_{2n-1} > \frac{\pi - 2\, b_n}{2\sqrt{q(x_{2n}) - l^2}} .$$

Se invece $x_{2n} > x_{2n-1} + \frac{\pi}{\sqrt{q(x_{2n}) - l^2}}$, risulta immediatamente vera la precedente disuguaglianza.

Se infine nella (15) si pone

$$v(x) = \sqrt{\frac{q(x_{2n})}{q(x_{2n}) - l^2}}\, y(x_{2n})\, e^{-l(x-x_{2n})} \cos [\nu (x - x_{2n}) - b_n]$$

con un ragionamento del tutto analogo si ottiene che in tutto l'intervallo (x_{2n}, x_{2n+1}) è $y(x) \leq v(x)$, e che quindi

$$x_{2n+1} - x_{2n} < \frac{\pi + 2\, b_n}{2\sqrt{q(x_{2n}) - l^2}} .$$

Le disuguaglianze (11) sono così tutte dimostrate.

Matematica. — *Sulla definizione assiomatica dell'area di una superficie rettificabile.* Nota di G. STAMPACCHIA, presentata (*) dal Corrisp. R. CACCIOPPOLI.

Nella prefazione di una sua memoria (1) il Caccioppoli prospetta la questione di risalire alla definizione assiomatica, dell'area di una superficie. In tale prefazione viene poi enunciata, senza dimostrazione, questa proposizione: *se si ammette che nel sommare due superficie saldandole lungo una linea rettificabile appartenente ai loro orli le aree si sommino, non vi è per le superficie rettificabili che una definizione di area (che si riduca beninteso a, quella elementare sulle superficie poliedriche* (2)*), ottemperante alla condizione della semicontinuità inferiore.*

La questione è stata ripresa da Zwirner e del tutto recentemente da Scorza Dragoni (3) per classi di superficie che si possano scomporre in un numero finito o in una infinità numerabile di parti rappresentabili nella forma:

$$z = f(x, y)$$

ove questa funzione è sottoposta ad ipotesi di derivabilità nel lavoro del primo e ad ipotesi più vaste di assoluta continuità (nel senso di Tonelli) nel lavoro del secondo. Rimane quindi ancora aperta la questione, e dietro suggerimento dello stesso prof. Caccioppoli, mi propongo di dimostrare l'enunciato sopra riportato. La ricerca contiene evidentemente quella di Zwirner, ma non quella di Scorza Dragoni da cui si differenzia per la diversità delle classi di superficie che si considerano.

1. Per quanto riguarda la definizione e la caratterizzazione delle superficie rettificabili rimandiamo al fondamentale lavoro di Lebesgue (4); ricordiamo qui brevemente che dicesi *rettificabile* una superficie di equazioni parametriche:

$$(1) \qquad x = x(u, v) \quad , \quad y = y(u, v) \quad , \quad z = z(u, v)$$

variando (u, v) in un dominio (5) connesso D, se ad ogni curva rettificabile del piano (u, v) corrisponde sulla superficie una curva rettifiticabile (è ovvio

(*) Nella seduta del 12 aprile 1947.

(1) *Trasformazioni piane, superficie quadrabili, integrali di superficie,* « Rend. Circ. Mat. di Palermo » t. LIV (1930).

(2) *e che si conservi per congruenze.*

(3) G. ZWIRNER, *Sulla definizione d'area di una superficie,* « Atti Ist. Veneto di Sc. », to. XCVII, parte II; G. SCORZA DRAGONI, *Sulla definizione assiomatica dell'area di una superficie,* « Rend. Sem. Mat. di Padova » (XV), 1946.

(4) H. LEBESGUE, *Integrale, longuer, aire,* « Annali di matematica », ser. III, t. VII (1902), p. 315.

(5) Supporremo il dominio limitato da curve semplici di Jordan, rettificabili.

che questa proprietà dipende dalla rappresentazione adottata) e che perchè una superficie sia rettificabile occorre che le funzioni (1) siano a rapporti incrementali limitati.

È noto che ogni siffatta superficie ammette, in ogni punto ad eccezione di un insieme che si proietta sui tre piani coordinati in tre insiemi di misura nulla, un ben determinato piano tangente e ciò è conseguenza del fatto che le funzioni (1) risultano quasi dappertutto differenziabili in D [6].

Consideriamo allora in D la funzione:

$$W(u,v) = \sqrt{\left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^2}$$

che risulta quasi continua essendo tali le derivate $x_u, x_v, y_u, y_v, z_u, z_v$ ed il cui integrale esteso al dominio D fornisce l'espressione dell'area secondo Lebesgue della superficie (1). Poichè quasi dappertutto la funzione $W(u,v)$ non è nulla e quasi ovunque sono differenziabili le funzioni (1), per ogni n intero positivo è possibile determinare un insieme chiuso E_n ove le derivate x_u, x_v, ecc. risultano tutte continue, $W(u,v) > 0$ e le funzioni $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ risultano differenziabili, essendo inoltre:

$$\text{mis}(D - E_n) < \frac{1}{n}.$$

Pertanto per ogni punto $P_0 \equiv (u_0, v_0)$ di E_n, detto m_n il minimo positivo di $W(u,v)$ in E_n, in relazione al numero $\nu_n = \frac{m_n}{n}$ è possibile determinare un intorno quadrato contenuto in D (con i lati paralleli agli assi u e v) di lato δ_n così piccolo che detto $P \equiv (u,v)$ un punto appartenente ad esso si abbia:

$$(3)\quad \begin{cases} |x(u,v) - x(u_0,v_0) - x_u(u_0,v_0)(u-u_0) - x_v(u_0,v_0)(v-v_0)| < \nu_n \overline{PP}_0 \\ |y(u,v) - y(u_0,v_0) - y_u(u_0,v_0)(u-u_0) - y_v(u_0,v_0)(v-v_0)| < \nu_n \overline{PP}_0 \\ |z(u,v) - z(u_0,v_0) - z_u(u_0,v_0)(u-u_0) - z_v(u_0,v_0)(v-v_0)| < \nu_n \overline{PP}_0 \end{cases}$$

e nel punto della superficie (1) corrispondente a P_0 esiste il piano tangente.

Per un noto lemma geometrico di Vitali, per ogni $r_n \geq n$ è possibile scegliere p punti di E_n: $P_1, P_2, \cdots, P_p$ e in corrispondenza p quadrati: $T_1(P_1), T_2(P_2), \cdots, T_p(P_p)$ non sovrapponentisi, scelti fra i precedenti, in modo che:

$$\text{mis}\left(E_n - E_n \cdot \sum_{s=1}^{p} T_s\right) < \frac{1}{r_n}$$

e quindi

$$\text{mis}(D - \Sigma T_s) < \frac{1}{n} + \frac{1}{r_n} \quad ; \quad \text{mis}(\Sigma T_s - E_n \cdot \Sigma T_s) < \frac{1}{n}.$$

(6) H. RADEMACHER, *Ueber partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variabeln*, «Math. Annalen», band. 81 (1920), p. 59; T. RADÒ, *Ueber das Flächenmass rektifizierbarer Flächen*, «Math. Annalen», band. 100 (1928), pp. 445-479.

Per ogni punto $P_i \equiv (u_i, v_i)$, consideriamo le trasformazioni:

$$(1)\quad \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} x = x_i + x_u(u-u_i) + x_v(v-v_i) \\ y = y_i + y_u(u-u_i) + y_v(v-v_i) \\ z = z_i + z_u(u-u_i) + z_v(v-v_i) \end{cases}$$

per u, v variabile in $T_i(P)_i$ ove (x_i, y_i, z_i) è il punto corrispondente nella (1) a P_i. A $T_i(P_i)$ corrisponde per la (1) una porzione di superficie S_i e per la (2) un parallelogramma Σ_i appartenente al piano tangente, ed a causa della ricordata differenziabilità la distanza fra due punti corrispondenti allo stesso punto di $T_i(P_i)$ è per le (3) minore di $\sqrt{3}\,\nu_n\,\overline{PP_i}$.

2. Sia ora $\varphi(s)$ un funzionale definito per ogni superficie rettificabile che sia additivo, cioè tale che per ogni decomposizione di S in parti $S^{(1)}$, $S^{(2)}, \cdots$, delimitate da curve rettificabili, si abbia:

$$\varphi(S) = \sum_i \varphi\left(S^{(i)}\right)$$

che assuma valori uguali su superficie congruenti (7) e che sia semicontinuo inferiormente (8). Indichiamo poi con $\Phi(S)$ il funzionale area secondo Lebesgue, che, come abbiamo detto, è dato dall'integrale della funzione $W(u,v)$. Supponiamo inoltre che sulle superficie poliedriche si abbia $\varphi(S) = \Phi(S)$. A causa della definizione stessa di $\Phi(S)$ risulta:

$$\varphi(S) \leq \Phi(S).$$

Vogliamo dimostrare che nelle ipotesi ammesse è necessariamente:

$$\varphi(S) = \Phi(S).$$

3. Supponiamo allora, per assurdo, che esista una superficie rettificabile ed un numero λ^* minore di 1 per cui

$$\varphi(S_0) \leq \lambda^* \Phi(S_0).$$

Sia D il dominio base di una rappresentazione parametrica del tipo (1) con le funzioni $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ a rapporti incrementali limitati; ripetiamo allora su S_0 le considerazioni fatte nel n. 1. Con le stesse notazioni adottate si ha:

$$\sum_{i=1}^{p} \{\Phi(\Sigma_i) - \Phi(S_i)\} = \sum_{i=1}^{p} \iint_{T_i(P_i)} [W(u_i, v_i) - W(u,v)]\, du\, dv =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \iint_{E_n T_i(P_i)} [W(u_i, v_i) - W(u,v)]\, du\, dv + \sum_{i=1}^{p} \iint_{T_i - E_n T_i} W(u_i, v_i)\, du\, dv - \iint_{\Sigma T_i - E_n \Sigma T_i} W(u,v)\, du\, dv.$$

(7) Diremo congruenti due superficie quando si passa dall'una all'altra mediante le formule di cambiamento di coordinate.

(8) Cioè tale che per ogni $\eta > 0$ è possibile determinare un $\delta > 0$ in modo che sia $\varphi(S_1) > \varphi(S) - \eta$ per tutte le superficie rettificabili S_1 che appartengono all'intorno δ di S, intendendo che i punti corrispondenti agli stessi valori di (u, v) (riferiti allo stesso dominio base) distino per meno di δ.

Prefissato $\varepsilon > 0$ impiccolendo, se occorre, δ_n, a causa della continuità della funzione $W(u, v)$ in E_n, il primo integrale può rendersi in modulo minore di $\varepsilon \operatorname{mis} D$ e l'ultimo prendendo, se occorre, n più grande può rendersi minore di $\varepsilon \operatorname{mis} D$ e quindi

$$\sum_{i=1}^{p} \{\Phi(\Sigma_i) - \Phi(S_i)\} \geq -2\varepsilon \operatorname{mis} D .$$

D'altra parte, prendendo r_n ancora più grande si ha;

$$\Phi(S_0) - \sum_i \Phi(S_i) = \iint_{D - \Sigma T_i} W(u, v)\, du\, dv \leq \varepsilon \operatorname{mis} D .$$

Si deduce allora facilmente che

$$\varphi(S_0) \leq \lambda \sum_{i=1}^{p} \Phi(\Sigma_i)$$

essendo λ un numero interno all'intervallo $(\lambda^*, 1)$, infatti:

$$\lambda \sum_{i=1}^{p} (\Sigma_i) \geq \lambda \sum_{i=1}^{p} \Phi(S_i) - 2\lambda\varepsilon \operatorname{mis} D \geq \lambda\Phi(S_0) -$$
$$- 3\lambda\varepsilon \operatorname{mis} D > \lambda\Phi(S_0) - (\lambda - \lambda^*)\Phi(S_0) \geq \varphi(S_0)$$

se $(\lambda - \lambda^*)\Phi(S_0) > 3\lambda\varepsilon \operatorname{mis} D$.

Poichè in base alle considerazioni precedenti D è stato decomposto negli insiemi:

$$T_1(P_1), T_2(P_2), \cdots, T_p(P_p) \quad ; \quad D - \sum_{i=1}^{p} T_i(P_i)$$

la superficie S_0 conseguentemente sarà divisa in $p + 1$ porzioni a bordi rettificabili (le prime p coincidenti con $S_1, S_2, \cdots, S_p$) ed a causa della supposta additività.

$$\sum_{i=1}^{p} \varphi(S_i) \leq \varphi(S_0)$$

e quindi

$$\sum_{i=1}^{p} \varphi(S_i) \leq \lambda \sum_{i=1}^{p} \Phi(\Sigma_i)$$

allora esiste di certo un indice i (prendiamo il più piccolo) per cui

$$\varphi(S_i) \leq \lambda\Phi(\Sigma_i)$$

4. Congiungiamo ora il bordo di S_i con il bordo di Σ_i con una superficie rettificabile; e ciò si ottiene congiungendo i punti corrispondenti agli stessi punti dei lati di $T_i(P_i)$ mediante le (1) e le (2) (9).

(9) Ciò discende dal fatto che se due curve $C_1 \equiv \{x = x_1(t), y = y_1(t), z = z_1(t)\}$ e $C_2 \equiv \{x = x_2(t), y = y_2(t), z = z_2(t)\}$ $a \leq t \leq b$, sono definite da funzioni a rapporti incrementali limitati, la superficie K che si ottiene congiungendo i punti delle due curve corrispondenti allo stesso valore del parametro t è rettificabile: infatti le funzioni che definiscono tale superficie nel dominio base $a \leq t \leq b$, $0 \leq s \leq 1$

$x = x_1(t) + [x_2(t) - x_1(t)]s$, $y = y_1(t) + [y_2(t) - y_1(t)]s$, $z = z_1(t) + [z_2(t) - z_1(t)]s$

Detta K_i la superficie laterale, si ha:

$$\Phi(K_i) \leq 2\sqrt{2}\, L \cdot 4\,\delta_n \cdot \sqrt{3}\,\nu_n \frac{\delta_n}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{3}\, L\, \delta_n^2 \nu_n \tag{4}$$

essendo L la costante di Lipschitz delle funzioni (1) [10].

5. Facciamo crescere n ed in corrispondenza consideriamo la successione delle porzioni di superficie come S_i e Σ_i, siano esse s_n e σ_n e sia k_n la corrispondente superficie laterale, diciamo poi c_n la calotta composta da s_n e da σ_n. Sul quadrato V: $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ riportiamo allora un certo numero q_n di parallelogrammi uguali a σ_n in modo che l'area complessiva sia maggiore di $\frac{1}{4}$ (ciò che è possibile perchè i lati di σ_n sono infinitesimi). Su ciascuno di questi parallelogrammi adattiamo una calotta congruente a e_n e sostituiamo σ_n con la calotta; otteniamo in tal modo ovviamente una superficie rettificabile V_n che appartiene ad un intorno $\sqrt{3}\,\nu_n\,\delta_n$ del quadrato V. Si ha allora;

$$1 - \varphi(V_n) = q_n [\varphi(\sigma_n) - \varphi(c_n)] = q_n [\varphi(\sigma_n) - \varphi(s_n) - \varphi(k_n)] =$$

$$= q_n \varphi(\sigma_n) \left[1 - \frac{\varphi(s_n)}{\varphi(\sigma_n)} - \frac{\varphi(k_n)}{\varphi(\sigma_n)}\right] \geq \frac{1}{4}\left[1 - \lambda - \frac{\varphi(k_n)}{\varphi(\sigma_n)}\right]$$

ma d'altra parte per la (4)

$$\varphi(k_n) \leq \Phi(k_n) \leq 4\sqrt{3}\, L\, \delta_n^2 \nu_n$$

e

$$\varphi(\sigma_n) = \Phi(\sigma_n) \geq m_n\, \delta_n^2$$

da cui

$$\frac{\varphi(k_n)}{\varphi(\sigma_n)} \leq 4\sqrt{3}\, L \frac{\nu_n}{m_n} = \frac{4\sqrt{3}\, L}{n} < \frac{1-\lambda}{2} \quad \text{se} \quad n > \bar{n}$$

e quindi

$$1 - \varphi(V_n) > \frac{1-\lambda}{8} > 0,$$

contro la supposta semicontinuità inferiore del funzionale.

sono a rapporti incrementali limitati. Ora ciò si verifica per i bordi di S_1 e di Σ_1 corrispondenti alle curve del piano (u, v): $u = \text{cost}$, $v = \text{cost}$.

(10) Riferendoci alle notazioni della nota precedente, dividiamo l'intervallo (a, b) in r parti uguali e consideriamo le poligonali π'_r e π''_r corrispondenti rispettivamente inscritte nelle due curve C_1 e C_2. Congiungiamo poi i vertici che si corrispondono sulle due curve e dividiamo ciascun quadrilatero (sghembo) in due triangoli. Otteniamo in tal modo una superficie poliedrica che al crescere di r tende evidentemente alla superficie K; si ha allora con facili maggiorazioni (se $r > \bar{r}$):

$$\text{area } k_n \leq \frac{1}{2}(\pi'_r + \pi''_r)\, d \leq \frac{1}{2}(\text{lung. } C_1 + \text{lung. } C_2)\, d \leq \sqrt{2}\, L\, d\, (b - a).$$

essendo d la massima distanza fra i punti corrispondenti delle due curve e L la costante di Lipschitz delle funzioni $x_1(t), y_1(t), z_1(t), x_2(t), y_2(t), z_2(t)$.

(Nel nostro caso $d = \sqrt{3}\,\nu_n\,\delta_n$ e $b - a = 4\,\delta_n$).

Geometria (Geometria differenziale). — *Sulle superficie di terzo ordine aventi un punto doppio biplanare o uniplanare.* Nota di F. CARBONE, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

1. Sia F una superficie di terzo ordine avente un punto doppio biplanare O. Collocando in questo punto l'origine d'un sistema di coordinate proiettive x, y, z ed assumendo come piani xz, yz i due piani in cui si spezza il cono quadrico tangente ad F in O, l'equazione di F assume la forma:

$$(1) \qquad xy = \varphi_3(x, y) + \varphi_2(x, y)z + \varphi_1(x, y)z^2 + \varphi_0 z^3,$$

ove

$$\varphi_h = a_{h0}x^h + ha_{h-1,1}x^{h-1}y + \cdots a_{0h}y^h \qquad (h = 3, 2, 1, 0)$$

Supponiamo in primo luogo $\varphi_0 \neq 0$ sicchè la retta $x = y = 0$ non sta su F ed ha con F tre soli punti comuni che cadono in O. Un piano generico passante per O sega F in una curva avente in O un punto doppio a tangenti distinte, mentre i piani $y = \lambda x$ dànno ∞^1 sezioni piane cuspidate di F rappresentate dalle equazioni:

$$(2) \qquad y - \lambda x = \varphi_3(1, \lambda)x^3 + \varphi_2(1, \lambda)x^2 z + \varphi_1(1, \lambda)xz^2 + \varphi_0 z^3 - \lambda x^2 = 0.$$

E le equazioni:

$$y = \lambda x \quad , \qquad \lambda x^2 = \varphi_0 z^3 + \varphi_1(1, \lambda)xz^2$$

definiscono un E_7 cuspidale, variabile con λ ed al quale è associata la retta (1):

$$y - \lambda x = (a_{10} + a_{01}\lambda)x + 3\varphi_0 z = 0.$$

Al variare di λ, tale retta descrive il piano:

$$a_{10}x + a_{01}y + 3\varphi_0 z = 0$$

non passante per l'asse z; assumendo questo come nuovo piano $z = 0$, risulterà $a_{10} = a_{01} = 0$.

Consideriamo ora la cubica sezione di F col piano anzidetto:

$$xy = \varphi_3(x, y);$$

la sua retta dei flessi ha per equazione: $3a_{21}x + 3a_{12}y = 1$; poichè essa non passa per O, potremo assumerla come nuova retta impropria del piano $z = 0$. Dopo di ciò risulterà $a_{21} = a_{12} = 0$.

(*) Nella seduta del 12 aprile 1947.

(1) E. BOMPIANI, *Elementi differenziali regolari e non regolari nel piano e loro applicazione alle curve algebriche piane.* « Rend. di matematica e delle sue applicazioni », 1946, p. 7.

Inoltre l'intersezione della tangente cuspidale e della tangente di flesso della cubica (2), tenendo conto delle semplificazioni già sinora introdotte, è il punto $z_0 = \frac{\lambda}{\varphi_2(1,\lambda)}$ dell'asse z; ponendo $z_0 = \frac{1}{2k}$, si ottiene la relazione:

$$a_{20} + 2a_{11}\lambda + a_{02}\lambda^2 = 2k\lambda,$$

la quale pone una proiettività tra i punti $k = \frac{1}{2z_0}$ della tangente cuspidale e le coppie di un'involuzione tra i piani $y = \lambda x$ passanti per essa. I valori di k corrispondenti ai piani uniti dell'involuzione sono forniti dall'equazione:

$$(a_{11} - k)^2 - a_{20}a_{02} = 0;$$

ad essi corrispondono sulla tangente cuspidale i due punti z_0', z_0'' di coordinate

$$\left(0, 0, \frac{1}{2\left(a_{11} \pm \sqrt{a_{20}a_{02}}\right)}\right);$$

prendendo allora come punto all'infinito dell'asse z il coniugato armonico di O rispetto a z_0', z_0'', dovrà risultare $z_0' + z_0'' = 0$, e quindi $a_{11} = 0$. Scegliendo poi i due piani uniti or ora considerati come piani $y = \pm x$, ed i punti ad essi corrispondenti come punti $(0, 0, \pm 1)$, risulterà $a_{02} = a_{20}$ ed $a_{02}a_{20} = \frac{1}{4}$, onde $a_{02} = a_{20} = \frac{1}{2}$. Imponiamo infine alla quadrica

$$x^2 + y^2 + 6\varphi_0 z^2 = 0,$$

che è la quadrica polare del punto all'infinito dell'asse z, di contenere il punto unità (il quale sta già sul piano unito $y = x$ e sul piano che proietta il punto ad esso omologo dalla retta $z = t = 0$); sarà allora $\varphi_0 = -\frac{1}{3}$. Una tale scelta del punto unità è possibile in quattro modi diversi. In definitiva, abbiamo determinato un sistema di coordinate collegato ad F in modo proiettivamente invariante e per mezzo del quale l'equazione di F si riduce alla forma:

$$(3) \qquad 6xy = 6a_{30}x^3 + 6a_{03}y^3 + 3(x^2 + y^2)z - 2z^3.$$

I coefficienti a_{30}, a_{03} sono due invarianti proiettivi di F. Dunque: *Una* F^3 *a punto doppio biplanare* O, *quando la retta comune ai due piani ad essa tangenti in* O *non sta su* F^3, *possiede due invarianti proiettivi; due* F^3 *del tipo anzidetto che abbiano i medesimi invarianti sono omografiche in quattro modi diversi.*

Il significato geometrico degli invarianti a_{30}, a_{03} risulta intersecando le quadriche polari dei punti all'infinito degli assi x, y coi loro piani tangenti in O; infatti oltre la retta $x = y = 0$, si trovano così le due rette:

$$y = 3a_{30}x + z = 0 \quad , \quad x = 3a_{03}y + z = 0.$$

2. Supponiamo in secondo luogo che la retta comune ai due piani tangenti ad F^3 in O abbia con F in O incontro quadripunto, e quindi stia su F^3. Sarà $\varphi_0 = 0$. Assumendo nuovamente i piani tangenti nel punto biplanare come $x = 0$, $y = 0$, l'equazione di F si scrive:

$$xy = \varphi_3(x, y) + \varphi_2(x, y)\, z + \varphi_1(x, y)\, z^2 .$$

Su ciascuno dei due piani tangenti in O esistono, oltre la tangente comune, due rette uscenti da O ed appartenenti ad F; assumerle come asse x e retta unità sul piano yz, asse y e retta unità sul piano xz equivale a porre: $a_{30} = a_{03} = 0$, $a_{20} = -a_{10}$, $a_{02} = -a_{01}$.

Il piano $z = 0$, sega F, oltre che negli assi x e y, nella retta:

$$3\, a_{21}\, x + 3\, a_{12}\, y = 1$$

che, non passando per O, può essere scelta come retta impropria di tale piano, da cui $a_{21} = a_{12} = 0$. Il generico piano per essa, $z = h$, sega ulteriormente F^3 in una conica che si spezza quando è

$$h\,(a_{10} + a_{01} + 2\, a_{11}) = 1 ;$$

scelto il corrispondente piano come improprio, risulta $2\, a_{11} = -(a_{10} + a_{01})$. La retta $x = y = z$ incontra F^3 in un solo punto distinto da O, se lo si prende come punto unità si ha: $a_{10} + a_{01} = -1$. Chiamando m il coefficiente a_{10}, la superficie assume la notevole espressione:

$$xy = (mx - my - y)\,(z - x - y)\, z .$$

La retta impropria del piano $x = z$ incontra le quattro rette $x = z = 0$, $x - z = y = 0$, $x = y = z$ e $1 = (1 + m)\, y - mz$ (l'unica non per O segata su F dal piano $x = z$) in quattro punti il cui birapporto

$$\left(\infty, 0, 1, \frac{m}{1 + m}\right) = \frac{m}{1 + m}$$

dà il significato geometrico dell'unico invariante della superficie.

3. Sia F una superficie del terzo ordine con punto doppio uniplanare O: un piano generico per esso sega F in una cubica con cuspide in O, ma esistono tre fasci di piani che la segano ciascuno in una curva spezzata in una retta (asse del fascio), tangente ad F in O, e in una conica ivi tangente alla retta.

Assumendo il piano in cui degenera il cono quadrico tangente in O come piano xy e le tre tangenti singolari come asse x, asse y e retta unità del detto piano, l'equazione di F assume la forma:

$$z^2 = a\,(x - y)\, xy + \varphi_2(x, y)\, z + \varphi_1(x, y)\, z^2 + \varphi_0\, z^3 ,$$

dove φ_h è, al solito, una forma di grado h.

In ciascuno dei detti fasci esiste però un piano segante F in una curva doppiamente spezzata: nella tangente singolare contata due volte ed in una

altra retta non passante per O; tali piani, *tangenti alla* F *lungo tutta la tangente singolare*, sono:

$$ax - a_{02}\zeta = 0 \quad , \quad 2a_{11}\zeta - a(y - x) = 0 \quad , \quad ay + a_{20}\zeta = 0 ;$$

se li assumiamo come piani $x = 0$, $y = 0$, $x + \zeta - y = 0$, si ha: $a_{20} = a_{02} = 0$ e $a_{11} = \frac{1}{2}a$. Le tre rette non per O segate su F da questi tre piani appartengono tutte e tre al piano:

$$a_{10}x + a_{01}y + \varphi_0\zeta = 1$$

che può assumersi come improprio, donde si ha: $a_{10} = a_{01} = \varphi_0 = 0$.

Ciascuna delle tre rette, intersezioni di due dei tre piani detti, sono assi di fasci di piani seganti F in cubiche cuspidate il cui flesso descrive la retta non per O giacente sul terzo piano; *le tre rette della superficie non contenenti* O *sono quindi luoghi di flessi* (per la superficie). E la superficie non può contenere altre rette non per O perchè ogni piano per una di esse e per O sega ulteriormente F in una conica che, dovendo contenere un punto doppio, si spezza in due rette uscenti da O: se queste rette sono coincidenti i piani relativi sono quelli tangenti lungo le tangenti singolari e la retta è una delle tre già conosciute: se poi le due rette per O sono distinte, l'unico piano che le può contenere è il piano tangente nel punto uniplanare che però sega F^3 in una retta ancora per O.

Tali risultati si possono immediatamente ritrovare mediante la rappresentazione piana della superficie.

I sei punti base del sistema delle ∞^3 C_3 , che nel caso del punto biplanare si distribuiscono su due rette, si distribuiscono nel nostro caso su di un'unica retta (intersezione del piano tangente in O col piano su cui si fa la proiezione); presi a due a due, infinitamente vicini, determinano la direzione di tre tangenti (intersezioni fra i piani tangenti lungo le tangenti singolari e il piano su cui si fa la proiezione) fisse per tutte le C_3. Le tre rette uscenti da O sono rappresentate dai tre punti base; ciascuna è limite di due delle sei rette uscenti dal punto biplanare. Le rette non per O sono rappresentate dalle tre tangenti fisse (infatti esse segano le C_3 in un solo punto variabile), le quali, prese insieme, contenendo i sei punti base, costituiscono una sezione piana: si ritrova così che le tre rette che non contengono il punto doppio sono complanari.

Se si sceglie come unità l'unico punto in cui la retta $x = y = \zeta$ sega la superficie fuori di O, si ha: $2a_{11} = a = 1$ e l'equazione di F^3 si scrive:

$$\zeta^2 = (x - y + \zeta)xy$$

priva di invarianti: *le superficie cubiche con punto doppio uniplanare sono tutte proiettivamente identiche.*

4. Dato che sul piano tangente nel punto doppio uniplanare O esistono tre tangenti singolari uscenti da O che risultano tangenti a tutte le sezioni

piane ad esse complanari, possiamo dire che lungo le tre rette singolari, infinitamente vicini al punto O, esistono altri tre punti doppi della superficie. Siccome però nelle questioni di polarità non sempre i punti multipli infinitamente vicini equivalgono a punti multipli ordinari, verificheremo che la F^3 con punto doppio uniplanare non può possedere altri punti doppi oltre i quattro detti.

L'ulteriore punto doppio potrebbe essere o sul piano tangente, sia π, nel punto doppio uniplanare o fuori. Ma se A fosse un punto doppio di F^3 fuori del piano π tangente in O, la retta OA starebbe su F^3, ma rette di F^3 fuori di π non ce ne possono essere. Se A stesse in π, la retta OA sarebbe tale che ogni piano per essa segherebbe F^3 in OA ed in una conica tangente ad OA in O e passante per A, quindi spezzata e contenente OA, onde OA sarebbe retta doppia per F^3.

Geometria (Geometria differenziale). — *Sulle superficie analitiche aventi un punto doppio biplanare o uniplanare.* Nota di F. CARBONE, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

1. – Sia F una superficie analitica con punto doppio biplanare O. Collocando in questo punto l'origine di un sistema di coordinate proiettive x, y, z ed assumendo come piani xz, yz i due piani in cui si spezza il cono quadrico tangente ad F in O, l'equazione di F assume la forma:

$$xy = \varphi_3(x,y) + \varphi_2(x,y)\,z + \varphi_1(x,y)\,z^2 + \varphi_0 z^3 + \psi_4(x,y) + \cdots$$
$$\cdots + \psi_1(x,y)\,z^3 + \psi_0 z^4 + \chi_5(x,y) + \chi_4(x,y)\,z + \cdots$$

ove

$$\varphi_h = a_{h,0}\,x^h + h a_{h-1,1}\,x^{h-1}y + \cdots + a_{0,h}\,y^h;$$
$$\psi_h = b_{h,0}\,x^h + h b_{h-1,1}\,x^{h-1}y + \cdots + b_{0,h}\,y^h. \qquad \text{ecc. } \chi_h \cdots$$

Supponiamo che la retta $x = y = 0$ abbia incontro esattamente tripunto con F sia cioè $\varphi_0 \neq 0$.

Un generico piano per O sega F in una curva con punto doppio a tangenti distinte ad eccezione di quelli del tipo $x = \lambda y$, formanti fascio coi due piani tangenti in O, la cui sezione presenta una cuspide. Gli E_7 cuspidali di tali sezioni piane determinano ciascuno una retta per O (1) che descrive, al variare del piano secante, il piano *inflessionale*:

$$a_{10}\,x + a_{01}\,y + 3\varphi_0 z = 0.$$

I due piani tangenti in O segano F in una curva dotata di punto triplo: le tre tangenti in esso insieme alla retta segata sul loro piano dal piano inflessionale, dànno luogo ad un invariante; ad un altro invariante dànno luogo le rette stesse insieme alla retta $x = y = 0$.

(*) Nella seduta del 12 aprile 1947.

(1) E. BOMPIANI, *Elementi differenziali regolari e non regolari nel piano e loro applicazione alle curve algebriche piane*. « Rend. di Matematica e delle sue applicazioni », 1946, p. 7.

Consideriamo il sistema delle ∞^{10} superficie cubiche $\bar{F}^3$

$$xy = \bar{\varphi}_3(x,y) + \bar{\varphi}_2(x,y)\,z + \bar{\varphi}_1(x,y)\,z^2 + \bar{\varphi}_0 z^3,$$

aventi in O la stessa singolarità della F, e le sezioni piane segate sulla F e sulle $\bar{F}^3$ dai piani per O: $z = \lambda x + \mu y$. Queste ultime ammettono tutte lo stesso punto doppio, colle stesse tangenti, quindi lo stesso E_1. Ammettono poi anche gli stessi E_2 della F, le ∞^3 $\bar{F}^3$ per cui è:

$$\begin{aligned} &\bar{a}_{30} = a_{30} \quad , \quad \bar{a}_{20} = a_{20} \quad , \quad \bar{a}_{10} = a_{10}\,, \\ &\bar{a}_{03} = a_{03} \quad , \quad \bar{a}_{02} = a_{02} \quad , \quad \bar{a}_{01} = a_{01}\,, \end{aligned} \qquad \bar{\varphi}_0 = \varphi_0 .$$

Se la F è generica non esiste nessuna $\bar{F}^3$ che ammetta tutti gli stessi E_3 della F. Ciascuna di queste superficie cubiche contiene anche il pennello di E_7 cuspidali per O lungo la tangente singolare. Anzi le ∞^2 di esse per cui è:

$$2\,\bar{a}_{11}\,\varphi_0 = 2\,a_{11}\,\varphi_0 + \psi_0$$

contengono anche gli E_8 cuspidali. La $\bar{F}^3$ per cui è

$$3\,\bar{a}_{21} = 3\,a_{21} + \frac{b_{10}}{\varphi_0} \quad , \quad 3\,\bar{a}_{12} = 3\,a_{12} + \frac{b_{01}}{\varphi_0}$$

contiene addirittura gli E_9 cuspidali.

È da notare che, mentre la condizione di contenere gli E_9 cuspidali, senza nessuna richiesta per gli elementi regolari, *basta da sola* ad individuare una superficie cubica che automaticamente contiene gli E_2 regolari uscenti da O, questi ultimi non portano come conseguenza che la coincidenza degli E_7 cuspidali delle due superficie.

L'equazione della superficie cubica determinata è:

$$(2) \qquad xy = a_{30}x^3 + \left(3\,a_{21} + \frac{b_{10}}{\varphi_0}\right)x^2 y + \left(3\,a_{12} + \frac{b_{01}}{\varphi_0}\right)xy^2 + a_{03}y^3 +$$

$$+ \left[a_{20}x^2 + \left(2\,a_{11} + \frac{\psi_0}{\varphi_0}\right)xy + a_{02}y^2\right]z + (a_{10}x + a_{01}y)z^2 + \varphi_0 z^3 .$$

2. Il sistema di coordinate a cui è riferita la F^3 è ancora molto generico; lo si può però specializzare in modo che la sua equazione si riduca a [2]:

$$6\,xy = 6\,a_{30}x^3 + 6\,a_{03}y^3 + 3\,(x^2 + y^2)z - 2\,z^3$$

in tale riferimento i coefficienti della (1) dovranno soddisfare le relazioni:

$$a_{10} = a_{01} = 0 \quad , \quad a_{20} = a_{02} = \frac{1}{2}$$

$$b_{10} = a_{21} \quad , \quad b_{01} = a_{12} \quad , \quad 2\,a_{11} = 3\,\psi_0 \quad , \quad \varphi_0 = -\frac{1}{3},$$

(2) Vedi la mia Nota: *Sulle superficie del terzo ordine avanti un punto doppio biplanare o uniplanare*, questo fascic. dei « Rendiconti ».

che, trasportate all'equazione della F, le fanno assumere, nel nuovo riferimento, la forma:

$$xy = a_{30}x^3 + 3b_{10}x^2y + 3b_{01}xy^2 + a_{03}y^3 + \left(\frac{1}{2}x^2 + 3\psi_0 xy + \frac{1}{2}y^2\right)z - \\ - \frac{1}{3}z^3 + \psi_4(x,y) + \cdots$$

dove ogni coefficiente ha significato invariante.

3. Per preparare lo studio di una superficie nell'intorno di un suo punto doppio uniplanare, definiamo alcune calotte uniplanari σ_h (totalità degli ∞^2 E_h cuspidali piani uscenti dal punto doppio singolare) appartenenti a superficie cubiche [3].

La $\sigma_6 : z^2 = \varphi_3(x,y) + \cdots$ determina tre tangenti per O: le tangenti singolari. Dare queste insieme al relativo punto uniplanare, col suo piano ivi tangente, equivale a dare la σ_6. Quindi, fra le ∞^{10} F^3 per la σ_5 quelle che contengono la σ_6, hanno sul piano tangente in O tre tangenti asintotiche ben determinate. Fra le ∞^6 F^3 per la σ_6, quelle che contengono la $\sigma_7 : z^2 = \varphi_3(x,y) + \varphi_2(x,y)z + \cdots$ presentano tre piani ben determinati, tangenti lungo le asintotiche. Anzi la loro conoscenza insieme a quella della σ_6 equivale a quella della calotta uniplanare σ_7. Ognuno dei detti tre piani sega ulteriormente F^3 in una retta che interseca in un punto la relativa tangente singolare. I tre punti che così si ottengono sono allineati. Dare la loro retta equivale a dare fra le ∞^3 F^3 per la σ_7 quelle che contengono la σ_8:

$$z^2 = \varphi_3(x,y) + \varphi_2(x,y)z + \varphi_1(x,y)z^2 + \cdots$$

Fra le ∞^1 F^3 per la σ_8, *quell'unica* che contiene la σ_9

$$z^2 = \varphi_3(x,y) + \varphi_2(x,y)z + \varphi_1(x,y)z^2 + \varphi_0 z^3$$

presenta un ben determinato piano contenente le sue tre rette non per O.

4. Definite le varie calotte, cerchiamo le F^3 con punto doppio uniplanare in O approssimanti una F nell'intorno di un suo punto uniplanare. Si trovano ∞^1 F^3 aventi tutte in comune la calotta uniplanare σ_7 di F: esse quindi avranno pure in comune le tre tangenti singolari e i piani lungo di esse tangenti alla superficie (perchè determinati dalla σ_7 stessa). Assumiamo tali piani come $x = 0$, $y = 0$, $x + z - y = 0$; l'equazione di queste F^3 contenenti inoltre anche il pennello di E_9 cuspidali di F tangenti alla retta $x = \mu y$, $z = 0$, si scrive:

$$(3) \qquad z^2 = a(x - y + z)xy + \left[\left(a_{10} + 4\frac{b_{40}\mu^3 + \cdots}{\varphi_3(\mu,1)}\right)x + \right. \\ \left. \left(a_{01} - \frac{3b_{40}\mu^4 + \cdots}{\varphi_3(\mu,1)}\right)y\right]z^2 + \left(\varphi_0 + \frac{\psi_3(\mu,1)}{\varphi_3(\mu,1)}\right)z^3.$$

(3) Si veda, anche per questo caso, la mia Nota già citata.

Per quanto relativamente alle tangenti singolari non esistano gli E_9 cuspidali, tuttavia, nel sistema (3) ora scritto si possono trovare le F^3 relative ai valori ∞, 0, 1 del parametro competenti ad esse. Si ottengono così tre superficie spezzate ciascuna nel piano tangente in O contato due volte e, rispettivamente, nei piani;

$$b_{40}x + 4b_{31}y + b_{30}z = 0 \quad , \quad 4b_{13}x + b_{04}y + b_{03}z = 0 ,$$
$$4(b_{40} + 3b_{31} + 3b_{22} + b_{13})x - (3b_{40} + 8b_{31} + 6b_{22} - b_{04})y +$$
$$+ (b_{30} + 3b_{21} + 3b_{12} + b_{03})z = 0$$

che sono tre piani invarianti.

Si può notare che il parametro competente a ciascuna F^3 del sistema (3) è il valore del birapporto che la tangente (lungo cui la superficie cubica approssima maggiormente la F) forma colle tre tangenti singolari.

4. Consideriamo nel sistema (3) ora determinato la superficie di equazione:

$$(4) \quad z^2 = a(x - y + z)xy + \left[a_{10} - \frac{2}{a}(b_{40} - 3b_{31} + 3b_{22} - b_{13})\right]xz^2 +$$
$$+ \left[a_{01} - \frac{1}{2a}(3b_{40} - 8b_{31} + 6b_{22} - b_{04})\right]yz^2 + \left[\varphi_0 - \frac{1}{2a}(b_{30} - 3b_{21} + 3b_{12} - b_{03})\right]z^3$$

corrispondente alla direzione quarta armonica dopo le tre direzioni singolari; essa contiene gli E_9 cuspidali della F tangenti alla retta $x + y = y = z = 0$ e, pur di scegliere convenientemente un sistema di riferimento (che lascia fissi gli elementi coordinati già scelti [4]) la sua equazione può assumere la forma:

$$z^2 = (x - y + z)xy$$

di modo che i coefficienti della F, in funzione dei quali era scritta l'equazione (4), dovranno soddisfare le relazioni:

$$a_{10} = 2(b_{40} - 3b_{31} + 3b_{22} - b_{13}) \quad , \quad a_{01} = \frac{1}{2}(3b_{40} - 8b_{31} + 6b_{22} - b_{04}),$$
$$a = 1 \quad , \quad \varphi_0 = \frac{1}{2}(b_{30} - 3b_{21} + 3b_{12} - b_{03})$$

La determinazione di questi quattro coefficienti equivale a quella del piano improprio mentre si finisce di individuare il punto unità.

In tale riferimento, geometricamente legato alla superficie stessa, la F assume l'equazione:

$$z^2 = (x - y + z)xy + \left[2(b_{40} - 3b_{31} + 3b_{22} - b_{13})x + \frac{1}{2}(3b_{40} - 8b_{31} + 6b_{22} - b_{04})y\right]z^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}(b_{30} - 3b_{21} + 3b_{12} - b_{03})z^3 + \psi_4(x, y) + \cdots$$

dove ogni coefficiente ha significato invariante.

(4) Vedi la mia Nota già citata.

Geometria. — *Sulle trasformazioni puntuali che hanno direzioni inflessionali passanti per punti fissi.* Nota di G. CASADIO, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

1. Data fra due piani proiettivi $\pi, \bar{\pi}$ una trasformazione puntuale T, è noto che per ogni coppia regolare (a jacobiano non nullo) $P, \bar{P}$ di punti corrispondenti esiste: 1) una proiettività $\gamma_{P\bar{P}}$ fra le direzioni corrispondenti uscenti da $P, \bar{P}$; 2) una terna di rette (distinte o coincidenti) uscente da P ai cui E_2 di flesso in P corrispondono $\bar{E}_2$ di flesso in $\bar{P}$; queste rette diconsi *caratteristiche* o *inflessionali*.

Caratterizzo in questa Nota le trasformazioni cremoniane tali che le rette inflessionali (in ciascun piano) passino per tre punti fissi (1): se questi non sono tutti coincidenti si hanno soltanto trasformazioni quadratiche, mentre se tutti coincidono si hanno particolari trasformazioni di De Jonquières, in cui i rami, uscenti dal punto di massima molteplicità delle curve del sistema omaloidico, hanno fra loro contatto del 2° ordine.

2. Cominciamo dall'osservare che:

Se nella proiettività $\gamma_{P\bar{P}}$ relativa ad una generica coppia $P\bar{P}$ esistono rette corrispondenti passanti per punti fissi al variare della coppia, queste sono necessariamente rette inflessionali.

La cosa è evidente facendo muovere P su una di queste rette.

3. Esaminiamo anzitutto il caso che i tre punti fissi siano distinti (e necessariamente non allineati).

Siano $P(\alpha, \beta)$ e $\bar{P}(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ due punti generici corrispondenti in T e siano

$$(1)\qquad \begin{cases} \bar{x} = f(x,y) = \bar{\alpha} + a_1(x-\alpha) + a_2(y-\beta) + a_{11}(x-\alpha)^2 + \\ \qquad + 2a_{12}(x-\alpha)(y-\beta) + a_{22}(y-\beta)^2 + \cdots \\ \bar{y} = \varphi(x,y) = \bar{\beta} + b_1(x-\alpha) + b_2(y-\beta) + b_{11}(x-\alpha)^2 + \\ \qquad + 2b_{12}(x-\alpha)(y-\beta) + b_{22}(y-\beta)^2 + \cdots \end{cases}$$

le equazioni di T.

Ad un $\bar{E}_1 : \bar{y} - \bar{\beta} = \bar{m}(\bar{x} - \bar{\alpha})$, uscente da $\bar{P}$, corrisponde nel piano π l'$E_1 : y - \beta = m(x - \alpha)$ per cui

$$(2)\qquad m = \frac{a_1 \bar{m} - b_1}{b_2 - a_2 \bar{m}}$$

La (2) è l'equazione della proiettività $\gamma_{P\bar{P}}$.

(*) Nella seduta del 12 aprile 1947.

(1) Il problema mi è stato proposto dal prof. Villa che qui ringrazio anche per i suggerimenti datimi nell'esecuzione del presente lavoro.

Prendiamo, nei due piani, come vertici del triangolo di riferimento i tre punti fissi, per cui passano, per ipotesi, tre direzioni corrispondenti in $\gamma_{P\bar{P}}$. Questo dice che nella (2) devono corrispondersi le direzioni $\bar{m} = 0$, $m = 0$; $\bar{m} = \infty$, $m = \infty$; $\bar{m} = \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}$, $m = \frac{\beta}{\alpha}$. Perchè questo accada, deve essere

$$(3) \qquad b_1 = 0 \quad , \quad a_2 = 0 \quad , \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{a_1}{b_2}\frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}},$$

qualunque sia la coppia $P(\alpha, \beta)$, $\bar{P}(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$. Le funzioni $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ devono pertanto soddisfare al sistema

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{y}{x} = \dfrac{\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}}{\dfrac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}} \cdot \dfrac{\varphi(x, y)}{f(x, y)}. \end{cases}$$

Integrando le prime due equazioni, otteniamo

$$\varphi(x, y) = \Phi(y) \quad , \quad f(x, y) = (F)(x)$$

e quindi la terza diventa

$$\frac{y\,\Phi'(y)}{\Phi(y)} = \frac{x\,F'(x)}{F(x)}.$$

Sia k (costante) il valore comune di questi rapporti.

Integrando si ottiene $F(x) = ax^k$, $\Phi(y) = by^k$ e perciò le equazioni di T diventano

$$\bar{x} = ax^k \quad , \quad x = \frac{1}{a}\bar{x}^{\frac{1}{k}}$$

$$\bar{y} = by^k \quad , \quad y = \frac{1}{b}\bar{y}^{\frac{1}{k}}.$$

Ora la T è biunivoca solo se k e $\frac{1}{k}$ sono numeri interi, cioè se $k = \pm 1$.

Per $k = 1$ si hanno le omografie che non interessano perchè in esse ogni direzione è inflessionale. Per $k = -1$ si ottengono le trasformazioni quadratiche che hanno come punti singolari i tre punti fissati. Rimane così provato che: *Le trasformazioni quadratiche coi tre punti singolari distinti sono le uniche trasformazioni cremoniane per cui le direzioni inflessionali appartengono a tre fasci.*

4. Passiamo a determinare le trasformazioni con due sole direzioni inflessionali distinte (cioè, con una di esse doppia), passanti per due punti fissi.

Presi questi come punti all'infinito degli assi x, y, valgono ancora le prime due delle (4), cioè, è ancora

$$\bar{x} = F(x) \quad , \quad \bar{y} = \Phi(y).$$

S'imponga ora che per il punto all'infinito dell'asse x ($m = 0$) passino le direzioni inflessionali doppie. Svolgendo i relativi calcoli, che omettiamo per brevità, si trova $a_{11} = 0$, cioè $\frac{d^2\bar{x}}{dx^2} = 0$ e perciò

$$\bar{x} = ax + b$$
$$\bar{y} = \Phi(y)$$

sono in questo caso le equazioni della trasformazione. Questa sarà cremoniana (cioè, biunivoca e algebrica), se

$$\bar{y} = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}.$$

Quindi: *Le uniche trasformazioni cremoniane che hanno due sole direzioni inflessionali distinte e appartenenti a due fasci, sono le trasformazioni quadratiche che hanno i loro punti singolari riuniti nei centri dei due fasci.*

5. Determiniamo infine le trasformazioni per cui le direzioni inflessionali relative ad un punto generico coincidono e passano per un punto fisso. Preso questo, nei due piani, come punto all'infinito dell'asse x, si ha, come nel caso precedente, $b_1 = 0$ $a_{11} = 0$ (direzione inflessionale doppia). Affinchè la direzione $m = 0$ sia poi tripla occorre e basta, come si vede eseguendo i relativi calcoli, che si abbia ancora $2\,a_{12}\,b_2 - a_1\,b_{22} = 0$. Le prime due condizioni ci dicono che $\frac{\partial\bar{y}}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial^2\bar{x}}{\partial x^2} = 0$, da cui segue

$$\bar{x} = f(y)\,x + \varphi(y)$$
$$\bar{y} = \Phi(y).$$

Conseguentemente l'ultima può scriversi

$$2f'(y)\,\Phi'(y) = f(y)\,\Phi''(y)$$

da cui si ottiene

$$\Phi'(y) = \alpha f^2(y) \quad \text{e quindi} \quad \Phi(y) = \alpha \int f^2(y)\,dy + \beta,$$

con α e β costanti arbitrarie. Abbiamo così la trasformazione

$$(5) \qquad \begin{cases} \bar{x} = f(y)\,x + \varphi(y) \\ \bar{y} = \alpha \int f^2(y)\,dy + \beta. \end{cases}$$

Facilmente si vede che anche le formule della trasformazione inversa sono dello stesso tipo. Determiniamo quando le (5) danno trasformazioni

cremoniane. Essendo la $\bar{y}$ funzione della sola y, perchè la corrispondenza sia biunivoca è necessario che sia $\bar{y} = \frac{ay+b}{cy+d}$ con $ad - bc \neq 0$.

Dall'uguaglianza $\alpha \int f^2(y)\,dy + \beta = \frac{ay+b}{cy+d}$, posto $k^2 = \frac{ad-bc}{\alpha}$, si ottiene $f(y) = \frac{k}{cy+d}$.

Le (5) diventano così

$$\bar{x} = \frac{kx}{cy+d} + \varphi(y)$$
$$\bar{y} = \frac{ay+b}{cy+d}.$$

Si vede subito che esse danno luogo ad una trasformazione biunivoca qualunque sia la $\varphi(y)$. Tale trasformazione sarà cremoniana se si avrà $\varphi(y) = \frac{P(y)}{Q(y)}$ con $P(y)$ e $Q(y)$ polinomi in y. In tal caso, le (5) divengono

$$\bar{x} = \frac{kx}{cy+d} + \frac{P(y)}{Q(y)}$$
$$\bar{y} = \frac{ay+b}{cy+d}. \tag{6}$$

Introdotte nei due piani le coordinate omogenee x, y, z ; $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, si ha che alla rete di rette $\lambda_1 \bar{x} + \lambda_2 \bar{y} + \lambda_3 \bar{z} = 0$ del piano $\bar{\pi}$ corrisponde nel piano π la rete

$$\lambda_1 [kx\, Q_{n-1}(y,z) + P_{n-1}(y,z)(cy+dz)] +$$
$$+ \lambda_2 (ay+bz) Q_{n-1}(y,z) + \lambda_3 (cy+dz) Q_{n-1}(y,z) = 0 \tag{7}$$

ove $n-1$ è il maggiore dei gradi dei polinomi $P(y), Q(y)$, e si ha

$$P_{n-1}(y,z) = z^{n-1} P\left(\frac{y}{z}\right) \quad , \quad Q_{n-1}(y,z) = z^{n-1} Q\left(\frac{y}{z}\right).$$

Le curve della rete (7) sono razionali d'ordine n, con punto $(n-1)$-plo in $A_1(1,0,0)$, ed hanno ivi, come si constata facilmente, le stesse tangenti e gli stessi E_2.

Di qui discende che le (6) definiscono *una trasformazione di De-Jonquières, in cui i* $2n-2$ *punti base semplici cadono infinitamente vicini al punto base* $(n-1)$-plo A_1, $n-1$ *nell'intorno di* 1^o *ordine, e i rimanenti* $n-1$ *nell'intorno di* 2^o *ordine*; e questo è l'unico tipo di trasformazione cremoniana di ordine n che abbia le tre direzioni inflessionali coincidenti e passanti per un punto fisso. Per $n = 2$ abbiamo le trasformazioni quadratiche con i punti base coincidenti.

Matematica. — *Un'osservazione sul metodo di Ritz ed applicazione al calcolo della frequenza fondamentale di una membrana circolare con foro circolare eccentrico* (*). Nota di A. GHIZZETTI, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

1. In alcuni problemi presentatisi all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo si è rivelata utile la seguente osservazione sul metodo di Ritz, dovuta al prof. M. Picone. Sia $X(x_1, x_2, \cdots, x_r)$ un punto variabile in un dominio limitato D dello spazio a r dimensioni. Consideriamo l'espressione differenziale autoaggiunta, di tipo ellittico:

$$E[v] = \sum_{h=1}^{r} \frac{\partial}{\partial x_h} \sum_{k=1}^{r} a_{hk}(X) \frac{\partial v}{\partial x_k} + c(X)v, \qquad (c \leq 0),$$

e, posto

$$L[v] = \alpha(X) \frac{\partial v}{\partial n'} + \beta(X)v, \qquad (\alpha^2 + \beta^2 > 0, \alpha\beta \leq 0),$$

ove α, β sono funzioni continue sulla frontiera FD di D e n' designa la conormale a FD definita dalle

$$a(X)\cos(n'x_k) = \sum_{h=1}^{r} a_{hk}(X)\cos(nx_h); \quad (k = 1, 2, \cdots, r; n = \text{normale interna}; a \geq 0),$$

consideriamo i due seguenti problemi omogenei di frontiera:

$$(1) \quad \begin{cases} E[v] + \lambda v = 0 & (\text{in D}) \\ L[v] = 0 & (\text{su FD}) \end{cases}, \qquad (2) \quad \begin{cases} E[u] + \sigma\theta(X)u = 0 & (\text{in D}) \\ L[u] = 0 & (\text{su FD}) \end{cases},$$

essendo θ una funzione continua in D, non negativa e non identicamente nulla.

Supponiamo che del problema (1) siano noti gli autovalori $\lambda_0, \lambda_1, \cdots$ (positivi) e le corrispondenti autosoluzioni $v_0, v_1, \cdots$ (ortonormali) e proponiamoci di calcolare col metodo di Ritz il più basso autovalore $\sigma_0 > 0$ del problema (2). Posto:

$$I[u] = \int_D \left(\sum_{h=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} a_{hk} \frac{\partial u}{\partial x_h} \frac{\partial u}{\partial x_k} - cu^2 \right) dX -$$

$$- \int_{FD} a \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \left[u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial n'} \right)^2 \right] d\sigma \quad , \quad H[u] = \int_D \theta u^2 \, dX,$$

si ha $\sigma_0 = \min I[u]/H[u]$ nella classe U delle funzioni u biregolari in D e verificanti la $L[u]=0$ su FD, e tale minimo è conseguito per $u = u_0$ ove u_0 è

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 10 maggio 1947.

l'autosoluzione di (2) corrispondente a σ_0 [1]. Il prof. Picone ha pensato di applicare il metodo ponendo in luogo di u delle combinazioni lineari del tipo $\sum_{n=0}^{N} \gamma_n v_n$ (che appartengono alla classe U), ossia di calcolare valori di σ_0 approssimati per eccesso mediante la formula

$$\sigma_0 \leq I\left[\sum_{n=0}^{N} \gamma_n v_n\right] \Big/ H\left[\sum_{n=0}^{N} \gamma_n v_n\right], \tag{3}$$

presumendo di ottenere con tale scelta delle u la convergenza del metodo stesso.

In questa Nota dimostro che effettivamente sussiste il teorema seguente [2].

I. – *Detti* $\gamma_0^{(N)}, \gamma_1^{(N)}, \cdots, \gamma_N^{(N)}$ *i valori di* $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_N$ *che minimizzano il secondo membro di* (3), *risulta*:

$$\lim_{N\to\infty} I\left[\sum_{n=0}^{N} \gamma_n^{(N)} v_n\right] \Big/ H\left[\sum_{n=0}^{N} \gamma_n^{(N)} v_n\right] = \sigma_0. \tag{4}$$

Successivamente faccio un'applicazione ad un particolare problema.

2. Per dimostrare il teorema I ricordiamo anzitutto che per la u_0 vale in D uno sviluppo del tipo

$$u_0 \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n v_n, \tag{5}$$

convergente in media, con i coefficienti c_n espressi dalla $c_n = \int_D u_0 v_n \, dX$ ovvero, con una facile applicazione della formula di Green:

$$c_n = \frac{\sigma_0}{\lambda_n} \int_D \theta u_0 v_n \, dX. \tag{6}$$

Per provare il nostro asserto basterà allora far vedere che

$$\lim_{N\to\infty} I\left[\sum_{n=0}^{N} c_n v_n\right] = I[u_0] \quad , \quad \lim_{N\to\infty} H\left[\sum_{n=0}^{N} c_n v_n\right] = H[u_0], \tag{7}$$

perchè, dopo ciò, dalla limitazione evidente

$$\sigma_0 \leq I\left[\sum_{n=0}^{N} \gamma_n^{(N)} v_n\right] \Big/ H\left[\sum_{n=0}^{N} \gamma_n^{(N)} v_n\right] \leq I\left[\sum_{n=0}^{N} c_n v_n\right] \Big/ H\left[\sum_{n=0}^{N} c_n v_n\right]$$

il cui terzo membro tende a $I[u_0]/H[u_0] = \sigma_0$ (per $N \to \infty$), seguirà senza altro la (4).

(1) Cfr. per esempio M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore*, Napoli 1940, pp. 831–835.

(2) La dimostrazione è data senza far ricorso ai criteri generali, non sempre facilmente applicabili, dati da M. PLANCHEREL, *Sur la méthode d'integration de Ritz*, « Bulletin des Sciences Mathématiques », tome 47, 1923, pp. 376–383, 397–412 e tome 48, 1924, pp. 12–48, 58–80, 93–109.

Per dimostrare le (7), cominciamo col ricordare che per ogni funzione u della classe U si ha $I[u] = -\int_D u\,E[u]\,dX$ e quindi in particolare $I\left[\sum_{n=0}^{N} c_n v_n\right] = \sum_{n=0}^{N} \lambda_n c_n^2$, $I[u_0] = \sigma_0 \int_D \theta u_0^2\,dX$. Perciò la prima delle (7) equivale alla $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n c_n^2 = \sigma_0 \int_D \theta u_0^2\,dX$ che, per la (6), si può trasformare nella $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_D \theta u_0 \cdot v_n\,dX = \int_D \theta u_0 \cdot u_0\,dX$ che è una ben nota conseguenza della (5). La seconda delle (7) equivale alla $\lim_{N\to\infty} \int_D \theta \left[\left(\sum_{n=0}^{N} c_n v_n\right)^2 - u_0^2\right] dX = 0$ e anche questa deriva, in modo noto, dalla (5) stessa.

3. Applichiamo il metodo precedente alla determinazione approssimata della frequenza fondamentale di una membrana circolare con foro eccentrico, esso pure circolare, supposta fissa sul bordo esterno e libera su quello interno.

Siano C_0, C_1 le circonferenze $x^2 + y^2 = 1$, $(x - s)^2 + y^2 = r^2$, la seconda tutta interna alla prima ($0 < r < 1$, $0 \leq s < 1 - r$) e sia D il dominio limitato da C_0, C_1. Supposta la membrana tesa su D, il problema considerato equivale a quello di calcolare il più basso autovalore k_0 del problema seguente [3]:

$$(8) \qquad \Delta_2 u + k^2 u = 0 \quad (\text{in D}), \quad u = 0 \quad (\text{su } C_0), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (\text{su } C_1).$$

Detta p la radice minore dell'equazione di 2° grado in t, $st^2 - (1 - r^2 - s^2)t + s = 0$, e posto $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, la trasformazione di Möbius $z = \frac{\zeta + p}{p\zeta + 1}$ muta C_0, C_1 rispettivamente nelle circonferenze concentriche Γ_0, Γ_1, di equazioni $\xi^2 + \eta^2 = 1$, $\xi^2 + \eta^2 = q^2$ con $q = \frac{r}{1 - sp}$ (è $0 < q < 1$). Di conseguenza, indicando con Δ la corona circolare limitata da Γ_0, Γ_1, il problema (8) si traduce in quest'altro:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{(1 - p^2)^2 k^2 u}{[p(\xi^2 + \eta^2) + 2p\xi + 1]^2} = 0 \ (\text{in } \Delta), \quad u = 0 \ (\text{su } \Gamma_0), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \ (\text{su } \Gamma_1),$$

ovvero, passando a coordinate polari ρ, θ e ponendo $\sigma = (1 - p^2)\,k$:

$$(9) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\sigma^2 u}{(1 + 2p\rho\cos\theta + p^2\rho^2)^2} = 0$$
$$(\text{per } q \leq \rho \leq 1), \quad u(1, \theta) = 0, \quad u_\rho(q, \theta) = 0.$$

(3) Calcolato $k_0 = k_0(r, s)$, nel caso che C_0 abbia raggio R_0, C_1 raggio R_1 e la distanza dei centri sia d, la frequenza fondamentale della membrana risulterà espressa dalla $f_0 = \frac{1}{2\pi R_0} k_0\left(\frac{R_1}{R_0}, \frac{d}{R_0}\right)\sqrt{\frac{S}{K}}$ ove S è la tensione e K la densità superficiale.

Il problema (9) dipende dai due parametri p, q ($0 \leq p < 1$, $0 < q < 1$); mediante questi i parametri primitivi r, s sono espressi dalle

$$(10) \qquad r = q\,\frac{1-p^2}{1-p^2q^2} \quad , \quad s = p\,\frac{1-q^2}{1-p^2q^2}\,.$$

Per il problema (9) si ha:

$$(11)\quad I[u]=\int_q^1 \rho\,d\rho\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2\right]d\theta \quad , \quad H[u]=\int_q^1 \rho\,d\rho\int_0^{2\pi}\frac{u^2}{(1+2p\rho\cos\theta+p^2\rho^2)^2}\,d\theta,$$

e poichè sono noti gli autovalori λ_n e le autosoluzioni v_n del problema

$$(12)\quad \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \rho}+\lambda^2 v=0 \quad (\text{per } q\leq\rho\leq 1)\ ,\ v(1,\theta)=0\ ,\ v_\rho(q,\theta)=0$$

corrispondente al caso $p = 0$ (cioè delle circonferenze C_0, C_1 concentriche), possiamo, seguendo il procedimento esposto al n. 1, applicare il metodo di Ritz ponendo nelle (11) $u = \sum_{n=0}^{N} \gamma_n v_n$ e cercando il minimo μ_N della funzione $g(\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_n) = I\left[\sum_{n=0}^{N} \gamma_n v_n\right] \Big/ H\left[\sum_{n=0}^{N} \gamma_n v_n\right]$. Come è noto, μ_N è la più piccola radice positiva dell'equazione algebrica di grado $N+1$ in μ:

$$(13) \qquad \left\| \frac{\partial^2 I}{\partial \gamma_i\,\partial \gamma_j} - \mu\,\frac{\partial^2 H}{\partial \gamma_i\,\partial \gamma_j} \right\| = 0\,, \qquad (i, j = 0, 1, \cdots, N),$$

e, per quanto si è detto al n. 1, si ha per il più basso autovalore σ_0 del problema (9) $\sigma_0^2 = \lim_{N\to\infty} \mu_N$ donde, per il problema (8):

$$(14) \qquad k_0 = \frac{\sigma_0}{1-p^2} = \frac{1}{1-p^2}\sqrt{\lim_{N\to\infty} \mu_N}\,.$$

4. Per sviluppare il calcolo indicato al n. 3, ricordiamo che gli autovalori λ_n del problema (12) sono le radici dell'equazione

$$(15) \qquad J_n(\lambda)\,Y_n'(q\lambda) - Y_n(\lambda)\,J_n'(q\lambda) = 0\,, \quad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

(con J_n, Y_n funzioni di Bessel). Per ogni n si hanno infinite radici $\lambda_{n0}, \lambda_{n1}, \cdots$ Gli autovalori λ_{0h} ($h = 0, 1, \cdots$) sono di rango 1 con l'autosoluzione (non normalizzata)

$$v_{0h}(\rho) = J_0(\lambda_{0h})\,Y_0(\lambda_{0h}\rho) - Y_0(\lambda_{0h})\,J_0(\lambda_{0h}\rho);$$

gli autovalori λ_{nh} ($n \geq 1$; $h = 0, 1, \cdots$) sono di rango 2 con le due autosoluzioni (non normalizzate) $v_{nh}^{(1)}(\rho, \theta) = V_{nh}(\rho)\cos n\theta$, $v_{nh}^{(2)}(\rho, \theta) = V_{nh}(\rho)\,\mathrm{sen}\, n\theta$, ove si è posto:

$$V_{nh}(\rho) = J_n(\lambda_{nh})\,Y_n(\lambda_{nh}\rho) - Y_n(\lambda_{nh})\,J_n(\lambda_{nh}\rho).$$

Ponendo nelle (11):

$$u = \sum_{h=0}^{M_0} a_{0h}\, v_{0h}(\rho) + \sum_{n=1}^{N} \sum_{h=0}^{M_N} V_{nh}(\rho)\,(a_{nh}\cos n\theta + b_{nh}\operatorname{sen} n\theta),$$

risulta

$$(16)\qquad I[u] = 2\pi \sum_{h=0}^{M_0} a_{0h}^2 \lambda_{0h}^2 \int_q^1 \rho\, v_{0h}^2(\rho)\, d\rho + \pi \sum_{n=1}^{N} \sum_{h=0}^{M_N} (a_{nh}^2 + b_{nh}^2)\lambda_{nh}^2 \int_q^1 \rho\, V_{nh}^2(\rho)\, d\rho,$$

$$(17)\qquad H[u] = \sum_{h=0}^{M_0} \sum_{k=0}^{M_0} a_{0h}\, a_{0k} \int_q^1 \rho\, v_{0h}(\rho)\, v_{0k}(\rho)\, F_0(\rho)\, d\rho +$$

$$+ 2 \sum_{h=0}^{M_0} \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=0}^{M_N} a_{0h}\, a_{nk} \int_q^1 \rho\, v_{0h}(\rho)\, V_{nk}(\rho)\, F_n(\rho)\, d\rho +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{N} \sum_{h=0}^{M_N} \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=0}^{M_N} \Big\{ a_{mh}\, a_{nk} \int_q^1 \rho\, V_{mh}(\rho)\, V_{nk}(\rho)\, [F_{m-n}(\rho) + F_{m+n}(\rho)]\, d\rho +$$

$$+ b_{mh}\, b_{nk} \int_q^1 \rho V_{mh}(\rho)\, V_{nk}(\rho)\, [F_{m-n}(\rho) - F_{m+n}(\rho)\, d\rho \Big\},$$

avendo posto:

$$F_k(\rho) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos k\theta}{(1 + 2p\rho\cos\theta + p^2\rho^2)^2}\, d\theta,$$

ossia, come si trova con un facile calcolo di residui:

$$F_0(\rho) = 2\pi \frac{1 + p^2\rho^2}{(1 - p^2\rho^2)^3} \quad , \quad F_1(\rho) = -4\pi \frac{p\rho}{(1 - p^2\rho^2)^3},$$

$$F_k(\rho) = (-1)^k \frac{\pi}{p^k \rho^k} \Big\{ \frac{(1 + p^2\rho^2)(1 + p^{2k}\rho^{2k}) - k(1 - p^2\rho^2)(1 - p^{2k}\rho^{2k})}{(1 - p^2\rho^2)^3} +$$

$$+ \sum_{s=0}^{k-2} (k - s - 1)(s + 1)\, p^{2s}\rho^{2s} \Big\}, \ (k \geq 2).$$

Gli integrali che compaiono in (16), (17) si calcolano agevolmente con una formula di quadratura, valendosi delle tabelle delle funzioni di Bessel, dopo aver valutato quelle radici della (15) che occorrono. Dopo ciò, si sostituiscono le (16), (17) nell'equazione analoga alla (13), si risolve questa e si applica la (14).

Riportiamo alcuni valori approssimati per eccesso di k_0 ottenuti con $M_0 = 1$, $N = 1$, $M_1 = 0$ (4).

(4) I calcoli sono stati eseguiti dalla sig.na ANNA FLORI; i risultati ottenuti concordano con quelli ottenuti con altro metodo dalla dott. IDA PALATIELLO nella sua tesi di laurea compiuta presso l'Istituto Naz. per le Appl. del Calcolo e discussa nell'anno 1944-45.

q \ p	1/4	1/2	3/4
1/4	2,561	2,531	2,983
1/2	3,086	2,785	2,981
3/4	5,150	4,165	3,721

Occorre ricordare che i valori dei parametri r, s che fissano la posizione relativa delle due circonferenze C_0, C_1 si deducono da quelli p, q qui considerati mediante le formule (10).

Matematica. — *Sulla stabilità delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari.* Nota I di S. Faedo, presentata (*) dal Socio M. Picone.

L. Cesari (1) ha dato il seguente teorema di stabilità per le soluzioni delle equazioni differenziali lineari, che comprende delle proposizioni ottenute precedentemente da altri Autori (2):

Se:

α) *le funzioni, reali o complesse, della variabile reale* x $\varphi(x)$, $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ *sono assolutamente integrabili in* $(x_0, +\infty)$;

β) *è* $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$;

γ) *le radici distinte* $z_1, z_2, \cdots, z_\rho$ $(\rho \leq n)$ *dell'equazione caratteristica*

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \tag{1}$$

dove gli a_i *sono numeri (reali o complessi) assegnati, hanno tutte parte reale non positiva e quelle a parte reale nulla sono semplici;*

δ) *è verificata una delle due condizioni* $z_i \neq 0$ *oppure* $b = 0$,

allora l'equazione differenziale

$$E[a_i, \varphi_i; y] \equiv y^{(n)} + [a_1 + \varphi_1(x)]\, y^{(n-1)} + \cdots + [a_n + \varphi_n(x)]\, y = b + \varphi(x) \tag{2}$$

dove b *è un numero (reale o complesso) assegnato, ha tutti i suoi integrali stabili* (3).

(*) Nella seduta del 10 maggio 1947.

(1) L. Cesari, *Un nuovo criterio di stabilità per le soluzioni delle equazioni differenziali lineari.* « Ann. R. Sc. Normale Sup. Pisa », Ser. II, vol. IX (1940), pp. 163–186. In tale lavoro è dato anche un teorema più generale in cui questo rientra.

(2) Rinvio al citato lavoro di Cesari per la ricca bibliografia sull'argomento.

(3) Un integrale $y(x)$ della (2) si dice *stabile* per $x \geq x_0$ se esiste una costante C per cui sia, per ogni $x \geq x_0$, $|y^{(s)}(x)| < C$ $(s = 0, 1, \cdots, n-1 ; y^{(0)} \equiv y)$.

Osservo che questo teorema si può anche enunciare più semplicemente così:

Se sono soddisfatte le condizioni α) *e* β) *e se gli integrali dell'equazione*

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = b \tag{3}$$

sono tutti stabili, allora anche tutti gli integrali della (2) *sono stabili.*

Infatti, se sono verificate le condizioni γ) e δ) il teorema di Cesari per $\varphi \equiv \varphi_i \equiv 0$ porta che le soluzioni della (3) sono tutte stabili.

Viceversa mostriamo che se la (3) ha tutte le soluzioni stabili, sono verificate le condizioni γ) e δ). Ciò è ben noto se è $b = 0$. Se fosse $b \neq 0$ deve essere verificata la δ), cioè $a_n \neq 0$, perchè altrimenti se a_r $(r < n)$ è l'ultimo numero non nullo fra $a_0 = 1, a_1, \cdots, a_n$ la (3) avrebbe l'integrale non stabile $y = \dfrac{b}{(n-r)!\, a_r} x^{n-r}$; perciò la (3) ha l'integrale $y = \dfrac{b}{a_n}$ e perchè tutti i suoi integrali siano stabili occorre che lo siano tutti quelli della (3) per $b = 0$, cioè che sia soddisfatta anche la γ).

Questa osservazione mi ha suggerito il problema seguente che, oltre al suo interesse intrinseco, ha notevole importanza per le applicazioni.

Consideriamo gli spazi lineari ad n dimensioni che hanno per elementi rispettivamente le soluzioni delle equazioni (2) e (3) e siano Σ e Σ' gli spazi lineari in essi contenuti che rappresentano tutti gli integrali stabili di (2) e (3).

PROBLEMA. – *Si domandano condizioni sufficienti ad assicurare che* Σ e Σ' *abbiano la stessa dimensione* r.

Per determinare r basterà allora limitarsi a considerare lo spazio lineare Σ' per il quale tale determinazione è immediata.

Dopo di ciò si impone l'altro problema di dare un procedimento, atto al calcolo numerico, per costruire gli integrali dell'equazione (2) e che *permetta di individuare* a priori *tutti gli integrali stabili*. A questo secondo problema, nel caso delle equazioni omogenee, ho già dato risoluzione affermativa in un altro mio lavoro (4), sul quale queste note si fondano in modo essenziale.

Tutti gli integrali si possono ottenere con uno sviluppo in serie derivabile termine a termine $n - 1$ volte con convergenza assoluta e uniforme. Il termine generale di queste serie si calcola con formule ricorrenti, mediante quadrature, ed ho date maggiorazioni dell'errore che si commette arrestandosi al ν^{mo} termine.

A entrambi i problemi qui proposti viene data risoluzione affermativa in queste Note; oltre a ciò *si completano alcune ricerche di* Perron e Cesari *sulle proprietà asintotiche degli integrali delle equazioni differenziali lineari* (ved. in particolare la Parte II).

Ad ognuna delle parti in cui sono divise queste Note è premessa una breve esposizione dei risultati in essa conseguiti.

(4) S. FAEDO, *Il teorema di Fuchs per le equazioni differenziali lineari a coefficienti non analitici e proprietà asintotiche delle soluzioni.* « Annali di Matematica », 1946.

Parte I. – L'equazione caratteristica ha radici tutte distinte.

1. *Risultati della Parte I.*

Teorema I. – *Se è soddisfatta la condizione* α) *e l'equazione caratteristica* (1) *ha radici tutte semplici, allora gli spazi lineari* Σ e Σ' *hanno la stessa dimensione* r, $(-1 \leq r \leq n)$ *ed è* $r = -1$ *quando sia simultaneamente* $a_n = 0$, $b \neq 0$, *mentre in ogni altro caso* r *è uguale al numero delle radici dell'equazione caratteristica che hanno parte reale non positiva.*

In tale enunciato, conformemente alle convenzioni della geometria iperspaziale, $r = -1$ esprime lo spazio vuoto ed $r = 0$ quello costituito di un solo elemento [5].

Per $r = n$ il teorema dato migliora quello di Cesari, ciò che, sempre per $r = n$, era stato già notato da D. Caligo [6]; e infatti nel teorema I manca la condizione β). Pertanto, nelle ipotesi del teorema I,

la questione di conoscere se vi siano integrali stabili dell'equazione (2) *è subito decisa dal vedere se si presenta o no il caso eccezionale* $a_n = 0$ *e* $b \neq 0$ *e, se ciò non accade, per sapere quanti ve ne sono basta determinare il segno delle parti reali delle radici dell'equazione algebrica* (1).

Si dimostra inoltre che il procedimento per il calcolo delle soluzioni già sviluppato per l'equazione omogenea ($b = \varphi = 0$), si presta pure per l'equazione non omogenea (2) e le serie che si ottengono continuano ad avere le proprietà che ho già ricordato; in particolare *si individuano* a priori *le serie che dànno gli integrali stabili della* (2).

2. – Nella memoria citata in [4] è dimostrato il

Teorema II. – *Se è soddisfatta la condizione* α) *e l'equazione caratteristica* (1) *ha* n *radici distinte reali o complesse* $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n$ *allora l'equazione omogenea*

$$\mathrm{E}[a_i, \varphi_i; y] = 0 \tag{4}$$

possiede un sistema fondamentale di integrali per i quali valgono gli sviluppi

$$y_i(x) = e^{\zeta_i x}\left[1 + \lambda_{1,i}(x) + \cdots + \lambda_{m,i}(x) + \cdots\right], \tag{5}$$

dove le funzioni $\lambda_{m,i}(x)$ *sono definite e continue con le derivate fino all'ordine* $n - 1$ *per ogni* $x \geqq X$, *essendo* X *una costante che si determina. Per ogni* m *è* $\lim_{x \to +\infty} \lambda_{m,i}(x) = 0$ *e la serie* $\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{m,i}(x)$ *converge assolutamente ed uniformemente insieme a quelle che si ottengono derivando le* $n - 1$ *volte ed è*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y_i^{(s)}}{e^{\zeta_i x}} = \zeta_i^s \qquad (s = 0, 1, \cdots, n-1 \;;\; y_i^{(0)} \equiv y_i). \tag{6}$$

(5) Questo è ad esempio il caso dell'equazione omogenea ($b = \varphi = 0$) che, se è $\mathrm{R}\zeta_i > 0$ ($i = 1, 2, \cdots, n$), ha sempre l'integrale stabile $y \equiv 0$ e *questo soltanto.*

(6) D. Caligo, *Un criterio sufficiente di stabilità per le soluzioni dei sistemi di equazioni integrali lineari e sue applicazioni.* « Rend. R. Acc. Italia », ser. VII, vol. I (1940).

Si noti che dalla (6) discende la relazione

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y_i^{(s)}(x)}{y_i(x)} = \zeta_i^s \tag{6'}$$

trovata dal Perron [7] con altre condizioni, che non sono tutte verificate dal Teorema II.

3. TEOREMA III. – *Se è soddisfatta la condizione* α) *e se l'equazione caratteristica* (1) *ha radici tutte distinte* $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n$ *nessuna delle quali abbia parte reale nulla, allora l'equazione non omogenea* (2) *ha almeno un integrale stabile.*

Sia $y_i(x)$ $(i = 1, \cdots, n)$ il sistema fondamentale (5) dell'equazione omogenea (4) e costruiamo un integrale particolare della (2) col metodo della variazione delle costanti; poniamo cioè

$$\bar{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_i(x) \tag{7}$$

dove le $c_i(x)$ soddisfano al sistema differenziale

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, y_i^{(s)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } s = 0, 1, \cdots, n-2;\ y_i^{(0)} \equiv y_i; \\ b + \varphi(x) & \text{per } s = n-1. \end{cases} \tag{8}$$

Per le (6) il Wronskiano delle $y_i(x)$ è dato da

$$e^{x\cdot\sum_{i=1}^{n}\zeta_i}\cdot\Delta(x)$$

dove $\Delta(x)$ è una funzione che per $x \to +\infty$ ha limite finito e $\neq 0$, questo limite essendo il determinante di Vandermonde dei numeri ζ_i fra loro distinti. Risolvendo il sistema di equazioni lineari (8) si trova

$$c_i'(x) = e^{-\zeta_i x}[b + \varphi(x)]\frac{\Delta_i(x)}{\Delta(x)}$$

dove $\Delta_i(x)$, come $\Delta(x)$, ha limite finito e $\neq 0$ per $x \to +\infty$.

Poniamo

$$\begin{cases} c_i(x) = -\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-\zeta_i x}[b + \varphi(x)]\frac{\Delta_i(x)}{\Delta(x)}\,dx, & \text{per } \mathrm{R}\zeta_i > 0 \\ c_i(x) = \displaystyle\int_{x_i}^{x} e^{-\zeta_i x}[b + \varphi(x)]\frac{\Delta_i(x)}{\Delta(x)}\,dx, & \text{per } \mathrm{R}\zeta_i < 0. \end{cases} \tag{9}$$

Posto

$$y_i(x) = e^{\zeta_i x}\lambda_i(x) \tag{10}$$

(7) O. PERRON, *Ueber lineare Differentialgleichungen, dei denen die unabhängig Variable reel ist.* « Journ. f. reine u. ang. Math. », Bd. 142–143 (1912–1913).

per le (6) e le proprietà dette di $\Delta(x)$ e $\Delta_i(x)$ si possono determinare delle costanti M_i ed N_i tali che sia

$$(11) \qquad \left|\frac{\Delta_i(x)}{\Delta(x)}\right| \leq M_i \quad , \quad |\lambda_i(x)| \leq N_i , \quad \text{per} \quad x \geq x_0 .$$

Consideriamo la funzione $c_i(x)\, y_i(x)$. Per $R\zeta_i > 0$ si ha per le (9)–(11)

$$|c_i(x)\, y_i(x)| \leq N_i M_i e^{R\zeta_i x}\left[|b| \int_x^{+\infty} e^{-R\zeta_i \cdot x}\, dx + \int_x^{+\infty} |\varphi(x)|\, e^{-R\zeta_i \cdot x}\, dx\right] \leq$$

$$\leq N_i M_i \left[\frac{|b|}{R\zeta_i} + \int_x^{+\infty} |\varphi(x)|\, dx\right] < K_i$$

dove K_i è una costante. Allo stesso risultato si perviene nel caso $R\zeta_i < 0$, con analogo ragionamento. Essendo $\bar{y}_{(x)}^{(s)} = \sum_{i=1}^{n} c_i\, y_i^{(s)} = \sum_{i=1}^{n} (c_i\, y_i)\,(y_i^{(s)}\, y_i^{-1})$ dalle (6') risulta che è limitata in $(x_0, +\infty)$ $\bar{y}_{(x)}^{(s)}$ $(s = 0, 1, \cdots, n-1)$. L'integrale (7) della (2), dove le $c_i(x)$ sono definite dalle (9), è quindi stabile e il teorema è dimostrato.

Osservazione. – Dalla dimostrazione fatta segue, indipendentemente dall'ipotesi che per *tutte* le radici ζ_i della (1) sia $R\zeta_i \neq 0$, che quando sia $R\zeta_j \neq 0$ l'espressione $c_j(x) \cdot y_j(x)$ è *limitata*, dove $c_j(x)$ è data dalle (9).

4. – Passiamo a considerare il caso in cui sia $R\zeta_i = 0$.

Teorema IV. – *Se è soddisfatta la condizione* α) *e l'equazione caratteristica* (1) *ha radici tutte distinte e se è* $b = 0$, *allora l'equazione non omogenea* (2) *ha almeno un integrale stabile.*

Posta la (7), se è $R\zeta_i = 0$ si assuma

$$c_i(x) = \int_{x_i}^{x} e^{-\zeta_i x}\, \varphi(x)\, \frac{\Delta_i(x)}{\Delta(x)}\, dx .$$

È, per la condizione α),

$$|c_i(x)\, y_i(x)| \leq N_i M_i \int_{x_i}^{x} |\varphi(x)|\, dx < K_i .$$

Come nel teorema III si prova che sono limitati $|c_i(x)\, y_i^{(s)}(x)$ $(s = 1, \cdots, n-1)$ e si conclude nello stesso modo.

5. Teorema V. – *Se è soddisfatta la condizione* α) *e se l'equazione caratteristica* (1) *ha radici tutte distinte nessuna delle quali sia nulla, allora l'equazione non omogenea* (2) *ha almeno un integrale stabile.*

Per il Teorema IV l'equazione

$$E[a_i, \varphi_i; y] = \varphi(x)$$

ha almeno un integrale stabile e basterà quindi provare che ne ha almeno uno anche l'equazione

$$E[a_i, \varphi_i; y] = b. \tag{12}$$

Poichè la (1) non ha radici nulle è $a_n \neq 0$ e per il teorema IV l'equazione

$$E[a_i, \varphi_i; y] = -\frac{b}{a_n}\varphi_n(x)$$

ha almeno un integrale stabile $y^*(x)$. La funzione $y^*(x) + \frac{b}{a_n}$ è quindi un integrale stabile della (12) e il teorema è dimostrato.

6. I teoremi III, IV, V, si possono riassumere nel seguente

TEOREMA VI. – *Se è soddisfatta la condizione* α) *e se l'equazione caratteristica* (1) *ha radici tutte distinte, nessuna delle quali sia nulla, allora l'equazione non omogenea* (2) *ha sempre almeno un integrale stabile; lo stesso accade quando la* (1) *ha una radice nulla purchè sia anche* $b = 0$.

OSSERVAZIONE. – Qualora oltre alla condizione α) si fosse supposto che fosse soddisfatta anche la β) e l'ulteriore condizione $\lim_{x\to+\infty} \varphi_i(x) = 0$ il teorema V si sarebbe potuto dedurre da un teorema di Perron-Cesari [8].

7. LEMMA I. – *Se è soddisfatta la condizione* α) *e se l'equazione caratteristica* (1) *ha radici tutte distinte, ogni eventuale integrale stabile* $\bar{y}(x)$ *della* (2) *si può rappresentare con*

$$\bar{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_i(x), \tag{13}$$

in cui le $c_i(x)$ *sono definite dalle* (9) *se è* $R\gamma_i \neq 0$ *e da*

$$c_i(x) = \int_{x_i}^{x} e^{-\gamma_i x}[b + \varphi(x)]\frac{\Delta_i(x)}{\Delta(x)}\,dx \quad \text{per } R\gamma_i = 0. \tag{9'}$$

Ogni integrale della (2) si può mettere sotto la forma

$$\bar{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_i(x) + \Sigma h_j y_j(x)$$

(8) Ved. L. CESARI, *Proprietà asintotiche delle equazioni differenziali lineari ordinarie.* «Rend. Sem. Mat. Roma», ser. IV, vol. 3°, pp. 171–193 (1939). Su questo teorema si ritornerà nella seconda e terza di queste Note (Parte II).

dove le h_j sono costanti ed è $R\zeta_j > 0$; se $\bar{y}(x)$ è stabile deve inoltre essere $h_j = 0$. Infatti per l'osservazione del n. 3 se $R\zeta_i \neq 0$ l'espressione $c_i \cdot y_i$ è limitata; per la (9') se è $R\zeta_i = 0$ si ha

$$|c_i y_i| \leq N_i M_i \left[|b| (x - x_i) + \int_{x_0}^{+\infty} |\varphi(x)| dx \right]$$

e quindi $\left| \sum_{i=1}^{n} c_i y_i \right|$ per $x \to +\infty$ è al più infinita dell'ordine di x. Se fosse $h_j \neq 0$ poiché gli ζ_i sono distinti fra loro $|\Sigma h_j y_j(x)|$ per le (6) diverrebbe infinita d'ordine esponenziale e $y(x)$ non sarebbe stabile.

Meccanica. — *Moto plastico–viscoso dei ghiacciai.* Nota di P. Udeschini, presentata (*) dal Socio C. Somigliana.

Per determinare la massa di un ghiacciaio è necessario eseguire il rilievo del fondo mediante difficili trapanazioni, o mediante mezzi acustici. Il Somigliana ha mostrato come una sua teoria sul moto dei ghiacciai permetta di rilevare il fondo del ghiacciaio, quando si conosca la velocità superficiale del ghiaccio (1). Si ha così modo di entrare nel vivo di un'altra importante questione geologica: la determinazione della configurazione delle valli glaciali.

Questa teoria del Somigliana si fonda sull'ipotesi di considerare che il movimento del ghiacciaio sia quello di un fluido viscoso pesante di trascurabile compressibilità. Mi sembra ora naturale il domandarci: il ghiaccio dei ghiacciai è proprio da considerare un fluido viscoso o piuttosto è da trattare come una massa plastico–viscosa ? L'esperienza non è in grado di dirci con esattezza quale sia veramente la natura del ghiaccio dei ghiacciai e non ci dà una sicura conoscenza delle proprietà fisiche e meccaniche del ghiaccio (2).

Il considerare il ghiacciaio come un continuo più generale di un semplice fluido viscoso, oltre a dare una significativa estensione alle belle ricerche di Somigliana, dà agli studi teorici maggior possibilità di adeguarsi all'esperienza: infatti, invece di disporre di due soli parametri, densità e coefficiente di viscosità, caratteristici del continuo viscoso, nello schema plastico–viscoso si può disporre di tre parametri caratteristici: la densità, il coefficiente di viscosità e il coefficiente di plasticità. Ma c'è di più: come mostrerò in questa mia ricerca, e in un'altra più estesa in corso di pubblicazione nel « Bollettino del Comitato Glaciologico », la plasticità, anche se tenue, porta necessariamente alla presenza di un « cuore » che si dispone attorno ai punti dove la velocità di scorrimento è stazionaria (tipicamente massima). Questo « cuore » scorre rigidamente e se raggiunge il fondo del ghiacciaio non può aderirvi, e pro-

(*) Nella seduta del 12 aprile 1947.

(1) C. Somigliana, *Sulla profondità dei ghiacciai*. « R. Acc. Lincei », vol. 30, 1921.

(2) M. Lagally, *Mechanik und Thermodynamik des stationären Gletschers*. Leipzig, 1934.

voca quindi un'erosione del terreno. Ora esistono profili di questa natura; anzi, è caratteristica delle valli glaciali di erosione la presenza di un canale centrale, il così detto truogolo (Trog, Trough), e vorrei porre questo problema ai Glaciologi perchè abbiano ad esaminare i casi in cui queste deduzioni possono essere applicate, discriminando i casi dubbi in cui la forma del profilo può dipendere da altre cause geologiche e morfologiche.

Ma abbandonare la teoria viscosa per una teoria plastico-viscosa, porta dal punto di vista matematico a gravi complicazioni dovute sopratutto al fatto che le equazioni indefinite cessano di essere lineari. Per superare tali difficoltà, mi limiterò a considerare i ghiacciai come fluidi viscosi lievemente plastici. La linearità delle equazioni indefinite può in queste ipotesi ripristinarsi, e si può ricondurre alle quadrature la risoluzione del problema fisico-matematico consistente nella determinazione del profilo di una sezione del ghiacciaio, quando sia nota la velocità superficiale. Constaterò come, a parità di velocità superficiale, il profilo da me ottenuto poco si scosti da quello di Somigliana, meno che in corrispondenza ai punti dove la velocità superficiale è stazionaria (tipicamente massima); qui, anzi, la soluzione plastico-viscosa perde significato. Corrispondentemente, gli sforzi nel continuo non raggiungono i limiti di plasticità e il continuo cessa di fluire plasticamente: nasce così quello che ho chiamato il « cuore » del ghiacciaio, capace di provocare la su accennata erosione sul fondo.

1. POSIZIONE DEL PROBLEMA. – Il movimento del ghiacciaio avvenga in un canale a sezione qualsiasi, la superficie libera del ghiaccio sia piana e con inclinazione α sull'orizzontale, inclinazione uguale a quella del canale. Si consideri un sistema di assi di riferimento cartesiani di origine O in un punto qualsiasi della superficie libera, l'asse x (che diremo anche x_1) è parallelo alla direzione del canale, l'asse y (x_2) nel piano della superficie libera del ghiaccio e normale ad x, l'asse z (x_3) normale ai due assi precedenti e volta verso il basso. Una sezione qualunque col piano y, z è rappresentata da una curva qualunque del piano, limitata superiormente da una porzione dell'asse y.

Diciamo $\boldsymbol{v}$ la velocità del ghiaccio in un punto generico, v_1, v_2, v_3, le sue componenti cartesiane, $\mathbf{F}$ la forza unitaria di volume che si riduce al peso dell'unità di volume. Nel riferimento cartesiano avremo: $F_1 = kg \operatorname{sen} \alpha$, $F_2 = 0$, $F_3 = kg \cos \alpha$, dove k è la densità del ghiaccio e g l'accelerazione di gravità. Facciamo le seguenti ipotesi del tutto naturali e anche conformi ai dati sperimentali (3):

1° Sia nulla la componente trasversale della velocità cioè $v_2 = 0$.

2° Sia trascurabile la variazione di moto nella direzione del canale (asse x) cioè si supponga: $v_{1/1} = 0$, $v_{3/1} = 0$ (3).

3° l'accelerazione in un punto sia di un ordine di grandezza trascurabile di fronte all'accelerazione di gravità.

(3) La lineetta precedente indici è simbolo di derivazione, $v_{1/1} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \cdots$

4° Nella direzione del movimento anche la pressione vari assai poco, almeno in prossimità della sezione che si considera.

5° Sulla superficie libera del ghiaccio l'attrito con l'aria sia nullo, mentre sul rimanente contorno il coefficiente d'attrito sia grande (4).

In queste ipotesi ci proponiamo di risolvere il problema seguente: determinare il profilo del canale glaciale quando siano assegnati (mediante l'osservazione) i valori che la velocità $\boldsymbol{v}$ assume in superficie. Più precisamente: determinare la curva di profilo della sezione del canale col piano y, z, quando siano assegnati i valori della velocità $\boldsymbol{v}$ sulla porzione di asse y compresa tra i bordi del canale di larghezza 2L, porzione che supporremo limitata dai valori $+\mathrm{L}$ e $-\mathrm{L}$.

Il Somigliana risolve il problema proposto identificando il movimento del ghiacciaio col movimento *stazionario* di un fluido *viscoso incomprimibile*. Così, ad esempio, nel caso in cui la velocità superficiale ha un andamento di tipo parabolico, cioè massima nel punto medio della sezione, mentre è minima agli estremi, dove è piccola rispetto alla velocità nel centro (velocità minima che supporremo nulla per l'ipotesi 5ª), il profilo è dato da una semiellisse.

2. Equazioni del fluire plastico–viscoso dei ghiacciai. – Per un fluido plastico–viscoso il tensore simmetrico degli sforzi p_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ si può decomporre in tre parti: la prima isotropa è caratterizzata dalla pressione p, la seconda è caratterizzata dal tensore simmetrico q_{ik} che reca il contributo della viscosità, ed è proporzionale alla velocità di deformazione, cioè se μ è il coefficiente di viscosità, $q_{ik} = -2\mu\,\eta_{ik} = -\mu\,(v_{i/k} + v_{k/i})$, la terza è caratterizzata dal tensore simmetrico r_{ik} che reca il contributo della plasticità e dipende dalla velocità di deformazione: $r_{ik} = -2m\,\eta_{ik}$, dove però m, anche per continui omogenei, è una funzione *a priori* incognita e non una caratteristica del corpo come è invece il coefficiente di viscosità. Si ritiene poi in generale, per condizione di plasticità, che il tensore degli sforzi plastici abbia invariante quadratico costante, sia cioè $\sum_{ik}^{3} r_{ik}\,r^{ik} = \frac{4}{3}h^2$, dove h è la costante di plasticità.

In base a ciò, tenendo conto delle ipotesi del numero precedente, le equazioni che regolano il movimento della massa plastico–viscosa del ghiacciaio, in ultima analisi, si possono così riassumere:

$$(1)\qquad (\mu + m)\,\Delta v + m_{/2}\,v_{/2} + m_{/3}\,v_{/3} + kg\,\mathrm{sen}\,\alpha = 0\ ,\quad m^2\left[(v_{/2})^2 + (v_{/3})^2\right] = h^2$$

dove si è indicato semplicemente con h^2 la costante $\frac{2}{3}h^2$, con v la componente di velocità v_1 secondo la direzione del canale (asse x), l'unica diversa da zero, e $\Delta v = v_{/22} + v_{/33}$. Queste due equazioni riguardano soltanto le

(4) Potremo ritenere la velocità di scorrimento del ghiaccio a contatto della roccia costante, anzi per comodità nel seguito supporremo tale costante nulla; resta però inteso che i risultati, almeno qualitativamente, valgono anche per velocità al contorno non nulla.

due incognite v ed m, funzioni solo di y e z. Le equazioni al contorno sono: $v_{/3} = 0$ per $z = 0$, $v = 0$ sul fondo.

Per $h = 0$, dalla seconda delle (1), si deduce $m = 0$ e la prima coincide con l'equazione di movimento $\mu \Delta v = -kg \operatorname{sen} \alpha$ ottenuta dal Somigliana nell'ipotesi che il ghiaccio si comporti come un fluido viscoso.

3. DETERMINAZIONE DEL PROFILO. – Supponiamo di conoscere, attraverso determinazioni sperimentali, la distribuzione di velocità sulla superficie libera del ghiaccio, sia cioè per $z = 0$: $v = \varphi(y)$. Ignoto sia invece il profilo del ghiacciaio.

Ci proponiamo, nota la funzione $\varphi(y)$ che dà la distribuzione di velocità superficiale nel tratto di asse y tra $-L$ e $+L$, di determinare il profilo: è questo il problema che Somigliana ha risolto considerando il ghiacciaio come un fluido viscoso, e che io qui affronto ritenendo che il ghiacciaio fluisca come una massa plastico-viscosa. Si tratta in primo luogo di determinare in ogni punto della sezione del ghiacciaio la velocità v in funzione di y e z, sapendo che v soddisfa all'equazione alle derivate parziali del secondo ordine che si ottiene eliminando m fra le (1), e che per di più, per $z = 0$, soddisfa alle due condizioni seguenti: $v = \varphi(y)$, $v_{/3} = 0$.

È questo un classico problema di Cauchy, e le due precedenti condizioni individuano univocamente una soluzione delle (1) in una striscia contenente l'asse y. Trovata così $v = v(y, z)$, non c'è che da porre la seconda condizione di contorno per determinare il profilo del ghiacciaio. In altre parole, il profilo del ghiacciaio ha la seguente equazione: $v(y, z) = 0$, dove $v(y, z)$ è la funzione soluzione delle (1) e che ubbidisce alle relative condizioni al contorno.

4. CUORE DEL GHIACCIAIO. – Abbiamo detto come si possa dedurre la curva di profilo di una sezione del canale glaciale, nota come dato d'osservazione la distribuzione di velocità lungo il tratto dell'asse orizzontale y compreso tra i bordi del canale. La funzione φ definita nell'intervallo precedente, che definisce tale distribuzione, deve però annullarsi negli estremi in virtù della seconda condizione di contorno.

A questo punto si presenta spontanea un'osservazione che è di fondamentale importanza nello studio del moto plastico-viscoso di un ghiacciaio. Ecco come: la funzione φ che dà la distribuzione di velocità superficiale, dovendosi annullare agli estremi, deve presentare nell'intervallo considerato almeno un punto di massimo, nel quale punto è massima la velocità. È allora nulla la derivata della velocità rispetto alla coordinata y, nonchè, per la prima condizione di contorno, la derivata rispetto a z. Essendo nulle ambedue le derivate della velocità rispetto alle coordinate, nulli risultano anche gli sforzi plastico-viscosi. In questo punto non può dunque l'invariante quadratico degli sforzi plastici uguagliarsi ad una costante positiva $2h^2$, com'è richiesto dalla teoria della plasticità. Ma v'ha di più: grazie alla continuità degli sforzi, esisterà certamente una regione contenente il punto di massimo, o delle regioni

contenenti eventuali punti di stazionarietà, dove l'invariante quadratico degli sforzi stessi è minore di $2h^2$.

In questa regione il ghiaccio non potrà più fluire come un corpo plastico–viscoso, ma piuttosto si comporterà come un corpo elastico. Questa parte di ghiaccio, per cui non vale più la soluzione plastica precedentemente citata tutt'affatto in generale, costituisce per così dire il « cuore » del ghiacciaio. Questo cuore può muoversi di moto rigido trascinato dalla rimanente parte di ghiaccio (dove l'invariante quadratico degli sforzi plastici è uguale a $2h^2$) che fluisce plastico–viscosamente snervato dagli sforzi che lo sollecitano. Potrà il cuore del ghiacciaio essere limitato ad una porzione di ghiaccio che non raggiunge il fondo ed allora la soluzione del problema plastico–viscoso potrà fornirci in modo completo il profilo del fondo stesso, oppure potrà giungere fin sul fondo, ed allora la soluzione plastico–viscosa non ci potrà fornire la determinazione completa del fondo. Quest'ultimo caso è particolarmente interessante, perchè il cuore del ghiacciaio, grazie al suo moto rigido, compirà opera di erosione sul terreno producendo un avvallamento.

5. Influenza di una lieve plasticità. – Poniamo $v = u + w$, dove u è da ritenersi nota quale soluzione dell'equazione di Somigliana e w è una velocità piccola rispetto ad u. Ritenendo allora h quantità piccola, in una prima approssimazione otterremo da (1):

$$\Delta v = v_{/22} + v_{/33} = -\mathrm{H} - \Phi(y, z) \tag{2}$$

dove $\Phi(y, z)$ è una funzione nota quando si assegni la u soluzione dell'equazione di moto nel caso di Somigliana, cioè:

$$\Phi(y, z) = \frac{1}{\mu + m}(-m\mathrm{H} + m_{/2}\, u_{/2} + m_{/3}\, u_{/3}), \quad \text{e} \quad \mathrm{H} = \frac{kg \operatorname{sen} \alpha}{\mu}.$$

Le equazioni al contorno restano sempre le medesime.

Si dimostra che la funzione $v(y, z)$ è perfettamente determinata dai suoi valori $\varphi(y)$ sull'asse y tra $+\mathrm{L}$ e $-\mathrm{L}$ e dai valori della sua derivata normale lungo lo stesso intervallo, pure noti nel caso in esame, in quanto tutti nulli per la prima condizione di contorno. Risulta allora:

$$v = \varphi(y) + \frac{z^2}{2}\left(-\mathrm{H} - \Phi(y, 0) - \frac{d^2\varphi(y)}{dy^2}\right) + \frac{z^3}{3!}\left(-\frac{\partial \Phi(y, z)}{\partial z}\right)_{z=0} + \cdots \tag{3}$$

nella quale i coefficienti delle potenze di z sono funzioni note della y; e attraverso la serie precedente si ha il modo di costruire effettivamente la funzione $v(y, z)$. Costruita la v mediante i dati superficiali, l'equazione della curva profilo della sezione sarà, per la seconda condizione di contorno, $v(y, z) = 0$.

Mostriamo attraverso ad un esempio, che può rispecchiare molti casi concreti, come si possa applicare il procedimento illustrato precedentemente. Supponiamo che la velocità superficiale del canale glaciale sia massima nel punto medio della sezione e tenda a zero avvicinandosi ai bordi laterali, e si

distribuisca con legge parabolica. L'equazione che dà la velocità v lungo il tratto orizzontale di asse y compreso tra $-L$ e $+L$ (L semilarghezza del canale) sarà: $v = \varphi(y) = v_0\left(1 - \frac{y^2}{L^2}\right)$ per $z = 0$, essendo v_0 il valore massimo della velocità. La velocità v in ogni punto del campo di movimento sarà espressa dalla serie (3) nella quale al posto di φ si pone il valore precedente.

Lo sviluppo non è però valido in un opportuno intorno dell'origine, centro del canale dove è massima la velocità, ed è precisamente questo intorno che delimita la sezione del cuore del ghiacciaio. Osservo subito che per $\Phi = 0$, trascurando cioè l'influenza della plasticità, si ritrova per la velocità l'espressione data dal Somigliana, e quindi il profilo semiellittico del canale glaciale. Nel caso generale $\Phi \neq 0$ nel calcolo di v ci limiteremo nella serie ai primi termini dello sviluppo trascurando le potenze di z dalla quarta in poi. Si ottiene così: $\left(\text{ponendo } a = \frac{2v_0}{L^2} \quad , \quad b = H - a\right)$

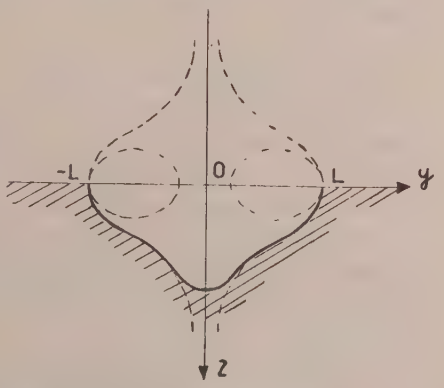
$$(4) \qquad v = v_0 - \frac{v_0}{L^2} y^2 + \frac{z^2}{2}\left(-H + \frac{2v_0}{L^2} \pm \frac{hb}{\mu a y \pm h}\right)$$

e queste due espressioni si mutano l'una nell'altra mutando $+y$ in $-y$. Le curve del piano y, z rappresentate dalle due equazioni $v(y, z) = 0$ sono atte a definire il profilo del canale in un campo però che non contenga l'asse z. La prima dà per il profilo la cubica di equazione:

$$(5) \qquad \frac{y^2}{L^2} + \frac{z^2}{M^2} - \frac{z^2}{M^2} \frac{hL^2}{2\mu v_0 y + hL^2} = 1$$

essendo $\frac{1}{M^2} = \frac{H}{2v_0} - \frac{1}{L^2}$. La seconda fornisce la cubica simmetrica della precedente rispetto all'asse z (l'equazione si ottiene mutando $+y$ in $-y$).

Si osserva immediatamente che per $h = 0$, con che si annulla l'influenza della plasticità, le equazioni delle due cubiche precedenti coincidono con l'equazione dell'ellisse di Somigliana, quindi si ritrova un profilo semiellittico di semiassi L, M.



La cubica (5) è costituita da un ramo impari più un ovale come in figura. Il ramo impari taglia l'asse y nel punto $y = L$, mentre l'ovale nei punti $y = -L$, $y = \frac{-hL^2}{2\mu v_0}$.

Simmetricamente all'asse z si ha la seconda cubica uguale alla precedente. Pertanto a definire il profilo del canale potremo considerare: 1° i due tratti inferiori dei rami impari, oppure 2° i due semiovali inferiori. Restano così definiti *a priori* due profili possi-

bili, almeno nel campo di validità della serie (4), cioè in prossimità della superficie libera con esclusione dell'origine.

In prossimità dei bordi entrambi risultano prossimi al profilo semiellittico di Somigliana, se ne scostano invece avvicinandosi al centro, dove non è più valida la soluzione plastico–viscosa trovata: il primo risulta più profondo di quello di Somigliana, il secondo meno profondo. Lungo l'asse della sezione (asse z) del ghiacciaio non vi è più il moto plastico–viscoso, ma il moto rigido del « cuore » del ghiacciaio. Dei due profili precedenti soltanto il primo può essere accettabile, se si ritiene il cuore sufficientemente ristretto: quello costituito dai due rami impari.

In tal modo il cuore del ghiacciaio risulta costituito da una regione abbastanza ristretta che contiene l'asse z, e si sprofonda fino a raggiungere il fondo, chiudendo il profilo del ghiacciaio.

Mentre esternamente al cuore il ghiaccio aderisce alle pareti, cioè la sua velocità è nulla in tali punti, sul fondo del cuore ciò non può aver luogo, perchè il cuore trasla uniformente nella direzione dell'asse x. Il cuore eserciterà pertanto sul fondo un'azione di erosione limitata alla parte centrale del ghiacciaio. Per di più, al di sotto della superficie libera, il cuore sopravanza la rimanente massa del ghiaccio che fluisce plastico–viscosamente.

In tal modo l'influenza della plasticità si manifesta:

1° in un abbassamento del fondo rispetto a quanto risulta dalla teoria di Somigliana, abbassamento piccolo ai bordi e più sensibile verso il centro.

2° nella presenza di un canale centrale di erosione dovuto all'azione del « cuore ».

Meccanica dei fluidi. — *Sulla determinazione del profilo «ottimo» per le pale dei compressori assiali.* Nota di C. Ferrari, presentata (*) dal Socio M. Panetti.

1. Chiamiamo « profilo ottimo », per un dato valore del coefficiente di portanza c_p, quello che realizza il prescritto valore di c_p con una distribuzione della *forza portante* sul profilo stesso la più uniforme possibile. Scopo di questa ricerca è appunto quello di determinare, per una data schiera, la forma che deve avere il profilo perchè, per il coefficiente di portanza che si vuole ottenere, e per un dato parametro di spessore, il diagramma delle depressioni sul dorso, e quello delle sovrapressioni sulla faccia siano *uniformi*, nei limiti dell'approssimazione consentita dalla teoria dei profili sottili e poco curvi.

2. Supponiamo i profili abbastanza sottili, perchè, per il calcolo delle velocità del campo in un punto generico P del contorno di un profilo, sia lecito sostituire la schiera dei vortici aderenti ai vari profili con *singolarità*

(*) Nella seduta dell'8 marzo 1947.

(vortici e sorgenti) distribuite lungo le corde dei profili stessi, e assumere la velocità in P coincidente con quella esistente nel punto corrispondente P', proiezione ortogonale di P sulla corda stessa. Poniamo la condizione, che l'*incremento* di velocità, prodotto nel campo di corrente uniforme V_∞ dalla schiera dei profili, abbia nei punti del contorno, che appartengono al dorso, una componente secondo l'asse x, assunto coincidente colla corda ed orientato come è indicato in fig. 1, costante ed uguale a u_0, e nei punti del contorno, che appartengono alla faccia, una componente secondo il medesimo asse, pure costante ed uguale a u_1.

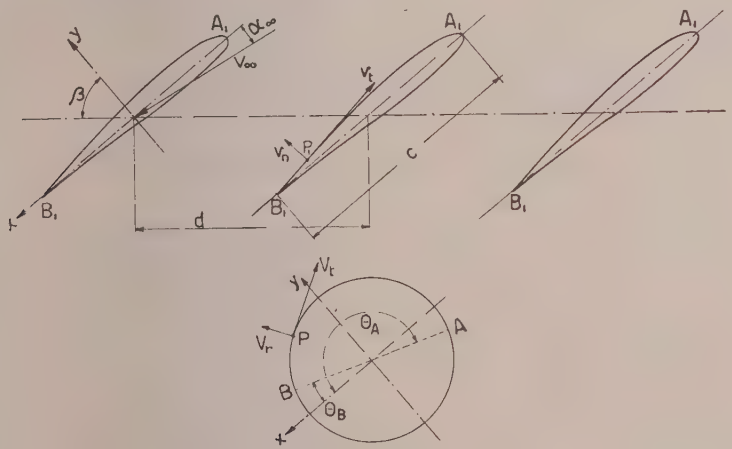


Fig. 1.

Trasformiamo conformemente il piano della variabile complessa z della schiera nel piano della variabile complessa ζ per mezzo della

$$(1) \qquad z = \frac{d}{2\pi}\left[e^{-i\beta}\log\frac{a+k\zeta}{a-k\zeta} + e^{i\beta}\log\frac{\zeta+ak}{\zeta-ak}\right],$$

in cui β è l'*obliquità* della schiera (fig. 1), d il passo di questa, e k un parametro numerico, che dipende dal rapporto $\frac{c}{d}$, tra la lunghezza $c = 2l$ di ciascuna corda, e la distanza d già definita, secondo la

$$(2) \qquad \frac{c}{d} = \frac{2}{\pi}\left[\cos\beta\log\frac{\sqrt{1+k^4+2k^2\cos 2\beta}+2k\cos\beta}{1-k^2} + \right.$$
$$\left. + \operatorname{sen}\beta\operatorname{arctg}\frac{2k\,\operatorname{sen}\beta}{\sqrt{1+k^4+2k^2\cos 2\beta}}\right].$$

Alla schiera delle corde A_1, B_1, dei profili corrisponderà il cerchio σ di raggio a piano ζ, e alla componente v_t della velocità secondo la tangente al contorno la componente V_t tangente a σ data dalla

$$(3) \qquad V_t = v_t\frac{d}{2\pi a}|F(\theta)|$$

in cui

$$(4) \qquad F(\theta) = \frac{4k(1+k^2)}{(1+k^2)^2 - 4k^2\cos^2\theta}\,\frac{\cos\theta}{\cos\theta_B}\,\mathrm{sen}\,(\theta - \theta_B)$$

essendo θ_A e θ_B le anomalie dei punti A, B di σ corrispondenti ai punti A_1 e B_1, definite dalle

$$\mathrm{tg}\,\theta_B = \frac{1-k^2}{1+k^2}\,\mathrm{tg}\,\beta \quad ; \quad \theta_A = \theta_B + \pi .$$

Poichè è $v_t = -u_0$ per i punti del dorso; $v_t = u_1$ per i punti della faccia, ne risulta:

$$(3') \qquad \begin{cases} V_t = -u_0\,\dfrac{d}{2\pi a}\,F(\theta) & \text{per} \quad \theta_B \leqq \theta \leqq \theta_B + \pi \\ V_t = -u_1\,\dfrac{d}{2\pi a}\,F(\theta) & \text{per} \quad \theta_B + \pi \leqq \theta \leqq \theta_B + 2\pi . \end{cases}$$

D'altra parte, se $\dfrac{dy}{dx}$ è il coefficiente angolare della retta tangente al contorno del profilo in un punto generico di questo, la componente della velocità secondo la normale *esterna* a detto contorno, per una incidenza α_∞, rispetto alla corda, della velocità indisturbata $\boldsymbol{V}_\infty$, è $V_\infty\left(\dfrac{dy}{dx} - \alpha_\infty\right)$, e pertanto nei punti corrispondenti di σ la componente radiale risulta

$$(5) \qquad V_r = V_\infty\left(\frac{dy}{dx} - \alpha_\infty\right)\frac{d}{2\pi a}\,F(\theta).$$

3. La componente tangenziale V_t, data dalle (3'), si può considerare come somma di due velocità tangenziali V_t' e V_t'': la prima, con circuitazione complessiva *nulla*, corrispondente al campo di moto, che ha sul cerchio la distribuzione di velocità radiali definita dalla (5); la seconda, con circuitazione uguale e dello stesso segno di quella corrispondente alla V_t, prodotta dalle coppie di vortici di circuitazione Γ nei punti di ascissa $-\dfrac{a}{k}$ e $\dfrac{a}{k}$, e di circuitazione $-\Gamma$ nei punti di ascissa $\pm ak$. Ora è, come è stato indicato in una Nota precedente [1]

$$(6) \qquad V_t'' = -\frac{\Gamma}{\pi a}\,\frac{1-k^4}{(1+k^2)^2 - 4k^2\cos^2\theta}$$

e di conseguenza risulta

$$(7) \qquad V_t' = V_t - V_t'' = v_t\,\frac{d}{2\pi a}\,|F(\theta)| + \frac{\Gamma}{\pi a}\,\frac{1-k^4}{(1+k^2)^2 - 4k^2\cos^2\theta}.$$

(1) C. Ferrari, *Sulla teoria delle schiere di profili alari*. « Rendiconti della Accademia Nazionale dei Lincei », Febb. 1947.

D'altra parte, la distribuzione di velocità tangenziali con circuitazione nulla, corrispondente alla distribuzione radiale (5), è definita dall'*integrale di Poisson*

$$V_r(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_t' \operatorname{cotg}\frac{\theta-\theta_1}{2}\,d\theta, \tag{8}$$

e poichè è

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1+k^2)^2 - 4k^2\cos^2\theta} \operatorname{cotg}\frac{\theta-\theta_1}{2}\,d\theta = 0,$$

la (8) si riduce alla

$$V_r(\theta) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{d}{2\pi a}\int_0^{2\pi} v_t\,|\,F(\theta)\,|\operatorname{cotg}\frac{\theta-\theta_1}{2}\,d\theta$$

ossia, se si tiene conto delle (3')

$$V_r(\theta) = -\frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{2\pi a}\,u_0\int_{\theta_B}^{\theta_B+\pi} F(\theta)\operatorname{cotg}\frac{\theta-\theta_1}{2}\,d\theta - \tag{9}$$

$$-u_1\,\frac{1}{2\pi}\,\frac{d}{2\pi a}\int_{\theta_B+\pi}^{\theta_B+2\pi} F(\theta)\operatorname{cotg}\frac{\theta-\theta_1}{2}\,d\theta.$$

4. Eseguito il calcolo degli *integrali di Poisson* a secondo membro ricaviamo:

$$V_r(\theta) = \frac{1}{\pi}\,\frac{d}{2\pi a}\,k(1+k^2)\cos\beta\,\frac{\operatorname{tg}\theta_B}{k^2(\lambda^2-1)}\left\{\left(\frac{u_0-u_1}{2}H_1 - u_1H_1'\right)\frac{1+X_1^2}{1+b^2X_1^2} + \right. \tag{10}$$

$$+\left(\frac{u_0-u_1}{2}H_2 - u_1H_2'\right)\frac{X_1}{1+b^2X_1^2} + \left(\frac{u_0-u_1}{2}H_3 - u_1H_3'\right)\frac{1+X_1^2}{1+a^2X_1^2} +$$

$$\left. +\left(\frac{u_0-u_1}{2}H_4 - u_1H_4'\right)\frac{X_1}{1+a^2X_1^2} + 2A_3(1+X_1^2)\log f(X_1)\right\}.$$

in cui è

$$\left.\begin{aligned}
H_1 &= \frac{1+b^2}{b^2-a^2}\log\frac{\frac{1}{X_0^2}+a^2}{X_0^2+a^2} + \frac{2}{a}\,\frac{2\operatorname{cotg}\theta_B}{a^2-b^2}\left(\operatorname{arctg}\frac{-1}{aX_0} - \operatorname{arctg}\frac{X_0}{a}\right)\\
H_2 &= 2\,\frac{1-b^2}{a^2-b^2}\operatorname{cotg}\theta_B\log\frac{\frac{1}{X_0^2}+a^2}{X_0^2+a^2} + \frac{2}{a}\left(\operatorname{arctg}\frac{-1}{aX_0} - \operatorname{arctg}\frac{X_0}{a}\right)\\
H_3 &= \frac{1+a^2}{a^2-b^2}\log\frac{\frac{1}{X_0^2}+b^2}{X_0^2+b^2} - \frac{2}{b}\,\frac{2\operatorname{cotg}\theta_B}{a^2-b^2}\left(\operatorname{arctg}\frac{-1}{bX_0} - \operatorname{arctg}\frac{X_0}{b}\right)\\
H_4 &= 2\,\frac{a^2-1}{a^2-b^2}\operatorname{cotg}\theta_B\log\frac{\frac{1}{X_0^2}+b^2}{X_0^2+b^2} + \frac{2}{b}\left(\operatorname{arctg}\frac{-1}{bX_0} - \operatorname{arctg}\frac{X_0}{b}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

e

$$(12)\qquad H'_1 = -\frac{\pi}{a}\frac{2\cot g\,\theta_B}{b^2-a^2}\quad;\quad H'_2=\frac{\pi}{a}\quad;\quad H'_3=\frac{\pi}{b}\frac{2\cot g\,\theta_B}{b^2-a^2}\quad;\quad H'_4=\frac{\pi}{b}$$

mentre si è posto

$$(13)\qquad X_1=\cot g\frac{\theta_1}{2}\quad;\quad X_0=\cot g\frac{\theta_B}{2}\quad;\quad a^2=\frac{1+\lambda}{\lambda-1}\quad;\quad b^2=\frac{\lambda-1}{\lambda+1};$$

$$\lambda^2=\left(\frac{1+k^2}{2k}\right)^2$$

$$f(X)=\frac{X_0-X_1}{-X_1-\frac{1}{X_0}}\qquad \text{per}\quad \theta_B+\pi\leq\theta_1\leq 2\pi$$

$$=\frac{X_1-X_0}{X_1+\frac{1}{X_0}}\qquad \text{per}\quad 0\leq\theta_1\leq\theta_B$$

$$=\frac{X_0-X_1}{X_2+\frac{1}{X_0}}\qquad \text{per}\quad \theta_B\leq\theta_1\leq\theta_B+\pi\,.$$

D'altra parte dalla (5) si ha

$$\frac{dy}{dx}-\alpha_\infty=\frac{V_r}{V_\infty}\frac{2\pi a}{d}\frac{1}{F(\theta)}$$

e poichè è, per la (1), $\frac{dx}{d\theta}=-\frac{d}{2\pi}F(\theta)$, si ottiene $\frac{dy}{dx}=-\frac{dy}{d\theta}\frac{2\pi}{d}\frac{1}{F(\theta)}$,

da cui

$$(14)\qquad \frac{dy}{d\theta}=-\frac{d}{2\pi}\alpha_\infty F(\theta)-a\frac{V_r}{V_\infty}\,.$$

Poichè è

$$(15)\qquad 2\frac{u_0-u_1}{V_\infty}=c_p\,,$$

se c_p è il coefficiente di portanza che si vuole ottenere, la (14), tenendo conto della (10), diventa

$$(16)\qquad \frac{d}{d\theta}\left(\frac{y}{c}\right)=-\frac{d}{2\pi c}\alpha_\infty F(\theta)-\frac{1}{\pi}\frac{d}{2\pi c}\frac{(1+k^2)\cos\beta\,\mathrm{tg}\,\theta_B}{k(\lambda^2-1)}\Bigg\{\frac{1}{4}c_p\left[H_1\frac{1+X_1^2}{1+b^2X_1^2}+\right.$$

$$\left.+H_2\frac{X_1}{1+b^2X_1^2}+H_3\frac{1+X_1^2}{1+a^2X_1^2}+H_4\frac{X_1}{1+a^2X_1^2}+2A_3(1+X_1^2)\log f(X_1)\right]-$$

$$-\frac{u_1}{V_\infty}\left[H'_1\frac{1+X_1^2}{1+b^2X_1^2}+H'_2\frac{X_1}{1+b^2X_1^2}+H'_3\frac{1+X_1^2}{1+a^2X_1^2}+H'_4\frac{X_1}{1+a^2X_1^2}\right]\Bigg\}$$

e pertanto, indicando con $\psi(\theta_1)$ il coefficiente di $\frac{1}{4} c_p$ a secondo membro della (16), e con $\psi'(\theta_1)$ il coefficiente di $\frac{u_1}{V_\infty}$, si ha:

$$(17) \qquad \frac{y(\theta)}{c} = \alpha_\infty \left[\frac{x(\theta)}{c} - \frac{x(\theta_B)}{c} \right] -$$

$$- \frac{1}{\pi} \frac{d}{2\pi c} \frac{(1+k^2)\cos\beta \operatorname{tg}\theta_B}{k(\lambda^2-1)} \left[\frac{c_p}{4} \int_{\theta_B}^{\theta} \psi(\theta_1)\, d\theta - \frac{u_1}{V_\infty} \int_{\theta_B}^{\theta} \psi'(\theta_1)\, d\theta_1 \right].$$

Poichè deve essere $y(\theta_A) = y(\theta_B) = 0$, mentre è $x(\theta_A) - x(\theta_B) = -c$, si deduce che il valore dell'incidenza α_∞, per la quale il prescritto valore di c_p può essere ottenuto con distribuzione uniforme della portanza, è dato dalla:

$$(18) \quad \alpha_\infty = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{2\pi c} \frac{(1+k^2)\cos\beta \operatorname{tg}\theta_B}{k(\lambda^2-1)} \left[\frac{c_p}{4} \int_{\theta_B}^{\theta_A} \psi(\theta_1)\, d\theta_1 - \frac{u_1}{V_\infty} \int_{\theta_B}^{\theta_A} \psi'(\theta_1)\, d\theta_1 \right].$$

È poi:

$$(19) \qquad Y(\theta) = \int_{\theta_B}^{\theta} \psi(\theta_1)\, d\theta_1 = \frac{2H_1}{b} (\operatorname{arc\,cotg} bX - \operatorname{arc\,cotg} bX_0) +$$

$$+ \frac{H_2}{1-b^2} \log \frac{(1+b^2X^2)(1+X_0^2)}{(1+b^2X_0^2)(1+X^2)} + \frac{2H_3}{a} (\operatorname{arc\,cotg} aX - \operatorname{arc\,cotg} aX_0) +$$

$$+ \frac{H_4}{1-a^2} \log \frac{(1+a^2X^2)(1+X_0^2)}{(1+a^2X_0^2)(1+X^2)} + 2 \int_{\theta_B}^{\theta} (1+X_1^2) A_3 \log f(X_1)\, d\theta_1$$

$$(20) \quad Y'(\theta) = \frac{2H_1'}{b} (\operatorname{arc\,cotg} bX - \operatorname{arc\,cotg} bX_0) + \frac{H_2'}{1-b^2} \log \frac{(1+b^2X^2)(1+X_0^2)}{(1+b^2X_0^2)(1+X^2)} +$$

$$+ \frac{2H_3'}{a} (\operatorname{arc\,cotg} aX - \operatorname{arc\,cotg} aX_0) + \frac{H_4'}{1-a^2} \log \frac{(1+a^2X^2)(1+X_0^2)}{(1+a^2X_0^2)(1+X^2)}$$

e di conseguenza la (17) diventa:

$$(17') \qquad \frac{y(\theta)}{c} = \alpha_\infty \left[\frac{x}{c} - \frac{x_B}{c} \right] - \frac{1}{\pi} \frac{d}{2\pi c} \frac{(1+k^2)\cos\beta \operatorname{tg}\theta_B}{k(\lambda^2-1)} \left[\frac{c_p}{4} Y - \frac{u_1}{V_\infty} Y' \right].$$

Essendo infine, come è indicato nella Nota (1) già citata:

$$(21) \qquad \frac{x(\theta)}{c} = \frac{d}{\pi c} \left[\cos\beta \log \frac{\sqrt{(1+k^2)^2 - 4k^2\cos^2\theta}}{1+k^2-2k\cos\theta} + \operatorname{sen}\beta \operatorname{arctg} \frac{2k \operatorname{sen}\theta}{1-k^2} \right]$$

le (17') e (21) dànno le equazioni parametriche del contorno del profilo cercato: queste contengono ancora la costante $\frac{u_1}{V_\infty}$ *a priori* non nota. Di essa ci si vale per ottenere che il profilo abbia uno spessore massimo prefissato.

7. Applichiamo il procedimento indicato nei numeri precedenti assumendo i seguenti dati: angolo di obliquità della schiera $\beta = 60°$; rapporto $\frac{c}{d} = 0{,}75$; coefficiente di portanza $c_p = 1$.

Risultano di conseguenza $k = 0{,}6$; $\lambda^2 = 1{,}281$; $\lambda = 1{,}133$; $a = 4$; $b = 0{,}25$; $\theta_B = 39°10'$; $X_0 = 2{,}811$; $\operatorname{cotg}\theta_B = 1{,}227$; si calcolano colle (11) e (12) i coefficienti H e H′ che risultano:

$$H_1 = -0{,}0274 \quad ; \quad H_2 = -0{,}4059 \quad ; \quad H_3 = -1{,}095 \quad ; \quad H_4 = -27{,}86.$$
$$H'_1 = 0{,}121 \quad ; \quad H'_2 = 0{,}785 \quad ; \quad H'_3 = -1{,}935 \quad ; \quad H'_4 = 12{,}59$$

da cui:

$$\frac{2H_1}{b} = -0{,}2192 \quad ; \quad \frac{H_2}{1-b^2} = -0{,}434 \quad ; \quad \frac{2H_3}{a} = -0{,}518 \quad ; \quad \frac{H_4}{1-a^2} = 1{,}86$$

e

$$\frac{2H'_1}{b} = 0{,}9675 \quad ; \quad \frac{H'_2}{1-b^2} = 0{,}836 \quad ; \quad \frac{2H'_3}{a} = -0{,}9675 \quad ; \quad \frac{H'_4}{1-a^2} = -0{,}836.$$

La tabella I allegata dà per i valori vari di θ_1 i corrispondenti valori di $\frac{2x}{c}$ e di

$$\varphi_1 = \operatorname{arc\,cotg} bX - \operatorname{arc\,cotg} bX_0 \quad ; \quad \varphi_2 = \log \frac{(1+b^2X^2)(2+X_0^2)}{(1+b^2X_0^2)(2+X^2)} ;$$

$$\varphi_3 = \operatorname{arc\,cotg} aX - \operatorname{arc\,cotg} aX_0 \quad ; \quad \varphi_4 = \log \frac{(1+a^2X^2)(1+X_0^2)}{(1+a^2X_0^2)(1+X^2)}$$

$$\varphi'_5 = 2(1+X_1^2)A_3 \log f(X_1) \quad ; \quad \varphi_5 = \int_{\theta_B}^{\theta} \varphi'_5(\theta_1)\, d\theta_1 .$$

Ne risultano i valori di $Y(\theta)$ e di $Y'(\theta)$ dati nella stessa tabella I.

Posto $\frac{u_1}{V_\infty} = 0$, poichè è risultato che per $\theta = \theta_A = 219°10'$ è $Y = -1{,}25$, si ha:

$$\alpha_{1\infty} = \frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{0{,}75}\,\frac{1}{2\pi}\,\frac{1{,}36 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}815}{0{,}6 \cdot 0{,}281}\,1{,}25 = 0{,}07\ (= 4°)$$

e quindi si ricava, che, per detto valore di $\frac{u_1}{V_\infty}$, è:

$$(22) \qquad \frac{2y_1}{c} = 0{,}07\left[\frac{2x}{c} - \frac{2x_B}{c}\right] - \frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{2\pi \cdot 0{,}75}\,\frac{1{,}36 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}815}{0{,}6 \cdot 0{,}281}\,Y =$$

$$= 0{,}07\left(\frac{2x}{c} - \frac{2x_B}{c}\right) - 0{,}1125\,Y .$$

Si ottengono così i valori di $\frac{2y_1}{c}$ per i vari θ, che sono riportati nella stessa tabella I, e ne risulta la forma del profilo I rappresentato nella fig. 2.

TABELLA I.

$\theta =$	39° 10′	60°	75°	90°	105°	120°	150°	165°	180°	195°	210°
$\frac{2x}{c}$	1	0,958	0,895	0,805	0,695	0,554	0,129	0,26	— 0,595	— 0,86	— 0,98
φ_1	0	0,206	0,296	0,353	0,425	0,468	0,553	0,585	0,613	0,648	0,683
φ_2	0	0,57	0,8925	1,152	1,3582	1,5248	1,7198	1,767	1,7846	1,767	1,7198
φ_3	0	0,055	0,1015	0,156	0,228	0,323	0,662	0,992	1,482	1,97	2,292
φ_4	0	— 0,1557	— 0,3152	— 0,5214	— 0,782	— 1,1034	— 1,965	— 2,436	— 2,66	— 2,436	— 1,965
φ_5'	$-\infty$	— 0,204	— 0,0414	0,1526	0,404	+ 0,744	2,2	3,54	4,132	2,7	0,952
φ_5	0	— 0,055	— 0,104	— 0,084	0	0,131	0,865	1,62	2,62	3,51	4,03
Y	0	— 0,7277	— 1,154	— 1,711	— 2,256	— 2,848	— 4	— 4,309	— 4	— 2,958	— 1,71
Y′	0	0,8052	1,197	1,591	1,981	2,34	2,9745	3,126	2,87	2,24	1,53
$\frac{2y_1}{b}$	0	0,0791	0,127	0,179	0,2324	0,2888	0,39	0,397	0,3384	0,203	0,054
$\frac{2y_2}{c}$	0	0,0879	0,1278	0,1666	0,2036	0,2354	0,28	0,2716	0,2212	0,1385	0,0457

Segue: TABELLA I.

$\theta =$	225°	240°	270°	300°	330°	345°	360°	15°	30°	38°	40°
$\frac{2x}{c}$	— 0,985	— 0,96	— 0,805	— 0,543	— 0,149	0,218	0,595	0,86	0,99		
φ_1	0,718	0,768	0,858	1,023	1,343	1,703	2,183	2,665	3,001		
φ_2	1,637	1,5248	1,152	0,57	— 0,2908	— 0,7798	— 0,9875	— 0,7798	— 0,2908		
φ_3	2,5071	2,652	2,812	2,912	2,992	3,022	3,052	3,084	3,118		
φ_4	— 1,5027	— 1,1034	— 0,5214	— 0,1557	— 0,0445	0,09517	0,1113	0,09517	0,0445		
φ'_5	— 0,462	— 0,84	— 0,885	— 1,035	— 1,04	— 0,77	0	0,55	0,4	0,1	— 0,0715
φ_5	4,03	3,86	3,38	2,88	2,3	2,04	1,915	2,02	2,145		
Y	— 0,93	— 0,395	+ 0,272	0,63	0,66	0,618	0,489	0,359	0,09		
Y′	0,89	0,372	— 0,491	— 1,23	— 1,877	— 2	— 1,757	— 1,1136	— 0,453		
$\frac{2y_1}{c}$	— 0,0343	— 0,0927	— 0,1569	— 0,179	— 0,154	— 0,124	— 0,083	— 0,0538	— 0,0108		
$\frac{2y_2}{c}$	— 0,0269	— 0,0832	— 0,17	— 0,236	— 0,283	— 0,274	— 0,2228	— 0,1339	— 0,057		

Assunto invece $c_p = 0$; $\frac{u_1}{V_\infty} = \frac{1}{4}$ risulta, essendo

$$(Y')_{\theta = 214^\circ 10'} = 1{,}139$$

$$\alpha_{2\infty} = \frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{0{,}75}\,\frac{1}{2\pi}\,\frac{1{,}36 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}815}{0{,}6 \cdot 0{,}281}\,1{,}139 = 0{,}0638\ (= 3^\circ 38')$$

e di conseguenza è ora:

$$(23) \qquad \frac{2y_2}{c} = 0{,}0638\left(\frac{2x}{c} - \frac{2x_B}{c}\right) + 0{,}1125\ Y'.$$

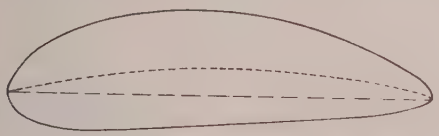


Fig. 2.

Si ottengono così i valori di $\frac{2y_2}{c}$, per i vari θ, che sono dati dall'ultima riga della tabella I, e ne risulta la forma del profilo disegnata in fig. 3.

Fig. 3.

8. Appare dalla stessa fig. 3, che il profilo II ottenuto per $c_p = 0$ e $\frac{u_1}{V_\infty} = 0{,}25$ è *simmetrico*; ora, poichè il profilo effettivo ha ordinate, che si ottengono come combinazione *lineare* delle ordinate corrispondenti ai profili I e II, risulta senz'altro che la *linea d'asse* di detto profilo, per $c_p = 1$, è quella medesima del profilo I, che appare disegnata in fig. 2.

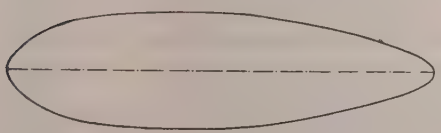


Fig. 4.

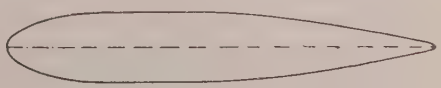
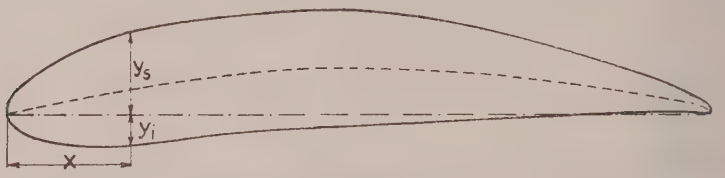


Fig. 5.

La legge secondo cui varia lo *spessore* lungo la linea d'asse, per I, è rappresentata nella fig. 4: rispetto a II, il profilo I, rappresentato colla sua linea d'asse *rettificata* e che indicheremo con I', appare leggermente più spesso a

prora e assottigliato a poppa. Se si sommano alle ordinate di I' quelle di II moltiplicate per —0,4, si ottiene come contorno quello rappresentato in



x	0	2,5	5	7,5	10	15	20	30	40	50	60	70	80	90	95	100
y_s	0	4,2	6	7,6	8,9	10,9	12,2	13,7	14,5	14,5	13,5	11,5	8,9	5,6	3,8	0
y_i	0	2,5	3,6	4,1	4,45	4,5	4,1	2,8	2,0	1,6	1,2	0,75	0,25	0,25	0,4	0

Fig. 6.

fig. 5; assumendo infine come linea d'asse quella data dalla fig. 2 si ottiene il profilo effettivo corrispondente a $c_p = 1$ e con uno spessore massimo uguale al 16 % della corda; esso appare disegnato in fig. 6.

Meccanica. — *Intorno alla trasmissione del moto fra assi sghembi mediante ruote elicoidali.* Nota di R. Giovannozzi, presentata (*) dal Corrisp. E. Pistolesi.

1. Scopo del presente lavoro. – Il presente studio, che riprende, da un punto di vista più generale e sintetico, l'argomento di un precedente lavoro dello scrivente (1), si propone di fare una messa a punto del problema della trasmissione fra assi sghembi mediante ruote elicoidali ad evolvente, abbandonando in particolare l'ipotesi usualmente ammessa dell'esistenza di un punto di contatto sulla retta di minima distanza dei due assi, e di stabilire, per il caso generale in cui ciò non accade, formule di applicazione generale che all'A. non è stato dato finora di incontrare nella letteratura tecnica italiana e straniera a sua conoscenza (2).

(*) Nella seduta del 12 aprile 1947.

(1) R. Giovannozzi, *Sul calcolo delle ruote elicoidali per trasmissione fra assi sghembi*. Pubblicazioni della Facoltà di Ingegneria della R. Università di Pisa, n. 484 (Decima serie).

(2) Lo studio più completo che mi è stato possibile trovare sull'argomento, successivamente alla pubblicazione del citato lavoro, è quello di Perignon, in; *Théorie et Technologie des Engrenages*, nel quale si parte dalla considerazione dei cilindri « primitivi » e si afferma che si possono spostare gli assi solo parallelamente a se stessi (vol. I, p. 229).

Nel *Kent's Mechanical Engineer's Handbook*, ed. 1938, in un breve paragrafo di E. Buckingham si afferma la possibilità di spostare comunque gli assi, senza darne la spiegazione.

La letteratura tecnica italiana e tedesca non parla, per quanto a me consta, di spostamento degli assi e considera sempre i cilindri « primitivi ».

Nella classica opera di A. Schiebel, *Zahnräder*, si afferma anzi esplicitamente che non si può variare la distanza degli assi, perchè ciò importerebbe una variazione delle inclinazioni su cilindri primitivi (vol. II, p. 61, ed. 1934).

2. GEOMETRIA DELL'ELICOIDE AD EVOLVENTE. – Le superficie dei denti delle ruote sono elicoidi ad evolvente. Un elicoide ad evolvente è definito dal raggio r del cilindro fondamentale e dalla inclinazione α dell'elica di tale cilindro. La sua superficie può pensarsi generata dal rotolamento senza strisciamento sul cilindro fondamentale di un piano tangente a tale cilindro, sul quale è tracciata una retta, inclinata di $(90^0 - \alpha)$ sopra la generatrice in cui il piano tocca il cilindro.

In un punto qualunque della superficie dell'elicoide il piano tangente tocca l'elicoide secondo una retta che appartiene anche al piano tangente al cilindro fondamentale passante per tale punto ed è inclinata di $(90^0 - \alpha)$ sulla generatrice di contatto. La normale all'elicoide in quel punto appartiene a tale piano tangente al cilindro fondamentale ed è normale alla retta ora detta.

3. DETERMINAZIONE DEL RAPPORTO DI TRASMISSIONE. – Dati gli assi dei cilindri fondamentali, di raggi r_1, r_2, formanti l'angolo β e disposti alla minima distanza d, supponiamo di conoscere un punto di contatto dei due elicoidi ad evolvente e consideriamo, per ciascuno dei due elicoidi, il piano tangente al rispettivo cilindro fondamentale che contiene la retta generatrice passante per quel punto dell'elicoide.

La retta intersezione di questi piani, che possono considerarsi piani dei contatti relativi all'ingranamento delle due ruote con una dentiera ad esse « coniugata », coi denti, piani, normali a tale retta, è la linea dei contatti ed è anche la normale agli elicoidi nel loro punto di contatto (giacchè in tale punto elicoidi e dentiera coniugata sono tangenti). Tale retta deve quindi essere normale, in un suo punto qualunque, alle rette inclinate di $(90^0 - \alpha_1)$, $(90^0 - \alpha_2)$ nei due piani dei contatti.

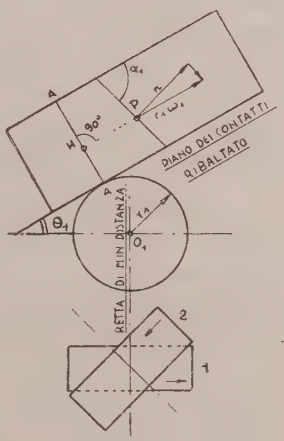


Fig. 1.

Viceversa, per riconoscere se un dato punto nello spazio è effettivamente punto di contatto, cioè se appartiene o meno alla retta dei contatti, basta tirare da tale punto i piani tangenti ai cilindri fondamentali delle due ruote come prima detto e verificare se l'intersezione di tali piani è o meno normale alle rette inclinate di $(90^0 - \alpha_1)$, $(90^0 - \alpha_2)$ nei piani stessi.

In fig. 1 è rappresentato uno dei piani dei contatti e il suo ribaltamento.

In un punto qualunque P di contatto, devono essere uguali le componenti delle velocità dei due elicoidi secondo la normale comune. Tali velocità, per quanto precede, hanno una componente normale al rispettivo piano dei contatti e quindi contenuta nel piano tangente, la quale non interessa, e una componente nel piano dei contatti, diretta normalmente alla generatrice di contatto coi cilindri fondamentali (retta AA in fig. 1), che vale rispettiva-

mente $r_1 \omega_1$, $r_2 \omega_2$. L'uguaglianza delle componenti delle velocità secondo la normale comune si scrive quindi:

$$r_1 \omega_1 \operatorname{sen} \alpha_1 = r_2 \omega_2 \operatorname{sen} \alpha_2 . \tag{1}$$

Ne segue, per il rapporto di trasmissione τ, l'espressione:

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1 \operatorname{sen} \alpha_1}{r_2 \operatorname{sen} \alpha_2} . \tag{2}$$

Poichè tale espressione non dipende dalla posizione relativa delle due ruote (cioè nè dalla loro minima distanza d, nè dall'angolo β che formano i loro assi), ma soltanto dalla forma delle superficie dei denti, si conclude che « comunque spostando gli assi delle due ruote la coppia funziona con rapporto di trasmissione costante dato dalla (2) ».

Questa condizione è subordinata unicamente all'esistenza, nella posizione relativa considerata degli assi delle due ruote, di almeno un punto di contatto delle superficie degli elicoidi, quale che sia questo punto nello spazio.

Trattandosi di superficie indefinite, eccettuato il caso che d scenda sotto un certo valor minimo, tale esistenza sarà d'altronde sempre assicurata, come può vedersi tenendo presente quanto è detto al paragrafo seguente circa l'effetto di uno spostamento degli assi delle ruote effettuato in direzione della loro retta di minima distanza.

Si deve osservare esplicitamente che non è affatto necessario che esista un punto di contatto sulla retta di minima distanza, dato che di tale ipotesi non è stato necessario fare mai uso in quanto precede.

4. Effetto di uno spostamento degli assi delle ruote. – Se allontaniamo parallelamente a se stesso l'asse di una delle due ruote, la quale prima toccava l'altra in un punto della retta della loro minima distanza, la nuova retta dei contatti si ottiene come intersezione del vecchio piano dei contatti della ruota rimasta fissa col piano dei contatti della ruota che si è spostata, pensato trasportato solidalmente alla ruota stessa. Infatti, l'intersezione dei due piani ora detti è normale alle rette inclinate di $(90^0 - \alpha_1)$, $(90^0 - \alpha_2)$ in tali piani, giacchè è parallela alla vecchia retta dei contatti, che era, per quanto si è visto, certamente normale a tali rette.

La nuova retta dei contatti non è più però in generale incidente alla nuova retta di minima distanza, come si vede subito ad esempio nel caso in cui lo spostamento di uno degli assi avvenga secondo la retta di minima distanza e quindi la retta di minima distanza rimanga la stessa anche dopo lo spostamento.

La retta dei contatti rimane la stessa nello spazio se le due ruote subiscono spostamenti arbitrari paralleli ai rispettivi piani dei contatti. Per effetto di tali spostamenti varia però in generale la retta di minima distanza [3].

(3) Da quanto esposto, appare che l'affermazione, contenuta nel citato lavoro, che la coppia considerata non consenta « correttamente » uno spostamento degli assi è perciò impropria e deve essere intesa nel senso che tale spostamento non è consentito senza che la retta dei contatti cessi, almeno in generale, di essere incidente alla retta di minima distanza.

Uno spostamento dell'asse di una delle ruote nella direzione della retta di minima distanza lascia inalterate, per quanto si è detto, sia le inclinazioni $(90^0 - \theta_1)$, $(90^0 - \theta_2)$ dei piani dei contatti sulla retta di minima distanza, sia la direzione, nello spazio, della retta dei contatti, sia l'angolo β formato dagli assi delle due ruote, cioè in sostanza lascia inalterati tutti gli angoli che compaiono nel problema.

Essendo d'altra parte costanti i raggi (r_1, r_2) dei cilindri fondamentali, risultano costanti le distanze

$$(3) \qquad R_1 = \frac{r_1}{\cos\theta_1} \quad , \quad R_2 = \frac{r_2}{\cos\theta_2}$$

degli assi delle due ruote dalle intersezioni dei rispettivi piani dei contatti con la retta di minima distanza.

Ne segue che anche al caso generale in cui manchi un punto di contatto sulla retta di minima distanza (cioè in cui $R_1 + R_2 \neq d$; d = minima distanza degli assi) possono applicarsi tutte le formule già ottenute per il caso particolare in cui tale punto esisteva, purchè si interpretino R_1, R_2 come prima detto.

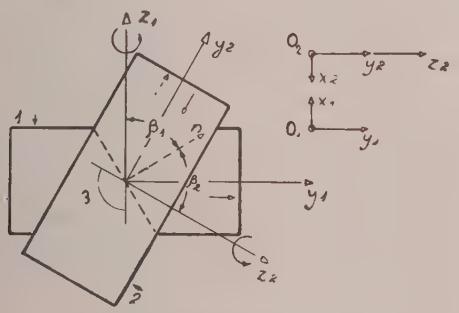


Fig. 2.

5. DETERMINAZIONE DI DUE RELAZIONI FONDAMENTALI. – Per meglio chiarire quanto precede ripetiamo qui la dimostrazione di due relazioni fondamentali già stabilite nel lavoro precedente, abbandonando adesso l'ipotesi $R_1 + R_2 = d$.

Supponendo di conoscere un punto di contatto, tiriamo da esso i piani tangenti ai cilindri fondamentali delle due ruote (piani dei contatti nelle coppie costituite da ciascuna ruota e dalla dentiera coniugata ad entrambe).

Con riferimento al caso della fig. 2 (ruota 1 motrice; le due terne di assi x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2 hanno le origini nei punti O_1, O_2 in cui la retta di minima distanza degli assi z_1, z_2 delle due ruote incontra rispettivamente tali assi) e coi sensi positivi degli assi x_1, y_1, z_1 qualunque sia il punto di contatto, per il fatto che esso appartiene al piano di inclinazione θ_1, la normale n_1 all'elicoide di asse z_1 ha coseni direttori rispettivamente:

$$(4) \quad \cos(\widehat{n_1 x_1}) = \operatorname{sen}\alpha_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_1 \quad \cos(\widehat{n_1 y_1}) = \operatorname{sen}\alpha_1 \cdot \cos\theta_1 \quad \cos(\widehat{n_1 z_1}) = \cos\alpha_1$$

Analogamente rispetto agli assi x_2, y_2, z_2 la normale n_2 al secondo elicoide ha coseni direttori:

$$(5) \qquad \cos(\widehat{n_2 x_2}) = -\operatorname{sen}\alpha_2 \cdot \operatorname{sen}\theta_2 ;$$

$$\cos(\widehat{n_2 y_2}) = \operatorname{sen}\alpha_2 \cdot \cos\theta_2 \quad ; \quad \cos(\widehat{n_2 z_2}) = \cos\alpha_2$$

e quindi, tenuto conto che si hanno i seguenti:

Coseni direttori

dell'asse	rispetto all'asse		
	x_2	y_2	z_2
x_1	-1	0	0
y_1	0	$-\cos\beta$	$\operatorname{sen}\beta$
z_1	0	$\operatorname{sen}\beta$	$\cos\beta$

la n_2 ha, rispetto agli assi x_1, y_1, z_1 coseni direttori:

$$(6) \quad \cos(\widehat{n_2 x_1}) = \operatorname{sen}\alpha_2 \cdot \operatorname{sen}\theta_2 \quad ; \quad \cos(\widehat{n_2 y_1}) = -\cos\beta \cdot \cos\theta_2 \cdot \operatorname{sen}\alpha_2 +$$

$$+ \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha_2 \quad ; \quad \cos(\widehat{n_2 z_1}) = \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\theta_2 \cdot \operatorname{sen}\alpha_2 + \cos\beta \cdot \cos\alpha_2 .$$

Essendo P punto di contatto, n_1 e n_2 devono coincidere e si hanno quindi le condizioni:

$$(7) \quad \cos(\widehat{n_1 x_1}) = \cos(\widehat{n_2 x_1}) \; ; \; \cos(\widehat{n_1 y_1}) = \cos(\widehat{n_2 y_1}) \; ; \; \cos(\widehat{n_1 z_1}) = \cos(\widehat{n_2 z_1})\,(4),$$

utilizzando la prima e la terza delle quali si trovano le due relazioni cercate:

$$(8) \qquad \cos\theta_1 = \frac{r_1}{R_1} = \frac{\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1 \cdot \cos\beta}{\operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\alpha_1} ;$$

$$(9) \qquad \cos\theta_2 = \frac{r_2}{R_2} = \frac{\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 \cdot \cos\beta}{\operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\alpha_2} ,$$

formalmente identiche a quelle ottenute nel lavoro citato per il caso particolare in cui esistesse un punto di contatto sulla retta di minima distanza.

Con opportune convenzioni circa i sensi positivi degli angoli, le (8), (9), assieme alla (2), valgono per tutti i casi possibili di eliche destrorse e sinistrorse e servono a risolvere i vari problemi cinematici possibili.

Per determinare ad esempio quale posizione assuma la retta dei contatti quando le ruote sono disposte in una certa posizione relativa arbitraria, basta determinare R_1, R_2 e quindi θ_1, θ_2 mediante le (8), (9) in funzione di r_1, r_2,

(4) Delle tre relazioni (7), solo due sono in effetti utili, giacchè, essendo sempre uguale all'unità la somma dei quadrati dei coseni direttori, l'uguaglianza di due di tali coseni porta necessariamente con sè anche l'uguaglianza del terzo.

α_1 , α_2 , β dopodichè è facile determinare l'intersezione dei piani dei contatti inclinati di θ_1 , θ_2 sul piano normale alla retta di minima distanza e tangenti ai cilindri fondamentali.

Si osservi che mentre la posizione della retta dei contatti dipende dalla minima distanza degli assi, la sua direzione, cioè i suoi coseni direttori, dipendono da β , θ_1 , θ_2 e quindi solo da β , α_1 , α_2 e risulta perciò confermato che uno spostamento degli assi parallelamente a se stessi, in modo da non variare il loro angolo β, fa spostare la retta dei contatti parallelamente a se stessa.

6. CILINDRI « PRIMITIVI » E FORMULE RELATIVE. – Nel caso generale i cilindri aventi i raggi R_1 , R_2 definiti dalle (3) non sono più a contatto e pertanto non ha più senso parlare per essi di « cilindri primitivi ».

Poichè tuttavia, per quanto si è visto al § 3, per due date ruote (cioè: dati α_1 , α_2 , r_1 , r_2), i raggi R_1 , R_2 non dipendono dalla distanza degli assi, ma solo dal loro angolo β, e lo stesso accade quindi per le inclinazioni β_1 , β_2 delle eliche sui cilindri di raggi R_1 , R_2 legate alle inclinazioni α_1 , α_2 dalle relazioni:

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \cos\theta_1 = \operatorname{tg}\alpha_2 \cdot \cos\theta_2 , \tag{10}$$

anche nel caso generale riesce utile, dal punto di vista formale, la considerazione dei cilindri « primitivi » di raggi R_1 , R_2 e delle inclinazioni β_1 , β_2 su di essi.

Ad esempio continua a sussistere la relazione:

$$\beta_1 + \beta_2 = \beta , \tag{11}$$

che si dimostra nel modo già seguìto nel lavoro citato, cioè moltiplicando le (8), (9) per tang α_1 , tang α_2 rispettivamente, con che si ottiene, per le (10):

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{1}{\operatorname{sen}\beta}\frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} - \frac{1}{\operatorname{tg}\beta} \quad , \quad \operatorname{tg}\beta_2 = \frac{1}{\operatorname{sen}\beta}\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} - \frac{1}{\operatorname{tg}\beta} , \tag{12}$$

e quindi:

$$\operatorname{tg}(\beta_1 + \beta_2) = \operatorname{tg}\beta . \tag{13}$$

Con qualche sviluppo lievemente più complicato, si potrebbe anche dimostrare che:

$$\tau = \frac{R_1 \operatorname{sen}\beta_1}{R_2 \operatorname{sen}\beta_2} . \tag{14}$$

Detto θ_n l'angolo che la normale comune in un punto di contatto forma col piano normale alla retta di minima distanza, si ha per la prima delle (4):

$$\operatorname{sen}\theta_n = \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\alpha_1 \quad ; \quad \operatorname{tg}\theta_n = \frac{\operatorname{sen}\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\alpha_1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta_1 \cdot \operatorname{sen}^2\alpha_1}} , \tag{15}$$

e le analoghe per la ruota 2.

Si vede subito che tali relazioni sono equivalenti alle altre, in cui compaiono invece le inclinazioni sui cilindri di raggi R_1 , R_2 :

$$\operatorname{tg}\theta_n = \operatorname{tg}\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\beta_1 = \operatorname{tg}\theta_2 \cdot \operatorname{sen}\beta_2 , \tag{16}$$

tenendo presente che, per le (10):

$$(17) \qquad \operatorname{sen}\beta_1 = \frac{\cos\theta_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha_1}{\sqrt{1+\cos^2\theta_1 \cdot \operatorname{tg}^2\alpha_1}} \quad , \quad \operatorname{sen}\beta_2 = \frac{\cos\theta_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha_2}{\sqrt{1+\cos^2\theta_2 \cdot \operatorname{tg}^2\alpha_2}} .$$

In conclusione si vede che possono stabilirsi per $R_1, R_2, \beta_1, \beta_2$ tutte le relazioni per essi ottenute nel lavoro precedente, anche quando si abbandoni la condizione $R_1 + R_2 = d$.

7. Calcolo di resistenza. — Per quanto precede le due ruote si trasmettono in ogni istante una forza P che, in assenza di attrito, è diretta secondo la normale comune, cioè secondo la retta dei contatti. Essendo la retta dei contatti fissa nello spazio, la forza P sta in rapporti costanti coi momenti M_1, M_2 agenti sugli assi delle due ruote.

Con riferimento alla fig. 1, la normale n al dente in un punto qualunque del piano dei contatti, in particolare in un punto della retta dei contatti, forma l'angolo α_1 con la generatrice AA di contatto del piano dei contatti col cilindro fondamentale, la quale è parallela all'asse della ruota. Perciò, la forza P ha componente $P\cos\alpha_1$ secondo l'asse della ruota, componente $P\operatorname{sen}\alpha_1$, nel piano dei contatti, in direzione ortogonale a tale asse. Si ha quindi che:

$$(18) \qquad M_1 = P\operatorname{sen}\alpha_1 \cdot r_1 = P R_1 \cos\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\alpha_1$$

$$(19) \qquad P = \frac{M_1}{\operatorname{sen}\alpha_1 \cdot r_1} = \frac{M_2}{\operatorname{sen}\alpha_2 \cdot r_2} .$$

Per potere applicare la teoria di Hertz onde calcolare le tensioni dovute al contatto delle due superficie curve premute una contro l'altra dalla forza normale P, occorre conoscere, come è noto, oltre che i raggi di curvatura principali [5], anche l'angolo ω formato dalle giaciture principali dei due elicoidi nel loro punto di contatto. In base a quanto si è visto in precedenza, tale angolo è l'angolo formato dalle rette a, a' inclinate di $(90^\circ - \alpha_1), (90^\circ - \alpha_2)$ sugli assi dei rispettivi elicoidi, e passanti per il punto di contatto considerato e poichè tali rette, al progredire del contatto sulla retta dei contatti, si spostano rimanendo parallele a se stesse, tale angolo è costante [6].

Calcolando i coseni direttori delle rette suddette rispetto agli assi x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 rispettivamente, determinando quindi, mediante la tabellina al § 5, i coseni direttori della retta inclinata di $(90^\circ - \alpha_2)$ rispetto agli assi

(5) In un punto generico di un elicoide ad evolvente, uno dei due raggi principali di curvatura è infinito, l'altro è uguale al raggio di curvatura della evolvente passante per quel punto, diviso per sen α (in generale: $(90^\circ - \alpha)$ = inclinazione sull'asse dell'elica al raggio del cilindro fondamentale).

Nel punto P di fig. 1, il raggio di curvatura principale non infinito varrebbe ad esempio $PH/\operatorname{sen}\alpha_1$.

(6) Nel lavoro citato questo fatto, geometricamente così chiaro, mi era sfuggito, mascherato dal metodo analitico ivi seguito, e ciò benchè di tale angolo avessi calcolato la espressione corretta.

x_1, y_1, z_1, applicando infine la notissima formula che fornisce il coseno dell'angolo formato fra due rette in funzione dei loro coseni direttori rispetto a una stessa terna di assi, si trova facilmente che (formula (87) del lavoro precedente):

$$(20) \qquad \begin{aligned} \cos\omega = &- \cos\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2 \cdot \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2 + \\ &+ \cos\alpha_1 \cdot \cos\theta_1 \left[\cos\beta \cdot \cos\alpha_2 \cdot \cos\theta_2 + \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\alpha_2\right] + \\ &+ \operatorname{sen}\alpha_1 \left[\operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha_2 \cdot \cos\theta_2 - \cos\beta \cdot \operatorname{sen}\alpha_2\right]. \end{aligned}$$

Tale espressione può essere posta in una forma più raccolta esprimendo i cinque angoli $\alpha_1, \alpha_2, \theta_1, \theta_2, \beta$ in funzione dei tre angoli $\beta_1, \beta_2, \theta_n$, ciò che può farsi mediante la (11) e le relazioni:

$$(21) \qquad \operatorname{sen}\theta_1 = \frac{\operatorname{tg}\theta_n}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\beta_1 + \operatorname{tg}^2\theta_n}} \quad , \quad \cos\theta_1 = \frac{\operatorname{sen}\beta_1}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\beta_1 + \operatorname{tg}^2\theta_n}} .$$

$$(22) \qquad \operatorname{sen}\alpha_1 = \cos\theta_n \cdot \sqrt{\operatorname{sen}^2\beta_1 + \operatorname{tg}^2\theta_n} \quad , \quad \cos\alpha_1 = \cos\beta_1 \cdot \cos\theta_n ,$$

e le analoghe per gli angoli α_2, θ_2 (tali relazioni si deducono dalle (16), (15)). Sostituendo nella (20), con opportuni passaggi e sviluppi che si omettono, si trova:

$$(20') \qquad \cos\omega = \frac{\operatorname{tg}\beta_1 \cdot \operatorname{tg}\beta_2 - \operatorname{sen}^2\theta_n}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta_n + \operatorname{tg}^2\beta_1} \cdot \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta_n + \operatorname{tg}^2\beta_2}} .$$

Ma ad un'espressione ancora più semplice ed elegante di $\cos\omega$ si perviene direttamente osservando che ω è l'angolo diedro formato dai due piani dei contatti, giacchè è l'angolo formato fra due rette (le rette a, a) che appartengono a tali piani e sono perpendicolari alla loro intersezione (la retta dei contatti).

Perciò l'angolo ω è anche l'angolo formato fra le normali n_1', n_2' ai piani dei contatti, le quali hanno rispettivamente coseni direttori:

la n_1': $-\cos\theta_1$, $\operatorname{sen}\theta_1$, o rispetto a x_1, y_1, z_1;
la n_2': $\cos\theta_2$, $\operatorname{sen}\theta_2$, o rispetto a x_2, y_2, z_2.

Ricordando la tabellina al § 5, si vede che la n_2' ha, rispetto agli assi x_1, y_1, z_1, coseni direttori:

$$-\cos\theta_2 \quad , \quad -\cos\beta \cdot \operatorname{sen}\theta_2 \quad , \quad \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\theta_2 .$$

È quindi:

$$(23) \qquad \cos\omega = \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \cos\beta \cdot \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2 .$$

Mediante le (21), è facile verificare che questa espressione di $\cos\omega$ coincide con la (20'), e quindi con la (20).

8. DETERMINAZIONE DELLO SPOSTAMENTO DELLA RETTA DEI CONTATTI PER EFFETTO DI UN ALLONTANAMENTO O DI UN AVVICINAMENTO DEGLI ASSI DELLE RUOTE. – Determiniamo la posizione che assume la retta dei contatti quando due ruote, poste inizialmente in modo che si tocchino in un punto

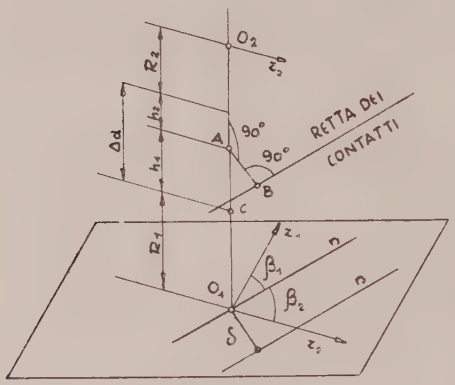


Fig. 3.

della retta $O_1 O_2$ di minima distanza, cioè con assi distanti $d = R_1 + R_2$, subiscano uno spostamento relativo Δd secondo tale retta.

Poichè le rette dei contatti prima e dopo lo spostamento sono parallele, la posizione della retta dei contatti può ritenersi individuata dalla minima distanza $\delta = AB$ (fig. 3) fra essa e la retta $O_1 O_2$ e dalla distanza $R_1 + h_1$, $(R_2 + h_2)$ del punto A da O_1 (da O_2).

Nel piano passante (per fissare le idee) per O_1 e normale alla $O_1 O_2$, le rette dei contatti iniziale e dopo lo spostamento si proiettano rispettivamente secondo due rette parallele n, n', che formano gli angoli β_1, β_2 con gli assi z_1, z_2 delle ruote; la distanza $\delta = AB$ si proietta in vera grandezza.

Supponiamo per fissare le idee che lo spostamento Δd sia ottenuto spostando di Δd, in direzione $O_1 O_2$, la ruota 2, e lasciando ferma la ruota 1. Il piano dei contatti della ruota 2, pensato, per quanto si è visto, trasportato solidalmente ad essa, subisce allora uno spostamento $\Delta d \cdot \cos\theta_2$ secondo la propria normale, e la nuova retta dei contatti si sposta, nel piano dei contatti, rimasto fermo, della ruota 1, di una lunghezza, valutata in direzione normale a tale retta, pari a:

$$(24) \qquad a = \frac{\Delta d \cdot \cos\theta_2}{\operatorname{sen}\omega} .$$

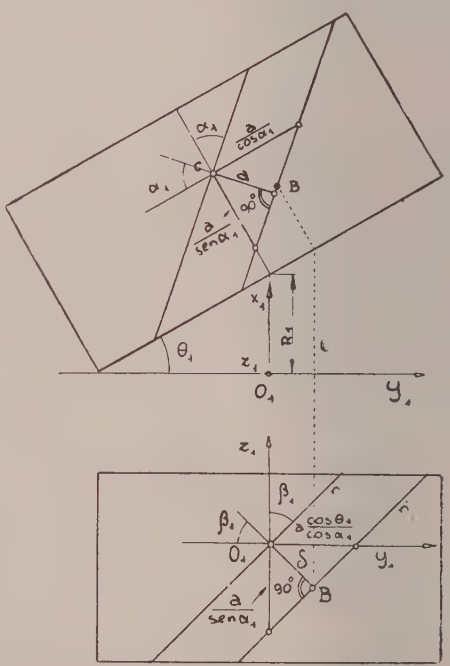


Fig. 4.

In fig. 4 si vedono le posizioni delle rette dei contatti iniziale e dopo lo spostamento Δd, nel piano dei contatti della ruota 1, ribaltato, e le loro proiezioni n, n' nel piano per O_1 normale alla $O_1 O_2$, come pure la proiezione, in vera grandezza, di δ.

Dalla figura si deduce, ricordando le (24), (22):

$$(25) \qquad \delta = \frac{a \cdot \cos\theta_1}{\cos\alpha_1} \cos\beta_1 = \frac{\Delta d \cdot \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2}{\operatorname{sen}\omega \cdot \cos\theta_n} .$$

Dalla stessa figura si rileva che fra il punto B e il punto $C\,(O_1\,C = R_1)$ esiste una differenza di quota, nel senso $O_1\,O_2$, pari a:

$$h_1 = \delta \cos\beta_1 \cdot \operatorname{tg}\theta_1 = \frac{\Delta d \cdot \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2}{\operatorname{sen}\omega \cdot \cos\theta_n} \cos\beta_1 \cdot \operatorname{tg}\theta_1 . \tag{26}$$

Analogamente si trova:

$$h_2 = \frac{\Delta d \cdot \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2}{\operatorname{sen}\omega \cdot \cos\theta_n} \cos\beta_2 \cdot \operatorname{tg}\theta_2 . \tag{27}$$

Se il calcolo svolto è corretto, deve essere:

$$h_1 + h_2 = \Delta d\,, \tag{28}$$

cioè:

$$\operatorname{sen}\omega = \frac{\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2}{\cos\theta_n} (\cos\beta_1 \cdot \operatorname{tg}\theta_1 + \cos\beta_2 \cdot \operatorname{tg}\theta_2) . \tag{29}$$

Valendosi delle (21), con opportuni passaggi, alla (29) può darsi la forma:

$$\operatorname{sen}\omega = \frac{\operatorname{sen}\theta_n (\operatorname{tg}\beta_1 + \operatorname{tg}\beta_2)}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta_n + \operatorname{tg}^2\beta_1} \cdot \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta_n + \operatorname{tg}^2\beta_2}}\,, \tag{30}$$

che coincide con l'espressione di sen ω che si deduce dalla (20′).

Meccanica. — *Sul problema generale della piastra poggiata su suolo elastico*(*). Nota di E. VOLTERRA, presentata(**) dal Socio M. PICONE.

Nella presente Nota, che fa seguito a due precedenti pubblicate su questi « Rendiconti »(1), si studia il problema della piastra infinita, di spessore s costante, poggiata su suolo elastico, nel caso generale in cui la funzione di influenza che caratterizza la reazione del suolo venga rappresentata da una funzione del tipo:

$$k\,(x - \xi\,,\, y - \eta)\,.$$

Si applicano i risultati ottenuti ad alcuni casi particolari di elasticità del suolo: Ipotesi di elasticità del Winkler ed ipotesi di elasticità dello Jodi.

I. SOLUZIONE GENERALE DEL PROBLEMA. – Si indichino con:

$w = w\,(x\,,\,y)$, la freccia di inflessione della piastra = la freccia di inflessione del terreno,

$p = p\,(x\,,\,y)$, il carico esterno agente sulla piastra,

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 10 maggio 1947.

(1) Vedi: E. VOLTERRA, *Sul problema generale della trave poggiata su suolo elastico: I. Formule generali. II. Applicazioni.* (« Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », serie 8ª, vol. II, fasc. 3 e 4).

$\pi = \pi(x, y)$, la reazione offerta dal terreno,
$k = k(x - \xi, y - \eta)$, la funzione di Green del terreno,
$D = \frac{E s^3}{12(1 - \nu^2)}$, la rigidità flessionale della piastra,
E, il modulo d'elasticità del materiale costituente la piastra,
ν, il coefficiente di Poissson.

La deformazione della piastra sarà caratterizzata dalle due seguenti equazioni:

$$(1) \qquad D\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\cdot\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right] = p(x, y) - \pi(x, y),$$

$$(2) \qquad w(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \pi(\xi, \eta)\, k(x - \xi, y - \eta)\, d\xi\, d\eta .$$

Nell'ipotesi che le funzioni: $p(x, y)$; $\pi(x, y)$; $k(x, y)$; $w(x, y)$ abbiano opportuni comportamenti per $x \to \infty$, $|y| \to \infty$ si definiscono le seguenti trasformate di Fourier:

$$P(u, v) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux+ivy}\, p(x, y)\, dx\, dy,$$

$$\Pi(u, v) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux+ivy}\, \pi(x, y)\, dx\, dy,$$

$$K(u, v) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux+ivy}\, k(x, y)\, dx\, dy,$$

$$W(u, v) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux+ivy}\, w(x, y)\, dx\, dy.$$

Dalla equazione (1) si ricava:

$$\frac{D}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux+ivy}\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right] dx\, dy = P(u, v) - \Pi(u, v)$$

donde integrando per parti e nell'ipotesi che $w(x, y)$ e le sue derivate fino al 3° ordine tendano a zero per $|x| \to \infty$, $|y| \to \infty$ si ottiene

$$(3) \qquad D(u^2 + v^2)^2\, W(u, v) = P(u, v) - \Pi(u, v).$$

Dalla equazione (2) si ricava:

$$(4) \quad W(u, v) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux+ivy}\, dx\, dy \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \pi(\xi, \eta)\, k(x - \xi, y - \eta)\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \pi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux+ivy}\, k(x - \xi, y - \eta)\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\pi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iu(\xi+s)+iv(\eta+t)}\,k(s,t)\,ds\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iu\xi+iv\eta}\,\pi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ius+ivt}\,k(s,t)\,ds\,dt =$$

$$= \mathrm{K}(u,v)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iu\xi+iv\eta}\,\pi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = 2\pi\,\mathrm{K}(u,v)\,\Pi(u,v).$$

Dalle equazioni (3) e (4) si ricava:

$$\mathrm{W}(u,v) = \frac{\mathrm{P}(u,v)}{\mathrm{D}(u^2+v^2)^2 + \dfrac{1}{2\pi\mathrm{K}(u,v)}}.$$

Applicando la formula di inversione della trasformata doppia di Fourier si ha quindi la formula risolutiva per lo spostamento:

$$(5)\qquad w(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iux-ivy}\,\mathrm{W}(u,v)\,du\,dv\ (2).$$

II. APPLICAZIONI. - Si supponga che la funzione: $p(x,y)$ rappresenti un carico totale T distribuito uniformemente su di un'area $4\,l_1 \times l_2$ tra:

$$x = a - l_1 \quad \text{ed} \quad x = a + l_1 \quad ; \quad y = b - l_2 \quad \text{ed} \quad y = b + l_2.$$

Il caso di un carico concentrato discende immediatamente facendo tendere l_1 ed l_2 a zero ed il caso di una distribuzione qualsivoglia di carico applicando il principio di sovrapposizione.

Si otterrà perciò:

$$p(x,y) = \begin{cases} = \dfrac{\mathrm{T}}{4\,l_1\,l_2} & \text{per} \quad \begin{cases} a - l_1 \leq x \leq a + l_1 \\ b - l_2 \leq y \leq b + l_2 \end{cases} \\ = 0 \quad \text{altrove.} \end{cases}$$

Segue:

$$\mathrm{P}(u,v) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\mathrm{T}}{4\,l_1\,l_2}\int_{a-l_1}^{a+l_1}\int_{b-l_2}^{b+l_2}e^{iux+ivy}\,dx\,dy = \frac{\mathrm{T}}{2\pi}\,e^{iau+ibv}\,\frac{\sin l_1 u}{l_1 u}\,\frac{\sin l_2 v}{l_2 v}.$$

Nel caso limite di un carico concentrato nel punto $x = a$, $y = b$, si ottiene:

$$\mathrm{P}(u,v) = \frac{\mathrm{T}}{2\pi}\,e^{iau+ibv}.$$

(2) Cfr. per esempio, M. PICONE, *Appunti d'Analisi superiore*, vol. I, p. 511 [2ª edizione a cura di C. Miranda e A. Ghizzetti, Rondinella, Napoli (1946)].

Si supponga ora l'ipotesi di elasticità di Winkler (3):

$$k(x-\xi, y-\eta) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{per} \quad \begin{cases} x = \xi \\ y = \eta \end{cases}$$

$$k(x-\xi, y-\eta) = 0 \quad \text{per} \quad \begin{cases} x \neq \xi \\ y \neq \eta \end{cases}.$$

Si ha in questo caso dalla (2):

$$\pi(x, y) = \lambda w(x, y)$$

$$k(x, y) = \frac{1}{\lambda}\delta(x, y);$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x, y)\,dx\,dy = 1$$

$$K(u, v) = \frac{1}{2\pi\lambda}.$$

e la soluzione sarà:

$$w(x, y) = \frac{T}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(a-x)u+i(b-y)v}}{D(u^2+v^2)^2+\lambda}\,\frac{\sin l_1 u}{l_1 u}\,\frac{\sin l_2 v}{l_2 v}\,du\,dv =$$

$$= \frac{T}{\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\cos(a-x)u\cos(b-y)v}{D(u^2+v^2)^2+\lambda}\,\frac{\sin l_1 u}{l_1 u}\,\frac{\sin l_2 v}{l_2 v}\,du\,dv.$$

Si supponga ora l'ipotesi di elasticità del suolo dello Jodi (4):

$$k(x-\xi, y-\eta) = Ae^{-B\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}$$

si otterrà:

$$K(u, v) = \frac{A}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iux+ivy}e^{-B\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \frac{AB}{(B^2+u^2+v^2)^{3/2}}\ (5).$$

E la soluzione sarà:

$$w(x, y) = \frac{T}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(a-x)u+i(b-y)v}}{D(u^2+v^2)^2+\frac{1}{2\pi AB}(B^2+u^2+v^2)^{3/2}}\,\frac{\sin l_1 u}{l_1 u}\,\frac{\sin l_2 v}{l_2 v}\,du\,dv =$$

$$= \frac{T}{\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\cos(a-x)u\cos(b-y)v}{D(u^2+v^2)^2+\frac{1}{2\pi AB}(B^2+u^2+v^2)^{3/2}}\,\frac{\sin l_1 u}{l_1 u}\,\frac{\sin l_2 v}{l_2 v}\,du\,dv.$$

(3) E. WINKLER, *Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit*. Praga Dominicus, 1867.

(4) C. JODI, *Procedimenti per ricerche sperimentali su suoli elastici*. (Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei » 1936, serie VI).

(5) Ricordiamo che: $\iint e^{iux+ivy}e^{-B\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \frac{2\pi B}{(B^2+u^2+v^2)^{3/2}}$ (vedi per esempio S. BOCHNER, *Vorlesungen über Fouriersche Integrale*. Leipzig, 1932, p. 189).

Astronomia. — *Ricerche sopra l'assorbimento atmosferico della radiazione solare a Roma.* Nota II di M. CIMINO, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

In una Nota I dallo stesso titolo (1) ho esaminato il comportamento del coefficiente di trasmissione atmosferico per la radiazione solare totale a Roma (Campidoglio) nel periodo di tempo compreso tra il 1929 ed il 1935, mettendo in evidenza una rimarchevole e netta dipendenza del valore di tale coefficiente dalla stagione. Facendo seguito a quella Nota, mi propongo ora di ricercare una correlazione tra il valore del coefficiente di trasmissione e l'umidità assoluta misurata al suolo.

5. Come ho già detto nel § 2 (Nota I), le osservazioni piroeliometriche sulle quali si basano le nostre deduzioni hanno luogo a mezzogiorno vero di ogni giorno sereno e senza veli apparenti. Si tratta ora di determinare il valore dell'umidità assoluta, misurata al suolo, al momento di ogni osservazione, sulla base dei rilievi metereologici effettuati nello stesso Osservatorio (del Campidoglio) sistematicamente alle ore 9, 15 e 21 di ogni giorno. Nella gabbia metereologica dell'Osservatorio hanno funzionato anche un igrometro registratore a capello ed un termografo, dai cui grafici si sarebbe potuto dedurre il valore dell'umidità assoluta all'ora richiesta. Per la necessità di dover determinare la scala e lo zero di ogni grafico settimanale, per confronto coi rilievi diretti, questa operazione avrebbe però portato via una considerevole perdita di tempo; confondendo, nell'ordine della nostra approssimazione, il mezzogiorno vero con quello civile, *si è invece preferito assumere come valore dell'umidità assoluta misurata al suolo al momento dell'osservazione piroeliometrica, la media dei valori determinati, con osservazioni dirette, alle ore 9 ed alle 15.* Con queste assunzioni si commette, è vero, un errore, ma questo è assai piccolo e, forse, non superiore a quello che è ragionevole presumere nei dati forniti da uno strumento così facile a sregolarsi (e non sempre perfettamente registrabile) quale è l'igrometro a capello. Si tenga anche presente che il dato in questione a noi serve per un'indagine di carattere statistico, e che il piccolo errore in questione tende ad annullarsi nelle medie.

Coi valori dell'umidità assoluta dedotti nel modo indicato, si sono fatte le medie per decade e per mese. *Queste rappresentano perciò i valori medi dell'umidità assoluta (espressa in m.m.) misurata a Roma (Campidoglio) a mezzogiorno delle giornate serene e senza veli apparenti, relativamente agli anni 1929–1935.* La Tabella II, nella quale tali medie sono riportate assieme al numero delle giornate prese in esame, ha la stessa disposizione della Tabella I del § 3 (Nota I), che conteneva le medie per decade e mensili del coefficiente di trasmissione atmosferico. È facilitata in tal modo la ricerca delle eventuali correlazioni.

(*) Nella seduta dell'8 marzo 1947.

(1) Questi « Rendiconti », Serie 8ª, vol. I (1946), pp. 1295–1300.

Tabella II.

Umidità assoluta a Roma (Campidoglio) alle ore 12 dei giorni sereni senza veli apparenti. – Medie per decade e mensili.

		1929		1930		1931		1932		1933		1934		1935		Tutti gli anni	
		m.m.		m.m.		m.m.		m.m.		m.m.		m.m.		m.m.		m.m.	
Genn.	I			5,30	2	—	—	5,05	1	—	—	4,25	3	3,78	3	4,42	9
	II			5,70	5	5,71	1	5,53	3	3,61	1	4,58	3	2,96	3	4,81	16
	III			6,20	2	5,01	4	4,06	5	—	—	3,76	4	3,90	5	4,36	20
Gennaio				**5,72**	**9**	**5,15**	**5**	**4,66**	**9**	**3,61**	**1**	**4,15**	**10**	**3,61**	**11**	**4,53**	**45**
Feb.	I			7,15	1	3,92	2	3,81	1	6,94	2	3,70	3	—	—	4,86	9
	II			4,82	4	—	—	2,65	3	2,87	3	3,16	6	5,47	4	3,83	20
	III			4,51	1	5,71	1	2,91	1	—	—	—	—	6,00	1	4,78	4
Febbraio				**5,16**	**6**	**4,52**	**3**	**2,94**	**5**	**4,50**	**5**	**3,34**	**9**	**5,58**	**5**	**4,23**	**33**
Mar.	I			6,31	2	—	—	4,35	2	4,32	1	5,52	1	3,53	3	4,64	9
	II			4,45	2	8,58	1	—	—	5,85	3	—	—	5,09	2	5,65	8
	III			5,89	3	4,97	2	4,90	3	7,47	1	—	—	5,27	7	5,42	16
Marzo				**5,60**	**7**	**6,17**	**3**	**4,68**	**5**	**5,87**	**5**	**5,52**	**1**	**4,81**	**12**	**5,26**	**33**
Apr.	I			6,32	1	4,10	2	—	—	7,77	2	—	—	—	—	6,01	5
	II			—	—	5,72	2	3,15	1	—	—	11,16	2	7,50	2	7,42	7
	III			7,46	3	8,52	1	—	—	—	—	—	—	—	—	7,72	4
Aprile				**7,18**	**4**	**5,63**	**5**	**3,15**	**1**	**7,77**	**2**	**11,16**	**2**	**7,50**	**2**	**7,05**	**16**
Mag.	I			—	—	—	—	—	—	—	—	8,84	3			8,84	3
	II			8,01	4	8,63	3	9,09	1	6,24	2	—	—			7,95	10
	III			10,94	2	11,53	3	10,44	2	7,04	1	10,32	7			10,44	15
Maggio				**8,99**	**6**	**10,08**	**6**	**9,99**	**3**	**6,51**	**3**	**9,88**	**10**			**9,38**	**28**
Giu.	I	—	—	11,88	2	8,95	3	—	—	9,80	4	9 66	1			9,95	10
	II	10,05	4	10,98	3	12,51	7	8,33	1	—	—	8,53	3			10,81	18
	III	12,52	3	10,80	6	—	—	8,21	1	9,87	2	9,27	5			10,39	17
Giugno		**11,11**	**7**	**11,05**	**11**	**11,44**	**10**	**8,27**	**2**	**9,82**	**6**	**9,07**	**9**			**10,46**	**45**
Lug.	I	10,83	5	14,70	6	12,20	2	11,73	2	12,65	4	12,20	4			12,59	23
	II	10,48	8	12,19	3	11,59	3	13,75	2	11,57	7	12,97	9			11,89	32
	III	13,64	5	11,64	9	8,26	5	13,14	4	10,72	6	12,30	6			11,57	35
Luglio		**11,46**	**18**	**12,75**	**18**	**10,05**	**10**	**12.94**	**8**	**11,52**	**17**	**12,60**	**19**			**11,94**	**90**

Segue: TABELLA II.

		1929		1930		1931		1932		1933		1934		1935		Tutti gli anni	
		m.m.		m.m.		m.m.		m.m.		m.m.		m.m.		m.m.		m.m.	
Ago.	I	12,66	6	10,90	5	12,56	2	10,40	5	—	—	12,00	6			11,65	24
	II	13,40	6	10,53	5	10,13	6	9,76	5	13,96	3	9,74	4			11,15	29
	III	13,00	4	11,15	7	8,84	1	12,38	3	9,45	5	14,31	4			11,69	24
Agosto		**13,02**	**16**	**10,89**	**17**	**10,53**	**9**	**10,61**	**13**	**11,14**	**8**	**12,01**	**14**			**11,47**	**77**
Sett.	I	12,28	5	14,04	6	10,94	4	—	—	9,82	5	10,90	6			11,69	26
	II	12,71	3	11,64	4	9,82	1	14,03	4	10,11	2	12,22	4			12,21	18
	III	7,23	6	7,56	4	6,85	3	—	—	11,34	1	12,35	6			8,98	20
Settembre		**10,21**	**14**	**11,50**	**14**	**9,27**	**8**	**14,03**	**4**	**10,08**	**8**	**11,77**	**16**			**10,99**	**64**
Ott.	I	8,72	2	8,80	3	9,07	4	—	—	13,21	2	10,72	3			9,91	14
	II	6,07	5	9,97	5	6,19	4	7,80	2	6,48	3	6,60	3			7,26	22
	III	6,64	1	6,17	1	6,77	2	8,20	2	—	—	9,36	4			8,02	10
Ottobre		**6,80**	**8**	**9,16**	**9**	**7,46**	**10**	**8,00**	**4**	**9,17**	**5**	**8,94**	**10**			**8,23**	**46**
Nov.	I	9,87	1	8,55	3	7,22	3	5,79	3	—	—	7,70	2			7,50	12
	II	8,41	2	5,06	4	8,20	1	6,62	3	8,39	2	—	—			6,83	12
	III	8,21	3	8,70	2	—	—	8,29	1	10,61	1	5,48	5			7,36	12
Novembre		**8,55**	**6**	**7,03**	**9**	**7,46**	**4**	**6,50**	**7**	**9,13**	**3**	**6,11**	**7**			**7,23**	**36**
Dic.	I	6,87	1	6,28	3	5,05	1	—	—	—	—	—	—			6,15	5
	II	5,09	6	5,58	5	5,53	3	5,93	2	—	—	6,61	1			5,50	17
	III	6,64	1	—	—	3,29	2	5,31	5	—	—	5,96	4			5,30	12
Dicembre		**5,51**	**8**	**5,84**	**8**	**4,70**	**6**	**5,49**	**7**	—	—	**6,09**	**5**			**5,52**	**34**

6. Con i dati dell'ultima colonna della Tabella II ho tracciato il grafico della fig. 2. La curva a tratto fino rappresenta l'andamento della media per decade dell'umidità assoluta, quella a tratto grosso l'andamento mensile. Questo grafico va confrontato con quello della fig. 1 (Nota I) [2], relativo al coefficiente di trasmissione, la cui curva mensile, per comodità di raffronto, è stata ora disegnata tratteggiata (nell'ordinata, i valori che si riferiscono al coefficiente di trasmissione sono tra parentesi). *Tra il coefficiente di trasmissione e l'umidità assoluta misurata al suolo è evidente una correlazione inversa*, quale era del resto da aspettarsi. Si tratta ora di studiare un po' più a fondo

(2) Nella fig. 1 furono omesse, per una svista, le indicazioni sulle ascisse e sulle ordinate. Esse sono le stesse di quelle (tra parentesi per le ordinate) della fig. 2.

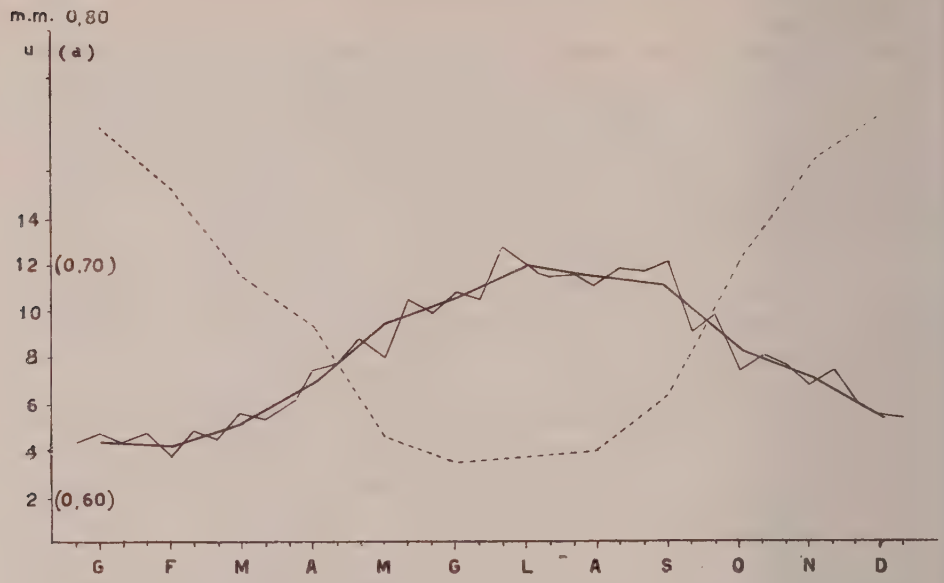


Fig. 2. – Variazioni per decadi (tratto fino) e mensili (tratto grosso) dell'umidità assoluta u a Roma (Campidoglio) alle ore 12 dei giorni sereni senza veli apparenti. La curva tratteggiata (valori tra parentesi sulle ordinate) rappresenta la variazione mensile del coefficiente di trasmissione a della radiazione solare (cfr. fig. 1).

questa correlazione, per quanto lo permettono la qualità ed il numero dei dati a nostra disposizione.

Fissiamo due assi cartesiani (fig. 3), e su quello delle ascisse rappresentiamo i valori dell'umidità assoluta u in m. m., mentre sull'ordinata riportiamo i valori medi del logaritmo del coefficiente di trasmissione a, riferendoci alle medie mensili (cerchietti) e per decade (crocette) relative a tutti gli anni di osservazione. I cerchietti portano vicino la sigla indicante il mese cui si riferiscono. Dall'esame di questo grafico balza subito una circostanza notevole: che se tracciamo una retta di compenso, le crocette e i cerchietti che si riferiscono ai mesi di settembre, ottobre, novembre e parte di dicembre (stagione autunnale) cadono *tutti al di sopra* della retta, mentre quelli relativi ai mesi di febbraio, marzo, aprile e maggio (stagione primaverile) cadono *tutti al di sotto*. Se al posto della media per decade e mensili relative a tutti gli anni di osservazione si fossero prese le analoghe medie relative a ciascun anno, il grafico risultante avrebbe messo in luce lo stesso fenomeno, salvo *rarissime* eccezioni. Credo perciò di poter trarre questa conclusione: *che la correlazione tra il logaritmo del coefficiente di trasmissione atmosferico per la radiazione solare totale a Roma (Campidoglio) e l'umidità assoluta al suolo* NON È UNIVOCA. *Avviene che, a parità di umidità assoluta al suolo, i valori autunnali del coefficiente di trasmissione siano (nelle medie per decade e mensili e salvo rare eccezioni) maggiori dei valori primaverili.* È da osservare che allo stesso risultato si arriva se al posto del logaritmo del coefficiente di trasmis-

sione (che abbiamo scelto per comodità nella discussione che segue), si prende in esame il valore del coefficiente stesso (o una sua qualsiasi funzione univoca).

7. Alla retta di compenso della fig. 3 si può assegnare l'equazione:

$$\log_{10} a = \bar{1},938 - 0.0128\, u. \tag{3}$$

Se una tale relazione lineare tra il log a ed u fosse verificata, indipendentemente dalla stagione, essa avrebbe questo significato: che l'umidità assoluta $u\,(h)$ misurata ad un'altezza h dal suolo sarebbe proporzionale

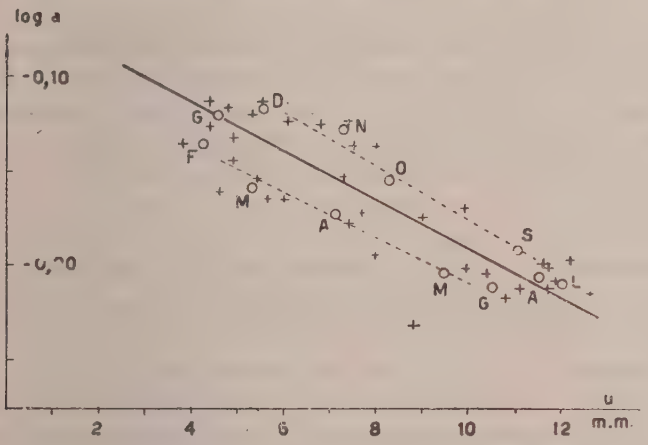


Fig. 3. – Correlazioni tra il logaritmo del coefficiente di trasmissione a e l'umidità assoluta u.

all'umidità assoluta u_0 misurata al suolo, ed il coefficiente $\lambda\,(h)$ di proporzionalità non dipenderebbe dal tempo. Ponendo infatti:

$$u\,(h) = \lambda\,(h)\, u_0$$

risulterebbe, per l'assorbimento di uno straterello di aria di spessore dh all'altezza h: $di = -C\lambda\,(h)\, u_0$, e quindi: $i = i_0\, e^{\alpha + \beta u_0}$, con α e β costanti rispetto ad h. Per confronto con la (1) (Nota I) si otterrebbe (per $z = 0$): $\log a = \alpha + \beta u_0$, cioè una relazione lineare. Il coefficiente di $\lambda\,(h)$ non può dipendere dal tempo, altrimenti ne dipenderebbe anche β, e la correlazione tra il log a ed u_0 non potrebbe essere rappresentata da una sola retta indipendentemente dalla stagione, come invece si è supposto.

È da osservare che anche un arco di parabola o di iperbole, come è stato proposto da qualche autore, non sarebbe sufficiente a rappresentare la correlazione tra a ed u, e ciò a causa della mancata univocità. Così, desiderando approssimare il grafico della fig. 3 mediante rette, ne occorrono almeno due. Supponiamo per un momento che $\lambda\,(h)$ dipenda dal tempo (per esempio attraverso un altro fattore, quale la temperatura o la pressione); allora si avrebbero due rette, – una primaverile, l'altra autunnale, – *conver-*

genti. Ma un esame del grafico mostra che, più che con due rette decisamente convergenti, i valori autunnali e quelli primaverili si approssimano meglio con due rette sensibilmente parallele (disegnate tratteggiate in figura). Questo fatto starebbe ad indicare una certa stabilità (col tempo) nel coefficiente $\lambda(h)$ di proporzionalità tra l'umidità in in quota e quella al suolo, ed indurrebbe a supporre che il diverso comportamento, a parità di umidità assoluta, del coefficiente di trasmissione in autunno e in primavera sia dovuto alla azione particolare di qualche strato atmosferico, per esempio per la formazione di ghiaccioli, goccioline, od altro. Quanto all'azione dell'ozono atmosferico e dell'anidride carbonica, essa sembra troppo esigua per giustificare la riscontrata variazione stagionale.

Coi dati a nostra disposizione non è possibile spingere oltre l'indagine sull'influenza di altri fattori atmosferici nell'assorbimento della radiazione solare a Roma. È sperabile che ciò possa essere fatto sfruttando le osservazioni piroeliometriche che, da oltre un decennio, si eseguono sistematicamente nella nuova sede dell'Osservatorio a Monte Mario.

Astronomia. — *Nuovi elementi dell'orbita del pianetino (1177) Gonnessia*. Nota di P. Sconzo, presentata (*) dal Socio G. Armellini.

1. Il pianetino (1177) Gonnessia fu scoperto ad Algeri da L. Boyer nel 1930; gli elementi attuali della sua orbita sono stati calcolati da A. Kahrstedt (1) in base ad un miglioramento d'orbita fondato sulle osservazioni delle quattro opposizioni del periodo 1930–34. A fondamento del mio calcolo, tenendo anche conto delle perturbazioni speciali di Giove e di Saturno, ho scelto le seguenti altre osservazioni:

N°	Data (T. U.) (2)	Posizione (Eq. 1950) α	δ	Luogo	Pubblicazione
1	1935 Settembre $3^d.9961$	$349^o.512$	$+ 18^o.137$	Uccle	R. I. 1237
2	1936 Novembre 17 .9289	63 .870	+ 25 .040	Algeri	J. O. 20,163
3	1938 Gennaio 26 .8860	130 .250	— 0 .200	»	R. I. 1706
4	1939 Aprile 24 .8862	192 .700	— 22 .800	»	» 1972
5	1940 Luglio 3 .8765	269 .675	— 15 .900	Simeïs	» 2148
6	1941 Ottobre 12 .8252	332 .550	+ 9 .733	Uccle	» 2293
7	1944 Gennaio 29 .9160	118 .275	+ 4 .500	Königstuhl	» 2540

Con le sole perturbazioni di Giove, calcolate per il periodo 1935–44, le prime sei osservazioni della tabella precedente, hanno dato residui plausibili, nel senso solito O–C; per l'osservazione n° 7 però, il residuo $\cos\delta\Delta\alpha$, che senza perturbazioni ha il valore $-0^o.332$, è diventato invece, con le perturbazioni, quasi doppio, raggiungendo il valore $-0^o.622$. Siccome nel

(*) Nella seduta del 12 aprile 1947.

(1) Questi elementi si trovano per esempio nel *Planetenheft* per il 1944.

(2) È stato tenuto conto del tempo di aberrazione.

periodo anzidetto il pianetino (1177) entra due volte nella zona di vicinanza di Saturno ho ripetuto il calcolo per tenere conto anche delle perturbazioni di questo pianeta. Il residuo in α rimase ciò non pertanto dello stesso ordine di grandezza: $-0^{\circ}.605$.

Ho cercato perciò di avere un controllo di calcolo indipendente, che confermasse il risultato precedente. Per lo stesso periodo 1935–44, ho ricalcolato allora le coordinate equatoriali del pianetino col metodo di estrapolazione di B. Numerov [3], anzichè ripetere il calcolo col classico metodo della variazione degli elementi ellittici, impiegato prima. Il nuovo calcolo fu iniziato con 6 cifre decinali, con l'intervallo d'integrazione costante di 80^{d}, e poi proseguito con 5 cifre decimali, sempre con procedimento meccanico. I residui in α furono confermati per tutte le osservazioni, compreso quello della n° 7, che risultò di $-0^{\circ}.600$.

2. In seguito alla conferma di tale anormalità, nel successivo calcolo di miglioramento dell'orbita, ho deciso di tralasciare dal computo la predetta osservazione n° 7. L'applicazione del noto metodo di Tietjen, nel caso presente fallisce completamente, a cagione della piccola eccentricità dell'orbita [4]; per contro le formole differenziali generali di miglioramento di Schönfeld, trasformate da Kramer [5] al caso delle orbite di piccole eccentricità, sono le più adatte per essere applicate all'orbita in esame. Con esse, dopo la risoluzione col metodo dei m. q. del sistema di equazioni normali, ho ottenuto le correzioni degli elementi qui riportate:

$$dM_0 = -6^{\circ}.038 \quad , \quad d\omega = +6^{\circ}.074 \quad , \quad d\Omega = +0^{\circ}.001$$
$$d\varphi = +0^{\circ}.034 \quad , \quad d\mu = +0''.296 \quad , \quad di = +0^{\circ}.006 ,$$

ed in conseguenza i residui seguenti:

	1	2	3	4	5	6
$\cos\delta\Delta\alpha$	$-0^{\circ}.011$	$+0^{\circ}.014$	$-0^{\circ}.011$	$+0^{\circ}.002$	$+0^{\circ}.013$	$-0^{\circ}.005$
$\Delta\delta$	$+0.009$	-0.005	0.000	$+0.015$	-0.012	-0.003,

che sono molto soddisfacenti.

Per l'osservazione n° 7 si ebbe ancora un peggioramento dei residui:

$$\cos\delta\Delta\alpha = -1^{\circ}.092 \quad , \quad \Delta\delta = +0^{\circ}.356 .$$

È da supporre, ragionevolmente, che la posizione data non appartenga all'orbita del pianetino (1177) [6].

(3) Cfr. di questo autore: *Méthode nouvelle de la détermination des orbites et le calcul des éphémérides, etc.*, Leningrado (1922), ed inoltre: *Berechnung der gestörten Ephemeriden nach der Extrapolationsmethode*, « Bull. Inst. Astr. », *12*, Leningrado (1926).

(4) Tra le orbite dei pianetini di eccentricità debolissima, di cui mi sono occupato, per incarico affidatomi dalla Direzione dell'Istituto Copernicano (A.R.I.) quella di Gonnessia presenta una delle più piccole eccentricità, avendosi $e = 0.00063$.

(5) « A.N. », *202*, 73 (1916).

(6) I risultati precedenti sono stati approvati dall'A.R.I. ed il pianetino sarà, in avvenire, considerato pianetino « S ». Il presente lavoro è stato da me eseguito presso l'Osserva-

3. Dopo la continuazione del calcolo delle perturbazioni, sino all'anno 1945, gli elementi definitivi dell'orbita del pianetino (1177) Gonnessia, corretti ed osculatori per la data qui sotto riportata, risultarono:

Epoca 1945 Aprile 15 (0^h T. U.).

M	210°.076	ω	91°.449
φ	0 .244	Ω	252 .845 Ecl. ed Equin. normale 1950.0
μ	576 .542	i	14 .974
a	3 .3583		

Fisica. — *Sull'assorbimento delle onde ultrasonore da parte di miscugli di liquidi viscosi.* Nota II di E. Grossetti, presentata (*) dal Socio A. Carrelli.

Com'è ben noto, il coefficiente di assorbimento per gli ultrasuoni, in base al procedimento teorico che fa dipendere tale processo dalla viscosità del liquido, è dato dalla formula seguente:

$$\alpha = \frac{2\eta\omega^2}{3\rho_0 V_0^3}.$$

Risulta chiaramente che una qualunque verifica di tale relazione richiede la conoscenza della velocità V_0 delle onde ultrasonore nel miscuglio in esame. Avendo già determinati i valori α abbiamo proceduto, per ottenere un confronto con la teoria, alla determinazione di V_0 per i miscugli sopra indicati. Il metodo adottato per la misura di V_0 è quello ottico. Gli ultrasuoni di frequenza $\varkappa_0 = 5{,}85 \cdot 10^5$ Hz venivano ancora prodotti dalla stessa lamina di quarzo adoperata nel dispositivo descritto nella Nota precedente (1), situata alla base di una vaschetta di vetro a facce piane e parallele. Il liquido contenuto nella vaschetta era attraversato da un fascio di raggi paralleli provenienti da una fenditura orizzontale normale alla direzione di propagazione delle onde ed illuminata dalla luce di una lampada a vapori di sodio; l'immagine del reticolo di diffrazione prodotto per effetto delle onde ultrasonore veniva raccolta dal cannocchiale di un catetometro. Con tale dispositivo è stato possibile poter misurare la distanza fra le frange di diffrazione che erano nettamente visibili nel piano del reticolo del cannocchiale, e si poteva quindi determinare facilmente λ. Misurando le distanze delle frange

torio di Heidelberg, usufruendo di un premio ricevuto dalla Fondazione accademica A. von Humboldt. Ad entrambi le Direzioni, dell'Osservatorio e dell'A. R. I., pure trasferito ad Heidelberg, in seguito alle vicende belliche passate, esprimo qui con animo grato il mio più vivo ringraziamento, per l'incarico affidatomi e per l'incoraggiamento scientifico ricevutone.

(*) Nella seduta dell'8 febbraio 1947.

(1) E. Grossetti, «Rend. Acc. Lincei», ser. VIII, vol. I, p. 1315 (1946).

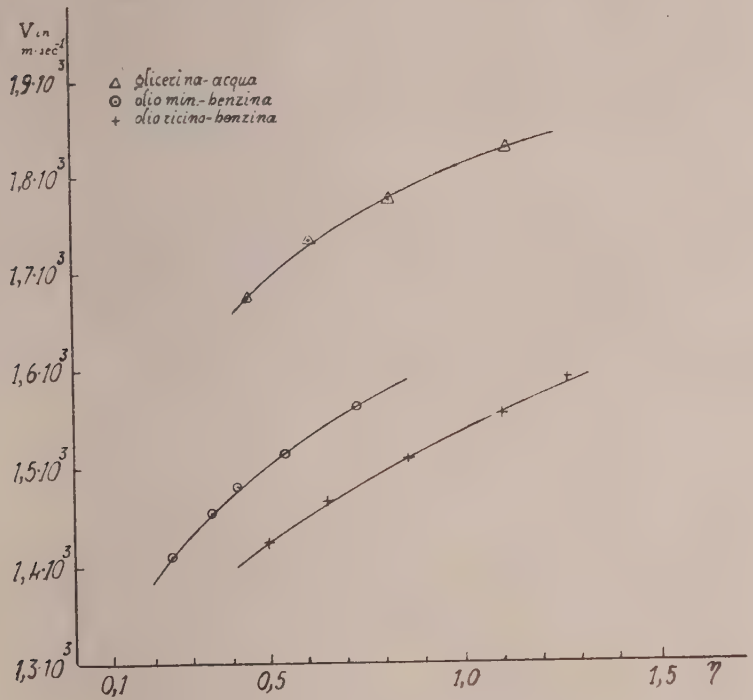

V in m·sec⁻¹
1,9·10³
1,8·10³
1,7·10³
1,6·10³
1,5·10³
1,4·10³
1,3·10³
△ gliceri na-acqua
⊙ olio min.-benzina
+ olio ricino-benzina
0,1
0,5
1,0
1,5
η

Fig 1

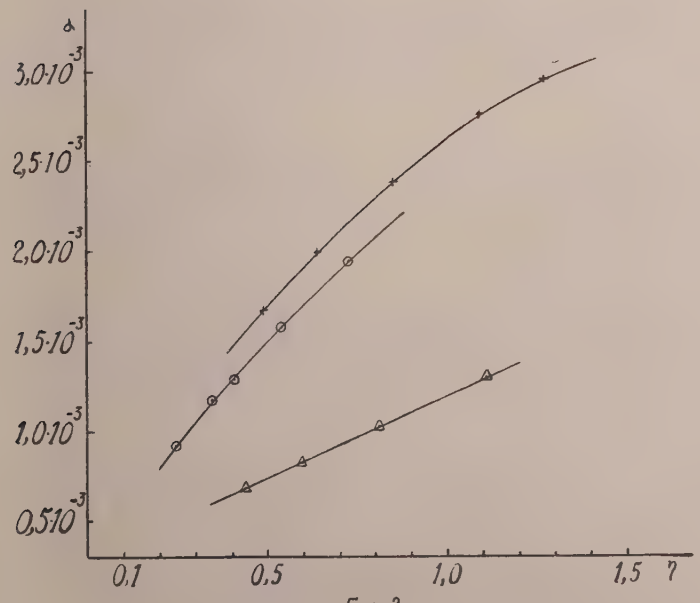

α
3,0·10⁻³
2,5·10⁻³
2,0·10⁻³
1,5·10⁻³
1,0·10⁻³
0,5·10⁻³
0,1
0,5
1,0
1,5
η

Fig 2

per due liquidi (acqua e benzolo) di cui si conosce già V_0, è possibile determinare il parametro che permette di passare dalla distanza fra le frange alla misura della velocità V_0 per qualunque liquido. Dalle misure di λ eseguite per l'acqua e per i tre miscugli in esame in funzione della loro viscosità si è così dedotto il valore V_0. In fig. 1 sono riportate le curve di V_0 in funzione di η.

Nota quindi la velocità V_0 siamo ora in grado di procedere al confronto fra i valori che si ottengono per α, noti η, V_0, ρ_0 ed ω, e i valori che sono stati da noi ricavati sperimentalmente. Nella fig. 2 si riportano come ascisse i valori di η, e come ordinate i valori teorici di α, intendendo con ciò il valore che si ottiene ponendo per η, V_0, ρ_0, ω i valori che noi abbiamo determinati caso per caso. Nella fig. 3 sono invece riportati i valori sperimentali di α che devono intendersi moltiplicati per 1,15.

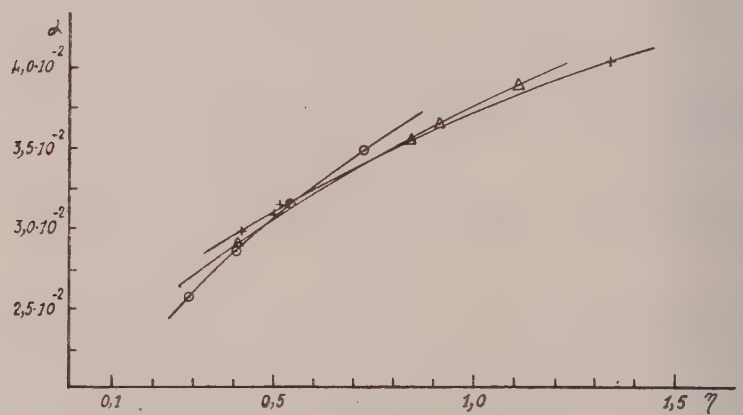


Fig. 3

Fatti i quozienti relativamente ai miscugli di cui era nota la viscosità fra α sperimentale e α teorico i cui valori devono essere moltiplicati per 1,15, si riportano in fig. 4 le curve relative. Dall'esame di queste curve si rilevano i seguenti fatti:

1°) I valori sperimentali sono maggiori di quelli teorici; ciò era già noto ed il divario da noi trovato corrisponde a quello riscontrato anche dagli altri sperimentatori, ma quello che a noi interessa far notare è che nelle nostre misure che si estendono in un campo di notevole variazione di η questo rapporto non rimane costante.

2°) In secondo luogo questo divario fra α_s e α_t ha valori diversi per i tre miscugli, pur ritrovando per tutti lo stesso tipo di variazione, e cioè una diminuzione al crescere di η. C'interessa inoltre far notare che pur ritenendo, come già abbiamo esposto nella Nota I, che il metodo attualmente usato da noi e dagli altri sperimentatori per la misura di α non sia scevro da critiche, e quindi non adatto per una misura assoluta, pure i

valori sperimentali ottenuti per α sono tutti compresi, relativamente ai vari miscugli, entro i limiti $2{,}5 \cdot 10^{-2}$ e $4{,}0 \cdot 10^{-2}$ mentre i rapporti variano fra limiti quasi del tutto distinti quindi il divario delle tre curve della fig. 4 non può dipendere da un errore sistematico via via crescente (o decrescente) per i tre miscugli, ma sta a significare una diversità di α_s relativamente al tipo di liquido considerato.

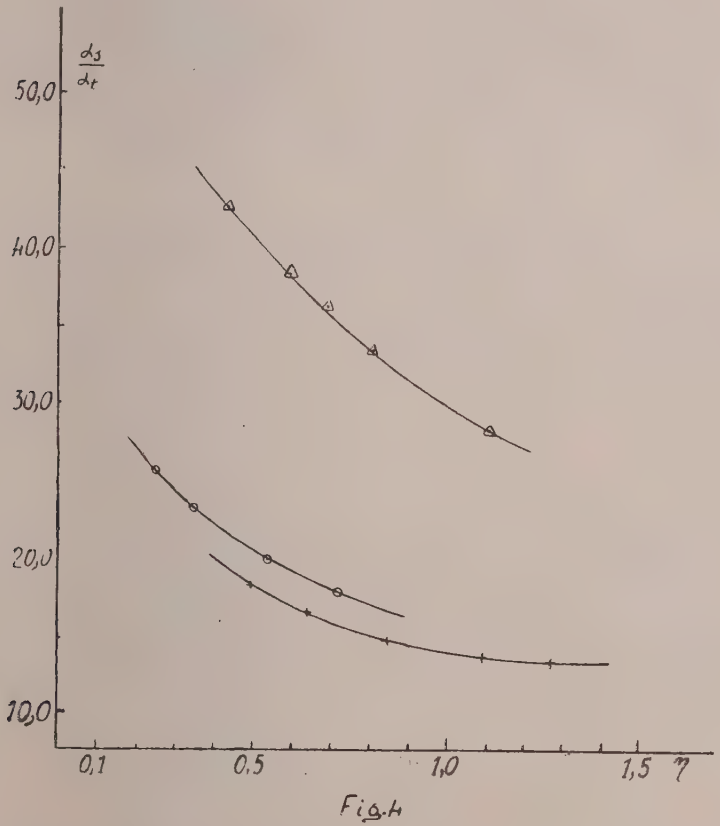


Fig. 4

In altre parole da questi risultati sembra potersi ritenere che probabilmente c'è qualche altro parametro caratteristico da cui dipende l'assorbimento ultrasonico di valore diverso per i tre miscugli. Ricerche ulteriori saranno svolte per cercare di chiarire il problema.

Si ringrazia il prof. Antonio Carrelli per i consigli dati ed i mezzi messi a disposizione.

Fisica (Fisica teorica). — *Causalità e indeterminazione nei fondamenti della Meccanica quantica.* Nota di L. Castoldi, presentata (*) dal Socio L. Rolla.

1. Scopo della presente Nota è di approfondire qualche punto dei principî fondamentali della Meccanica quantica ritornando su alcuni concetti già chiaramente esposti dal Fermi (1) in una Nota Lincea di parecchi anni addietro, ma in forma alquanto diversa e con risultati che, formalmente non nuovi, si prestano a interpretazioni dotate forse di qualche interesse speculativo.

2. Sia Σ un sistema quantico elementare dotato di f gradi di libertà caratterizzati da altrettanti parametri lagrangiani $q_1, q_2, \cdots, q_f$ e il cui *stato* all'istante generico t sia quantisticamente definito dal vettore unitario $\psi(q/t)$ dello spazio funzionale complesso.

Se $G(q, p/t_0)$ è l'espressione classica, dipendente delle q_h, dai parametri coniugati p_h e dal tempo, di un'osservabile relativa all'istante t_0, l'equazione

$$(1) \qquad \mathcal{G}\left(q, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q}\Big/ t_0\right)\varphi_n = G_n\varphi_n \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

definisce gli autovalori G_n e le autofunzioni φ_n del corrispondente operatore.

Per semplicità di esposizione ci riferiremo al caso di uno spettro discreto di autovalori semplici, ogni diversa ipotesi a questo riguardo non modificando sostanzialmente il contenuto delle considerazioni che siamo per fare.

L'effettuazione di una misura di G all'istante t_0 fornirà uno, *a priori* imprevedibile, dei valori G_n con probabilità

$$(2) \qquad \pi_n = |\psi \times \varphi_n|^2 = \left|\int \psi\bar{\varphi}_n\, dS\right|^2,$$

l'integrale essendo esteso a tutto lo spazio delle coordinate q_h. Qualunque sia il risultato G_n di tale misura, il vettore di stato ψ, subito dopo eseguita l'osservazione, si identifica colla corrispondente autofunzione φ_n, ed evolve quindi nel tempo secondo la legge dinamica

$$(3) \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{2\pi i}{h}\mathcal{H}(q, p/t)\psi,$$

dove $\mathcal{H}(q, p/t)$ è il noto operatore hamiltoniano.

(*) Nella seduta del 12 aprile 1947.

(1) E. Fermi, *L'interpretazione del principio di causalità nella Meccanica quantica.* « Atti Lincei » (1930), vol. XI, p. 980.

All'istante t_0 le φ_n costituiscono, per definizione, un sistema completo di funzioni ortogonali e, come è sempre possibile supporre, normali. Si ha cioè

$$(4) \qquad \varphi_n \times \varphi_m = \int \varphi_n \bar{\varphi}_m \, dS = \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m \neq n . \end{cases}$$

Ma si riconosce immediatamente che in un istante qualunque t successivo a t_0, il sistema delle $\varphi_n^*(q/t)$ che provengono dalle φ_n testè considerate per evoluzione nel tempo secondo la legge (3) continua a mantenersi ortogonale e normale. Tenuto conto infatti della (3) e del fatto che l'operatore $\mathcal{H}$ è hermitiano, si ha:

$$\frac{d}{dt}(\varphi_n^* \times \varphi_m^*) = \frac{d\varphi_n^*}{dt} \times \varphi_m^* + \varphi_n^* \times \frac{d\varphi_m^*}{dt} = -\frac{2\pi i}{h} [\mathcal{H}\varphi_n^* \times \varphi_m^* - \varphi_n^* \times \mathcal{H}\varphi_m^*] = 0,$$

qualunque siano n ed m. Ne segue che, come in (4):

$$(4') \qquad \varphi_m^*(q/t) \times \varphi_n^*(q/t) = \delta_{nm} .$$

A questo risultato si poteva del resto anche pervenire senza alcun calcolo, osservando soltanto che l'operatore differenziale $-\frac{2\pi i}{h}\mathcal{H}$ che compare nel secondo membro della (2) è antihermitiano, e tenendo presente una proprietà fondamentale di siffatti operatori [2]. A partire dalle $\varphi_n^*(q/t)$ ora introdotte è possibile costruire, istante per istante, un operatore $\mathcal{G}^*(q/p/t)$ univocamente definito dalla condizione di avere in ogni istante come autovalori i medesimi autovalori G_n dell'operatore $\mathcal{G}(q, p/t_0)$ sopra considerato e come corrispondenti autofunzioni le determinazioni attuali delle $\varphi_n^*(q/t)$.

Indicate invero con $\varphi_{n_i}^*(q/t)$ $(i = 1, 2, \cdots)$ le componenti di $\varphi_n^*(q/t)$ sugli assi di un sistema completo ortogonale nello spazio hilbertiano, per esempio su quelli costituiti dalle autofunzioni dell'operatore $\mathcal{H}$ nella sua determinazione all'istante t, l'operatore in questione è notoriamente definito mediante la matrice

$$(5) \qquad \mathcal{G}_{ij}(q, p/t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \varphi_{n_i}^*(q/t) \bar{\varphi}_{n_j}^*(q/t) [3].$$

Va osservato esplicitamente che tale operatore differisce generalmente dalla contemporanea determinazione $\mathcal{G}(q, p/t)$ dell'operatore considerato più sopra all'istante t_0 e generalmente definito come funzione del tempo, i cui autovalori ed autofunzioni all'istante t potranno designarsi rispettivamente con $G_n(t)$ e con $\varphi_n(q/t)$.

(2) Definiamo come antihermitiano l'operatore prodotto dell'unità immaginaria per un operatore hermitiano. Per la proprietà accennata vedasi: H. WEYL, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, 2ª ed., p. 27.

(3) Cfr. per esempio L. CASTOLDI, *Operatori lineari nello spazio hilbertiano che ammettono una riduzione a forma normale*. « Atti Lincei » (1947), vol. II, p. 141.

Quanto alla legge di variazione temporale dell'operatore $\mathcal{G}^*(q, p/t)$, osserviamo che la (5), utilizzando il concetto di prodotto completo di due vettori φ, ψ dello spazio hilbertiano, definito ponendo

$$(\varphi \cdot \bar{\psi})_{ij} = \varphi_i \bar{\psi}_j,$$

può scriversi

$$\mathcal{G}^* = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \varphi_n^* \cdot \bar{\varphi}_n^*.$$

Di qui, per derivazione rispetto al tempo, si ottiene:

$$\frac{\partial \mathcal{G}^*}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \left(\frac{\partial \varphi_n^*}{\partial t} \cdot \bar{\varphi}_n^* + \varphi_n^* \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}_n^*}{\partial t} \right), \tag{6}$$

ossia, tenuto conto che le ψ_n^* evolvono, per definizione, secondo la legge (3) e tornando alle componenti sugli assi principali dell'operatore $\mathcal{H}$ nella sua determinazione all'istante t:

$$\frac{\partial \mathcal{G}_{ij}^*}{\partial t} = \frac{2\pi i}{h} \sum_{n=1}^{\infty} G_n \sum_{h=1}^{\infty} \left\{ -\delta_{hi} E_h(t) \varphi_{n_h}^* \bar{\varphi}_{n_j}^* + \varphi_{n_i}^* E_h(t) \delta_{hj} \bar{\varphi}_{n_h}^* \right\}, \tag{7}$$

dove con $E_h(t)$ si sono indicati gli autovalori dell'operatore $\mathcal{H}$ relativi all'istante t e con δ_{ij} le componenti della matrice unitaria. Dalla (7), tornando agli operatori e tenuto conto di (5), segue senz'altro:

$$\frac{\partial \mathcal{G}^*}{\partial t} = \frac{2\pi i}{h} \{ \mathcal{G}^* \mathcal{H} - \mathcal{H} \mathcal{G}^* \}. \tag{8}$$

Posto ora

$$\mathcal{G}^*(q, p/t) - \mathcal{G}(q, p/t) = \Delta \mathcal{G}, \tag{9}$$

la (8) assume la forma:

$$\frac{\partial \Delta \mathcal{G}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \frac{2\pi i}{h} \{ (\mathcal{G}\mathcal{H} - \mathcal{H}\mathcal{G}) + (\Delta \mathcal{G} \cdot \mathcal{H} - \mathcal{H} \cdot \Delta \mathcal{G}) \}, \tag{10}$$

la quale, per $t = t_0$, ove è $\Delta \mathcal{G} = 0$, diventa:

$$\left(\frac{\partial \Delta \mathcal{G}}{\partial t} \right)_{t=t_0} = -\left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} \right)_{t=t_0} + \frac{2\pi i}{h} (\mathcal{G}\mathcal{H} - \mathcal{H}\mathcal{G}). \tag{10'}$$

Tornando alla (10), e applicandola al caso che sia $\mathcal{G} = \mathcal{H}$, si ottiene in particolare:

$$\frac{\partial \Delta \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \frac{2\pi i}{h} (\Delta \mathcal{H} \cdot \mathcal{H} - \mathcal{H} \cdot \Delta \mathcal{H}), \tag{11}$$

e per $t = t_0$:

$$\left(\frac{\partial \Delta \mathcal{H}}{\partial t} \right)_{t=t_0} = -\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \right)_{t=t_0}. \tag{11'}$$

Osserviamo qui incidentalmente che le (11), (11') permettono facilmente di concludere che condizione necessaria e sufficiente affinchè sia costantemente $\Delta\mathcal{H} = 0$ è che l'operatore $\mathcal{H}$ sia indipendente esplicitamente dal tempo.

Più in generale, la condizione affinchè un'operatore $\mathcal{G}$ sia un integrale primo si identifica, in virtù di (10), (10'), coll'altra che sia costantemente $\Delta\mathcal{G} = 0$.

La (9) (o la (10)) fornisce la legge differenziale con cui varia nel tempo l'operatore differenziale $\mathcal{G}^*(q, p/t)$ capace di confermare, per così dire, ad ogni istante t il risultato della misura della grandezza $G(q, p/t_0)$ effettuata all'istante t_0.

Va anche osservato che se si ponesse invece il problema di determinare quale osservazione vada fatta sul sistema all'istante t_0, in modo che un qualunque risultato da essa fornito riuscisse necessariamente confermato dall'applicazione all'istante t dell'operatore $\mathcal{G}(q, p/t)$, e si denotasse il corrispondente operatore con $\mathcal{G}^0(q, p/t_0, t)$, per la sua derivata temporale si otterrebbe

$$(12) \qquad \frac{\partial \mathcal{G}^0}{\partial t} = -\frac{\partial \Delta\mathcal{G}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} - \frac{2\pi i}{h}\{(\mathcal{G}\mathcal{H} - \mathcal{H}\mathcal{G}) + (\Delta\mathcal{G}\cdot\mathcal{H} - \mathcal{H}\cdot\Delta\mathcal{G})\},$$

formula che, confrontata con (9) mette in luce un rapporto (del resto facilmente prevedibile) di reciprocità tra i due problemi, e che per $t = t_0$ si riduce all'altra ben nota [4]

$$(12') \qquad \left(\frac{\partial \mathcal{G}^0}{\partial t}\right)_{t=t_0} = \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}\right)_{t=t_0} - \frac{2\pi i}{h}(\mathcal{G}\mathcal{H} - \mathcal{H}\mathcal{G}).$$

3. Dal corso delle precedenti argomentazioni, e, precisamente, dall'aver tenuto conto della legge dinamica (3) secondo cui evolvono le φ_n^* a partire dalle loro determinazioni iniziali φ_n all'istante t_0, risulta che la possibilità di riprodurre all'istante t il risultato della misura di $G(q, p/t_0)$ all'istante t_0, richiede sostanzialmente che quest'ultima sia stata effettivamente eseguita. In altri termini la relazione tra $\mathcal{G}(q, p/t_0)$ e $\mathcal{G}^*(q, p/t)$ ha carattere di irreversibilità rispetto al tempo nel senso che, mentre il risultato (qualunque esso sia) di una misura isolata di $G(q, p/t_0)$ all'istante t_0 determina univocamente il risultato della misura di $G^*(q, pt/)$ in un qualunque istante successivo, un'analoga applicazione *isolata* [5] di $\mathcal{G}^*(q, p/t)$ all'istante t non dà informazione alcuna su quale sarebbe stato il risultato di una misura (non effettivamente eseguita) di $G(q, p/t_0)$ all'istante t_0. Allo stesso modo, del resto, che la accennata misura di $G(q, p/t_0)$ all'istante t_0 non consente alcuna previsione sul risultato di una misura *isolata* di $\mathcal{G}^*(q, p/t)$ in un qualunque istante successivo.

(4) Si confronti per esempio E. PERSICO, *Fondamenti di Meccanica atomica*, p. 365, f. (118), salvo qualche differenza di notazione.

(5) Di due misure da effettuarsi rispettivamente negli istanti t_0 e $t > t_0$, diremo *isolata* la seconda quando sia effettuata da sola, senza preventiva applicazione della prima.

In altre parole ancora: quando si sia effettuata all'istante t_0 una misura di $G(q, p/t_0)$ e questa abbia dato un certo risultato G_n, la misura all'istante t di $G^*(q, p/t)$ non aggiunge nulla alla conoscenza dello stato del sistema, nè permette possibili previsioni su risultati di misure di altre grandezze diverse da quelle deducibili dalla sola conoscenza del risultato delle misure di $G(q, p/t_0)$ all'istante t_0. Se invece quest'ultima misura non è stata effettuata, risultano imprevedibili sia il risultato di una sua immaginata effettuazione all'istante t_0, sia il risultato dell'applicazione all'istante t dell'operatore $\mathcal{G}^*(q, p/t)$. Da tutto ciò risulta spontaneo il problema di sapere come possa fisicamente realizzarsi l'operatore $\mathcal{G}^*(q, p/t)$. Una tale realizzazione può ottenersi ovviamente col complesso delle seguenti operazioni: 1°) Applicazione all'istante t_0 dell'operatore $\mathcal{G}(q, p/t_0)$; 2°) Registrazione nel medesimo istante del risultato di tale misura; 3°) Lettura all'istante t del medesimo risultato.

Tale procedimento appare del tutto banale, ma le considerazioni sopra esposte suggeriscono l'idea che la realizzazione indicata possa, in definitiva, essere l'unica esistente per l'operatore $\mathcal{G}^*(q, p/t)$.

Effettivamente, quando si osservi che, mediante (3) e (5), la definizione analitica di detto operatore è unicamente legata a quella di $\mathcal{G}(q, p/t_0)$ all'istante t_0 e alla legge dinamica di evoluzione degli stati, si riconosce che il complesso delle operazioni fisiche realizzanti l'operatore in questione non può essere indipendente dall'analogo complesso relativo a $\mathcal{G}(q, p/t_0)$, cosicchè, in definitiva, non può differire sostanzialmente dal semplice processo sopra descritto.

L'espressione analitica dell'operatore $\mathcal{G}^*(q, p/t)$ potrà bensì indicare l'applicazione contemporanea di operatori relativi all'istante t e indipendenti dalla definizione di $\mathcal{G}(q, p/t_0)$ all'istante t_0; oppure anche l'applicazione di altrettali operatori relativi a successivi istanti dell'intervallo $t_0 - t_1$. Ma si tratterà necessariamente, per quanto precede, di operatori non permutabili [6], o comunque, non realizzabili in blocco in un qualsiasi istante dell'intervallo $t_0 - t_1$. Il legame tra i dati forniti dall'applicazione di $\mathcal{G}(q, p/t_0)$ all'istante t_0 e di $\mathcal{G}^*(q, p/t)$ conformemente alla sua espressione formale, avrà allora come è noto [7], soltanto significato statistico, nel senso che il risultato delle operazioni analitiche indicate in $G^*(q, p/t)$ eseguite sulle medie dei risultati dell'applicazione separata degli operatori che compaiono in $\mathcal{G}^*(q, p/t)$ a distinti sistemi di numerose particelle per ciascuna delle quali la misura di $G(q, p/t_0)$ in t_0 ha fornito un medesimo valore G_n, coincide con G_n.

Gli esempi che seguono possono servire a mettere meglio in luce il contenuto di quest'ultimo punto.

(6) Due operatori L, M relativi rispettivamente a due istanti diversi t' e t'' ($t' < t''$) si dicono qui *non permutabili* allorchè le autofunzioni di M non possono dedursi da quelle di L per evoluzione temporale da t' a t'' secondo la legge dinamica (3). In tal senso sono invece permutabili gli operatori $\mathcal{G}(q, p/t_0)$ e $\mathcal{G}^*(q, p/t)$ delle precedenti considerazioni. Se L ed M sono permutabili, l'applicazione di M non modifica lo stato creato nel sistema dalla precedente applicazione di L.

(7) Si confronti, per esempio, E. PERSICO, Opera citata alla nota (4), p. 333.

4. ESEMPI – 1° Particella mobile sull'asse x, soggetta a forza derivante da un potenziale $U(x)$. Operatore $\mathcal{G} = x$. È ora:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2m}\frac{h^2}{4\pi^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - U(x) \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \mathcal{G}\mathcal{H} - \mathcal{H}\mathcal{G} = \frac{h^2}{4\pi^2 m}\frac{\partial}{\partial x}.$$

Si verifica immediatamente che, in queste condizioni, la (10) è soddisfatta assumendo

$$\Delta\mathcal{G} = -\frac{1}{m}\frac{h}{2\pi i}\int_{t_0}^{t}\frac{\partial}{\partial x}\,dt, \tag{13}$$

giacchè allora, ammesse verificate per la $\psi(x, t)$ le condizioni di continuità e derivabilità che consentono la derivazione sotto il segno di integrale, si annulla l'operatore $\Delta\mathcal{G}\cdot\mathcal{H} - \mathcal{H}\cdot\Delta\mathcal{G}$. Dalla (13), avuto riguardo all'attuale definizione dell'operatore $\mathcal{G}$ e passando dagli operatori ai valori medi delle corrispondenti osservabili, risulta:

$$x_0 \equiv x(t_0) = \bar{x}(t) - \int_{t_0}^{t}\frac{\bar{p}_x}{m}\,dt, \tag{13'}$$

dove le lettere sopralineate denotano valori medi.

Il significato da attribuire alle (13), (13') è il seguente: Si considerino N + 1 sistemi contenenti ciascuno un gran numero di particelle di massa m, per le quali tutte la misura all'istante t_0 della grandezza x abbia fornito il valore x_0. Su un primo insieme si misuri la x all'istante t e sia $\bar{x}(t)$ la media dei valori osservati. Diviso poi l'intervallo $t_0 - t$ in N parti mediante gli istanti $t_0, t_1, \cdots t_N = t$, si misuri, su un secondo insieme di particelle, la grandezza $\frac{P_x}{m}$ all'istante t_1, e sia $\left(\frac{\bar{p}_x}{m}\right)_1$ la media dei valori osservati. Si proceda analogamente su un terzo, quarto, $\cdots$, N + 1–esimo sistema negli istanti $t_2, \cdots, t_N$, indi si formi la somma

$$\sum_1^N{}_i \left(\frac{\bar{p}_x}{m}\right)_i (t_i - t_{i-1}).$$

Immaginando di ripetere l'intero procedimento per valori illimitatamente crescenti di N ed evanescenti degli intervalli $t_i - t_{i-1}$, la somma precedente si muta nell'integrale a secondo membro di (13'). Quest'ultima, poi, afferma che il risultato delle operazioni di media indicate nel secondo membro e dianzi separatamente descritte coincide con $x(t_0)$.

2° Particella mobile sull'asse x e soggetta a forza *costante* F_x — Operatore $\mathcal{G} = \frac{2\pi i}{h}\frac{\partial}{\partial x}$.

Si ha ora, a meno di una inessenziale costante additiva,

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2m}\frac{h^2}{4\pi^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - F_x \cdot x;$$

inoltre:

$$\mathcal{G}\mathcal{H} - \mathcal{H}\mathcal{G} = -\frac{h}{2\pi i} F_x \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} = 0 .$$

La (10) risulta soddisfatta ponendo:

$$\Delta\mathcal{G} = -\int_{t_0}^{t} F_x \, dt = -F_x (t - t_0), \tag{14}$$

giacchè è allora, anche qui, $\Delta\mathcal{G}\cdot\mathcal{H} - \mathcal{H}\cdot\Delta\mathcal{G} = 0$.

Dalla (14), avuto riguardo all'attuale definizione dell'operatore $\mathcal{G}$, e passando dagli operatori ai valori medi delle corrispondenti variabili, risulta:

$$p(t_0) = \bar{p}(t) - F_x (t - t_0),$$

sul cui significato vanno fatte considerazioni analoghe a quelle svolte per l'esempio 1°).

5. Interpretando le considerazioni esposte nel senso della validità o meno di un principio di causalità nella evoluzione temporale di un sistema meccanico elementare, possiamo concludere come segue:

« Per lo "*stato*" quantico di un sistema, caratterizzato dalla funzione $\psi(q, t)$ e determinabile in ogni istante t_0 mediante opportune misure (osservazioni massime) vale (a prescindere dalle imprevedibili perturbazioni che tali misure vi determinano, all'atto della loro effettuazione) uno stretto principio di causalità, l'evoluzione della ψ essendo univocamente determinata per tutti gli istanti successivi a t_0 dalla legge dinamica (3).

« Non esiste invece la possibilità di prevedere risultati di osservazioni, da effettuarsi in un istante qualunque, mediante osservazioni fatte in istanti precedenti, a meno che non ci si riferisca in modo banale a osservazioni consistenti nella lettura ad un istante t di un risultato registrato in un istante precedente t_0 e non si consideri questa registrazione come una previsione di quella lettura.

« Effettive previsioni sono possibili soltanto con riferimento a valori medi su un gran numero di sistemi, e il loro contenuto non diversifica dalle leggi della Meccanica classica ».

Chimica. — *Adsorbimento attivato di anidride solforosa ed ossigeno su di un catalizzatore a base di vanadato d'argento.* Nota [*] di N. Agliardi, presentata [**] dal Corrisp. G. Natta.

In una precedente Nota [1] erano stati esposti i risultati di una prima serie di ricerche sull'adsorbimento attivato dell'anidride solforosa, dell'ossigeno dell'aria e delle loro miscele su catalizzatori a base di ossido di vanadio. L'importanza dei catalizzatori al vanadio nell'ossidazione dell'anidride solforosa ad anidride solforica ed il desiderio di confermare con altre prove i risultati già ottenuti, ci hanno indotto a continuare la ricerca e ad estenderla ad altri catalizzatori dello stesso gruppo. Abbiamo ora preso in considerazione un catalizzatore a base di vanadato di argento ed è nostra intenzione continuare le prove sugli altri catalizzatori di ossidazione attualmente usati nella preparazione industriale dell'oleum, esclusi quelli al platino.

Come già si ebbe occasione di dire, la letteratura sull'argomento è praticamente limitata alla scuola russa, ed anche in quest'ultimo lavoro i nostri dati si accordano bene ai risultati ed alle conclusioni di G. Boreskow e collaboratori [2].

Date le difficoltà contingenti abbiamo dovuto limitare le nostre ricerche agli adsorbimenti dei gas puri: non appena possibile contiamo di estenderle alle loro miscele.

L'apparecchiatura usata venne già descritta [3] e non subì modifiche. Prima di iniziare questa serie di prove essa venne ripulita completamente lavandola con miscela cromico–solforica e con acqua distillata: infine essa venne essiccata con aria calda e secca. A differenza delle prove precedenti abbiamo usato per la lubrificazione dei rubinetti, anzichè il grasso Leybold tipo R, il tipo S della medesima casa, che a nostro avviso sembra resistere meglio all'azione dell'anidride solforosa. Riteniamo inoltre, forse a causa della sua maggiore consistenza, che esso adsorba meno SO_2 del corrispondente tipo R, basando tale ipotesi sul fatto che, essendo il vetro dell'apparecchio in condizioni identiche di pulizia, non abbiamo più riscontrato inconvenienti nella misura dei volumi di anidride solforosa, o per lo meno tali inconvenienti vennero di molto ridotti. La misura del gas introdotto inizialmente sul catalizzatore viene eseguita in una buretta collegata ad un manometro applicando la legge di Boyle, ed assumendo la media dei valori ottenuti ad almeno 5 pressioni diverse. Ora nelle prove precedenti [3] gli scarti che si avevano tra le diverse letture erano ben maggiori di quanto

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano e Centro Studi di Chimica Industriale del C. N. R.

(**) Nella seduta dell'8 marzo 1947.

(1) N. Agliardi e T. Slodyk, «Gazzetta Chimica Italiana» (in corso di stampa).

(2) G. Boreskow e collaboratori, «J. physik. Chem. URSS», *14*, 161 (1940).

(3) N. Agliardi, «Ricerca Scientifica e Ricostruzione», *16*, 278 (1946).

non fossero le differenze tra i volumi calcolati mediante la legge di Boyle e quella di Van der Waals, mentre nelle misure eseguite con ossigeno ed ancor meglio in quelle con idrogeno [4, 5, 6] si raggiunge sempre e facilmente una precisione dell'ordine di 1/100 di cm^3. Inoltre la diminuzione costante dei volumi corrispondenti alle pressioni maggiori ci aveva fatto dubitare dell'esistenza di un adsorbimento del gas da parte dell'apparecchiatura stessa ed in particolare da parte del grasso dei rubinetti.

Tali inconvenienti risultarono in queste prove notevolmente ridotti. Per uniformità sperimentale i volumi di gas, introdotti sul catalizzatore e misurati nella buretta a diverse pressioni, vennero determinati estrapolando i prodotti Vp per la pressione di 341 mm Hg, alla quale ebbero luogo i vari adsorbimenti.

Nelle prove precedenti [1] anzichè dell'ossigeno puro si era studiato l'adsorbimento dell'aria; ciò non ci aveva permesso di valutare completamente la lentezza e l'esiguità dell'adsorbimento attivato riscontrato, perchè l'ossigeno era ad una pressione effettiva di 1/5 di quella indicata e perchè la presenza dell'azoto poteva modificare notevolmente il meccanismo cinetico dell'adsorbimento, specialmente per quanto riguarda la diffusione sia nella fase gassosa, che in quella adsorbita.

Riteniamo opportuno ricordare qui che le misure da noi effettuate corrispondono alle differenze tra le quantità adsorbite del gas in esame e le quantità adsorbite nelle medesime condizioni di temperatura e pressione di un gas inerte (elio, argo o azoto).

In questa serie di prove abbiamo pertanto usato ossigeno purissimo e perfettamente secco. Analogamente per l'anidride solforosa.

Catalizzatore. – Per la preparazione del catalizzatore ci siamo serviti del medesimo gelo di silice in cilindretti già descritto nella nota citata [3]. Esso venne essiccato in stufa a 220° e raffreddato in un essiccatore a vuoto munito di imbuto separatore. Fatto il vuoto, il catalizzatore venne annegato in una soluzione al 10 % di vanadato sodico, quindi sgocciolato, asciugato grossolanamente con carta da filtro ed essiccato in stufa a 110°. L'operazione venne ripetuta tre volte in identiche condizioni. Infine il catalizzatore secco venne trattato con un eccesso di soluzione di nitrato d'argento al 10 % e lasciato 24 ore nella soluzione mantenuta in agitazione. In tal modo precipita nei pori del gelo di silice il vanadato d'argento. L'eccesso di nitrato d'argento venne eliminato per successivi lavaggi con acqua distillata fino a che il filtrato, trattato con HCl, non mostrasse opalescenza.

Sul catalizzatore secco così preparato venne determinato il vanadio e l'argento, che risultarono rispettivamente 3,96 % di V e 20,01 % di Ag.

(4) G. Natta e N. Agliardi, «Atti R. Acc. Lincei» (in corso di stampa).
(5) G. Natta e N. Agliardi, «Atti R. Acc. Lincei» (in corso di stampa).
(6) G. Natta e N. Agliardi, «Atti R. Acc. Lincei» (in corso di stampa).

TABELLA I.

	Temperat. °C	Minuti	Ncm³		Temperat. °C	Minuti	Ncm³
Prova 2	210°	1	0,30	Prova 3	267°	1	0,51
SO_2		3	0,51	SO_2		3	0,74
		6	0,74			6	0,97
		10	0,81			10	1,18
		15	0,91			15	1,37
		25	1,03			25	1,60
		40	1,17			40	1,84
		60	1,24			60	2,14
		122	1 45			120	2,74
		195	1,53			180	3,10
		240	1,57			240	3,40
		1125	2,29			440	3,99
		2880	2,85			1380	6,64
						1740	6,96
Prova 4	318°	1	0,23	Prova 5	368°	1	0,73
SO_2		3	0,81	SO_2		3	1,66
		6	1,32			6	2,30
		10	1,73			10	2,82
		15	2,12			15	3,29
		25	2,63			25	3,99
		40	3,16			42	4,87
		60	3,68			60	5,62
		120	4,94			120	7,30
		180	5,70			180	8,51
		243	6,36			240	9,36
		420	7,73			360	10,73
		1380	11,64			1260	14,66
		1440	11,83			1380	15,05
		1824	13,25			1630	16,04
						1817	16,64

Segue: TABELLA I.

	Temperat. °C	Minuti	Ncm³		Temperat. °C	Minuti	Ncm³
Prova 7	216°	1	0,02	Prova 8	266°	3	0,13
O_2		3	0,10	O_2		16	0,17
		31	0,15			40	0,19
		140	0,19			120	0,22
		240	0,28				
Prova 9	319°	1	0,02	Prova 10	368°	1	0,33
O_2		3	0,19	O_2		3	0,56
		6	0,20			6	0,75
		10	0,22			10	0,97
		15	0,24			16	1,22
		25	0,28			25	1,58
		42	0,35			40	1,90
		117	0,43			85	2,31
		180	0,57			136	2,85
		332	0,81			250	3,83
						300	3,96
						1140	6,21

DISCUSSIONE DEI RISULTATI. – Vennero eseguite quattro prove di adsorbimento di anidride solforosa ed altrettante di ossigeno a diverse temperature comprese tra 210° C e 368° C, tutte alla pressione costante di 341 mm Hg. I risultati di tali prove sono riportati graficamente nella figura 1 (a linea continua per l'SO_2, a linea–punto per l'O_2); nelle tabelle sono riportate le quantità adsorbite anche per tempi maggiori. Nel caso dell'ossigeno queste ultime consentono di seguire meglio il fenomeno nella sua esiguità. I volumi di gas adsorbiti sono espressi in condizioni normali (0°C, 760 mm Hg).

PROVE CON ANIDRIDE SOLFOROSA. – Le quantità di anidride solforosa adsorbita dal catalizzatore con vanadato d'argento risultano praticamente uguali a quelle adsorbite in analoghe condizioni di temperatura e pressione dal catalizzatore con semplice ossido di vanadio, qualora queste vengano riferite ad un ugual peso di vanadio. La curva a tratti della figura si riferisce infatti alle misure citate relative all'ossido di vanadio [1]: i valori sperimentali di questa serie precedente di prove sono stati moltiplicati per il

fattore 1,21, corrispondente al diverso contenuto in vanadio dei due catalizzatori impiegati.

La forma delle curve risulta però diversa nei due casi, il che ci porta a concludere sulla diversità del meccanismo di adsorbimento e quindi sulla diversità dei centri attivi dei due catalizzatori. Il fatto che nel caso dell'ossido di vanadio la curva di adsorbimento sia inizialmente più ripida di quella

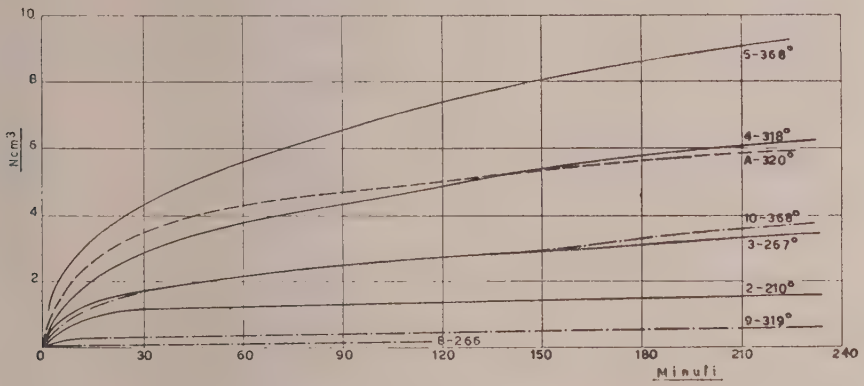


Fig. 1. – Adsorbimento attivato di SO_2 (curve ———) e di O_2 (curve —·—·—) su Ag_3VO_4 supportato su gelo di silice. Pressione = 341 mm Hg. (i numeri che precedono le temperature si riferiscono alla successione delle prove).

corrispondente del vanadato d'argento, mentre per il secondo tratto le due curve si avvicinano, ci induce ad attribuirne la causa all'adsorbimento attivato primario, mentre il processo di diffusione nell'interno del catalizzatore dovrebbe essere simile nei due casi.

TABELLA II.

Energie di attivazione.

Per l'SO_2 tra $T_1 = 641$ e $T_2 = 591$ °K

Ncm3 adsorbiti	2	3	4	5	6
Energie di attivazione (cal.)	15500	16500	14000	16000	19500

Per l'SO_2 trá $T_1 = 591$ e $T_2 = 540$ °K

Ncm3 adsorbiti	2	3
Energie di attivazione (cal.)	21000	20000

Nella tabella II sono riportati i valori delle energie di attivazione del processo di adsorbimento calcolati per le curve indicate, in funzione delle quantità adsorbite. A differenza di quanto avviene nell'adsorbimento dell'anidride solforosa sull'ossido di vanadio, per il quale l'energia apparente di attivazione diminuisce rapidamente con l'aumentare della quantità adsorbita, nel caso del vanadato di argento l'energia di attivazione del processo si mantiene sempre elevata.

Prove con ossigeno. – Le esperienze con ossigeno vennero condotte sullo stesso campione di catalizzatore dopo di averlo ossidato per 24 ore a 400° C, alla pressione costante di O_2 di 600 mm Hg. A questa temperatura il processo di ossidazione è inizialmente così rapido che non era possibile con il nostro apparecchio seguirlo cineticamente: è nostra intenzione riprendere le prove a temperatura più bassa e confrontarle con i corrispondenti risultati della riduzione.

L'adsorbimento dell'ossigeno, risulta nettamente inferiore nel caso del Ag_3VO_4 rispetto al V_2O_5: infatti troviamo dopo 240 minuti, e sempre riferendoci ad ugual peso di vanadio, 0,65 Ncm³ per il vanadato (a 319°) contro 1,33 Ncm³ per l'anidride vanadica.

Anche nel caso del vanadato d'argento, ed in particolare per la prova n. 9, si è constatato, sebbene in modo meno evidente, un periodo di induzione iniziale, ossia un ritardo nell'inizio dell'adsorbimento.

Per l'adsorbimento attivato dell'ossigeno non è stato possibile tracciare la curva delle energie di attivazione; per il primo mezzo Ncm³ adsorbito abbiamo calcolato, tra 367° e 319°, una E di circa 65000 cal. Tale valore è però assai incerto data la piccolissima inclinazione della tangente dalla curva a temperatura più bassa.

Conclusioni. – Si sono esaminati gli adsorbimenti attivati dell'anidride solforosa e dell'ossigeno su di un catalizzatore a base di vanadato d'argento supportato su silicagel, e se ne è esaminato il comportamento in confronto alle precedenti prove eseguite su di un catalizzatore all'ossido di vanadio.

Il vanadato d'argento, a parità di quantità di vanadio, presenta circa la stessa attività dell'ossido di vanadio per quanto riguarda l'adsorbimento dell'anidride solforosa, mentre si comporta in modo nettamente inferiore nei riguardi dell'adsorbimento dell'ossigeno.

Il processo di adsorbimento dell'anidride solforosa su vanadato d'argento si svolge con una energia di attivazione E, dell'ordine delle 20000 cal., che diminuisce solo lentamente con il crescere della quantità adsorbita, contrariamente a quanto avviene per l'ossido di vanadio per il quale si ha una rapida diminuzione E con il procedere dell'adsorbimento.

In base al comportamento dell'adsorbimento attivato non si dovrebbe provvedere per il vanadato d'argento una attività catalitica superiore a quella dell'anidride vanadica, come invece risulta dai lavori di B. Neumann e coll. Ciò ci porta ancora una volta a concludere che tra attività catalitica e potere adsorbente non ci sono delle relazioni semplici. Dato anche il diverso meccanismo catalitico riscontrato sul vanadato d'argento, riteniamo che l'azione promotrice dell'argento non possa essere considerata come semplicemente protettiva nei riguardi dell'invecchiamento, ma che dia luogo a nuovi centri attivi con elevato potere catalitico, se pure con un minimo potere adsorbente.

Elettrochimica. — *Comportamento anodico dello stagno in soluzione alcalina*(*). Nota I di G. BIANCHI, presentata (**) dal Corrisp. O. SCARPA.

Lo stagno che funziona da anodo nell'elettrolisi di una soluzione alcalina può passivarsi in forme diverse secondo la composizione dell'elettrolita, la densità di corrente e la temperatura. Il fenomeno è già stato indagato per l'interesse che esso presenta nel funzionamento dei bagni di stagnatura alcalina costituiti da una soluzione di stannato sodico e di soda caustica nei quali l'anodo di stagno deve sciogliersi nel bagno con lo stesso rendimento in corrente con il quale lo stagno si deposita sul catodo e senza formare ioni stannosi che provocano la formazione al catodo di un deposito di stagno spugnoso.

Le ricerche compiute (1) utilizzando soluzioni di stannato sodico con un eccesso di soda caustica hanno dimostrato che:

1° Esiste una densità di corrente critica, per una data composizione del bagno e per una data temperatura, al disotto della quale lo stagno entra in soluzione come stannito dando esclusivamente ioni bivalenti con un rendimento in corrente molto vicino al 100 %, mentre al disopra di questa densità di corrente critica l'elettrodo di stagno diventa passivo ricoprendosi di una pellicola di ossidi ed aumentando bruscamente il suo potenziale anodico.

2° Lo stagno presenta due forme diverse di passività alle quali corrisponde un aspetto diverso dell'anodo: in una di esse si forma una pellicola gialla e lo stagno entra in soluzione come stannato sodico dando ioni tetravalenti con un rendimento in corrente di circa il 70 %, nell'altra si forma una pellicola bruna nera e solo una piccola quantità di stagno entra in soluzione come stannato con un rendimento in corrente di circa il 5 %. La prima di queste forme di passività (che è quella che si cerca di ottenere nei bagni di stagnatura) esiste solo entro un intervallo ristretto di valori della densità di corrente al disopra dei quali si trasforma nella seconda forma che è stabile.

3° La passività dovuta alla pellicola gialla scompare quando si diminuisce la densità di corrente sotto un certo limite; quella dovuta alla pellicola bruna è stabile e persiste anche dopo molto tempo da che si è interrotta la corrente.

Kerr (2) ha indagato la natura delle pellicole che si formano nelle due forme di passività operando a diverse temperature e con soluzioni di soda

(*) Lavoro svolto nel Laboratorio di Elettrochimica del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta del 12 aprile 1947.

(1) WRIGHT–TAYLOR, « J. Electrodepos. Tech. Soc. », *7*, 103 (1932); HOTHERSALL–CLARKE–MACNAUGHTAN, « J. Electrodepos. Tech. Soc. », *9*, 101 (1934); HANSEL, « Z. Electrochem. », *41*, 314 (1935); MACNAUGHTAN–TAIT–BAIER, « J. Electrodepos. Tech. Soc. », *12*, 45 (1937); STOUT–BAUM, « Trans. Electrochem. Soc. », *72*, 429 (1937); BAIER–ANGLES, « J. Electrodepos. Tech. Soc. », *15*, 1 (1939).

(2) KERR, « J. Soc. Chem. Ind. », *57*, 405 (1938).

caustica di varia concentrazione. Esso ha trovato che la pellicola gialla si forma solo con densità di corrente inferiori ad un valore limite superiore (in corrispondenza del quale si forma la pellicola bruna) che aumenta con l'aumentare della temperatura. Inoltre lo spessore della pellicola gialla diventa costante dopo pochi minuti raggiungendo un valore di qualche centesimo di micron che è tanto maggiore quanto più è grande la densità di corrente e tanto minore quanto più è grande la concentrazione della soluzione di soda caustica; lo spessore della pellicola bruna continua ad aumentare linearmente col tempo. Kerr ha pure trovato che la pellicola bruna è quasi completamente insolubile nelle soluzioni di soda caustica e che la pellicola gialla è solubile in esse in misura tanto maggiore quanto maggiore è la concentrazione e la temperatura, concludendo che la pellicola gialla corrisponde ad uno stato di equilibrio tra l'ossido stannico che si forma per opera della corrente e l'ossido stannico che si discioglie nella soluzione. Questo equilibrio può sussistere solo tra due limiti ben definiti della densità di corrente: se gli ioni OH^- diffondono con una velocità tale da reagire con la pellicola di ossido più rapidamente di quanto la pellicola stessa è riformata dalla corrente, lo stato passivo scompare e lo stagno si discioglie come ione bivalente; se la densità di corrente è così grande che la regione in vicinanza dell'anodo risulta impoverita di ioni OH^- si forma la pellicola bruna che è costituita da un miscuglio di ossido stannoso e stannico idratati, ed è praticamente insolubile nella soluzione.

Nella ricerca, di cui la presente Nota, ho ripreso l'argomento per studiare i fenomeni che si manifestano nell'intervallo di tempo in cui lo stagno diventa passivo, dal momento che la solubilità nello elettrolita di uno dei prodotti della passivazione (pellicola gialla) fa prevedere la comparsa di fenomeni periodici che non dovrebbero verificarsi con l'altro prodotto della passivazione (pellicola bruna) che è insolubile.

La disposizione sperimentale da me usata era costituita da un bicchiere da 250 c.c. (immerso in un adatto termostato) che conteneva la soluzione per le prove, nel quale erano immersi due catodi costituiti da bacchette di ferro circondate da una candela di porcellana porosa che impediva la diffusione nell'elettrolita dei prodotti catodici. L'anodo era costituito da un cilindro del diametro di 13 mm. di stagno purissimo Kahlbaum colato in un tubo di vetro in modo che il contatto con l'elettrolita avveniva solo su una superficie ben definita di 1,32 cm^2; quando l'anodo era posto nella soluzione tale superficie era inclinata rispetto alla verticale di un angolo di circa 30°. Il circuito elettrico, comprendente un amperometro e un voltmetro di precisione, era alimentato attraverso reostati con la tensione di 120 V fornita da una batteria di accumulatori [3].

Le esperienze con le varie soluzioni e a diverse temperature sono state eseguite nel modo seguente: appena immerso nella soluzione l'anodo di stagno

(3) Ho scelto una tensione così alta per evitare sensibili variazioni della corrente che attraversa la cella elettrolitica nel momento in cui la sua tensione aumenta per il manifestarsi dei fenomeni di passività e per evitare che variazioni di corrente dipendenti dalle variazioni di tensione amplifichino i fenomeni periodici.

(precedentemente pulito con una lima) facevo passare una piccolissima corrente e aspettavo che la tensione raggiungesse un valore costante, dopo di che aumentavo molto lentamente la corrente [4] leggendo i valori corrispondenti della tensione. Quando si manifestavano fenomeni periodici, nei quali a corrente costante la tensione variava periodicamente tra due valori, lasciavo la corrente costante per qualche minuto per poter rilevare i fenomeni stessi che risultavano caratterizzati dai valori entro cui variava la tensione della cella elettrolitica e dal periodo: la densità di corrente critica, alla quale l'anodo diventava passivo, mi era indicata dalla rapida variazione della tensione che aumentava di $3 \div 4$ V. Dopo di che aumentavo ancora gradualmente la corrente [5] per poi cominciare a diminuirla sempre leggendo i valori corrispondenti della tensione e rilevando i fenomeni periodici fino a raggiungere la corrente iniziale. Oltre a questo notavo quando sull'anodo cominciava a svolgersi ossigeno e l'aspetto che l'anodo aveva alla fine dell'esperienza.

La figura 1 riproduce il grafico della tensione della cella elettrolitica in funzione della corrente per la prova a 40°C con una soluzione di soda caustica decinormale: inizialmente la tensione cresce linearmente con la corrente, poi la tensione subisce delle piccole diminuzioni (circa 0,01 V) istantanee quando si aumenta la corrente [6] e subito dopo la tensione comincia ad oscillare tra due valori mentre la corrente rimane costante. Le oscillazioni sono persistenti ed hanno un periodo di circa un minuto. Aumentando la corrente le oscillazioni continuano tra due valori della tensione che aumentano all'aumentare della corrente in modo che l'ampiezza delle oscillazioni rimane circa costante, mentre che il loro periodo diminuisce. L'intervallo di corrente in cui si hanno fenomeni periodici e la loro ampiezza è indicato dalla zona tratteggiata della figura. Quando la corrente raggiunge 9 mA tutti i fenomeni descritti cessano e la tensione torna a crescere linearmente con la corrente fino a che, raggiunta la densità di corrente critica di 17,5 mA, la tensione sale regolarmente in circa 10 sec. da 0,95 V a 4,05 V per poi diminuire in circa 30 sec. a 3,70 V [7]: in questo momento sull'anodo comincia a svolgersi del gas. Aumentando ancora la corrente, la tensione sale regolarmente per poi regolarmente diminuire quando si diminuisce la corrente come è indicato nella figura. Con una soluzione di soda normale a 40°C, immediatamente prima che compaiano i fenomeni periodici, si osserva ancora che, aumentando la corrente, la tensione subisce una piccola diminuzione momentanea. I fenomeni periodici compaiono analogamente al caso prece-

(4) Circa 5 mA al minuto.

(5) Il valore massimo della corrente era circa il doppio di quello corrispondente alla passivazione dell'anodo, fatta eccezione per le due prove con soluzione di soda caustica doppio normale a 68° e 85° C e per le prove con soda caustica quattro normale per le quali l'apparecchiatura usata non permetteva di usare correnti sufficientemente intense.

(6) Questo fenomeno, che è funzione del tempo, non è visibile nella figura.

(7) L'aumento della tensione fino a 4,05 V e la successiva diminuzione a 3,70 V non sono visibili nella figura essendo il fenomeno funzione del tempo.

dente ma con periodi di soli pochi secondi e sono subito seguiti dal manifestarsi della passività che fa salire la tensione a 3,82 V dopo aver raggiunto per pochi istanti il valore di 3,90 V. Aumentando la corrente fino a 250 mA e poi diminuendola gradualmente, la tensione varia analogamente al caso della soluzione di NaOH decinormale rappresentato in fig. 1.

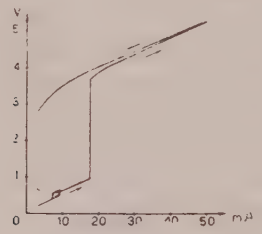


Fig. 1.

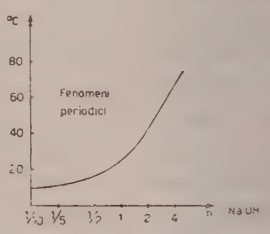


Fig. 2.

Con una soluzione di soda caustica quattro volte normale a 40°C non si osservano fenomeni periodici pur ottenendo un andamento generale simile ai precedenti.

I tre casi illustrati sono caratteristici e analoghi a quelli riscontrati nelle numerose prove eseguite con soluzione di soda caustica $n/10$, $n/5$, $n/2$, n, $2n$, $4n$ operando, per ognuna di esse, a cinque o sei diverse temperature comprese tra 0° e 85°C.

La fig. 2 indica le condizioni di concentrazione e di temperatura nelle quali si verificano i fenomeni periodici con diverse concentrazioni dell'elettrolita a diverse temperature. Si hanno due regioni tra le quali esiste una

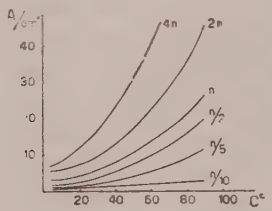


Fig. 3.

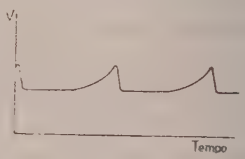


Fig. 4.

zona di passaggio in cui si manifestano fenomeni transitori (consistenti in una momentanea diminuzione della tensione quando si aumenta la corrente), ma non fenomeni periodici. La fig. 3 riporta per le varie soluzioni usate e in funzione della temperatura i valori della densità di corrente critica δ_C alla quale l'anodo di stagno diventa passivo: si osserva che l'influenza della temperatura, che è piccola per le soluzioni più diluite, aumenta fortemente con l'aumentare della concentrazione della soluzione di soda caustica. La differenza tra i valori della densità di corrente δ_p alla quale si manifestano i fenomeni periodici ed i valori della densità di corrente critica δ_C alla quale l'anodo diventa passivo, aumenta con l'aumentare della temperatura: è pure funzione

della concentrazione e presenta sempre alle varie temperature un massimo quando la concentrazione è circa normale.

Non mi è stato possibile effettuare dei rilievi oscillografici sull'andamento della tensione in funzione del tempo durante il manifestarsi dei fenomeni periodici (e ciò in causa dei danni che furono causati dalle incursioni aeree agli apparecchi oscillografici posseduti da questo Laboratorio): nei casi però in cui questi fenomeni erano sufficientemente lenti [8] ho potuto osservare che la tensione rimane costante al valore inferiore per un certo tempo, poi comincia gradualmente a salire fino a che, raggiunto il limite superiore, ritorna bruscamente al valore inferiore come ho indicato schematicamente nella fig. 4.

Ulteriori ricerche sulla passivazione dello stagno in soluzione alcalina verranno comunicate in altra Nota.

Ringrazio il Direttore del Laboratorio, prof. Oscar Scarpa, che mi ha guidato durante la ricerca.

Elettrochimica. — *Il trasporto elettrico degli ioni nei metalli liquidi e solidi. Sistema rame–amalgama di rame, di zinco, di cadmio e di piombo* [*]. Nota di G. BIANCHI, presentata [**] dal Corrisp. O SCARPA.

Continuando le ricerche di cui già ho dato notizia in Note precedenti [1], ho indagato il sistema rame solido–amalgame liquido operando, come col sistema rame–mercurio, con cinque cilindretti di rame del diametro di mm. 3 due dei quali erano percorsi da corrente continua, due da corrente alternata e il quinto non percorso da corrente, serviva da confronto. La disposizione sperimentale e le modalità con cui si è valutato l'accorciamento dei cilindretti di rame sono state pure quelle già precedentemente usate.

Per tutte le amalgame indagate ho eseguito una serie di prove mantenendo costante la temperatura (200°C), la corrente (125 A) e la durata della prova (8 ore) e facendo variare la composizione dell'amalgama. Per l'amalgama di rame, la cui percentuale nel mercurio è variata tra lo 0 % e il 4,2 %, ho ottenuto i risultati della tabella I riportati nella fig. 1: [2]. Essa mostra che l'accorciamento dei cilindretti di rame diminuisce gradualmente quando

(8) Per la maggior parte delle prove il periodo dei fenomeni periodici era di qualche secondo, per alcune di esse (NaOH *n* a 55° e 70° C) era di circa 20 sec. e per una prova (NaOH n/10 a 40°C) di circa 60 sec.

(*) Lavoro svolto nel Laboratorio di Elettrochimica del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta del 12 aprile 1947.

(1) « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *1*, 786 (1946); ser. VIII, *1*, 1209 (1946); ser. VIII, *2*, 58 (1947).

(2) Come di consueto ho indicato nei diagrammi: con linea tratteggiata i risultati riguardanti l'elettrodo positivo, con linea tratto e punto quelli riguardanti l'elettrodo negativo, con linea continua quelli riguardanti gli elettrodi percorsi da corrente alternata e infine con linea punteggiata quelli riguardanti i cilindretti non percorsi da corrente.

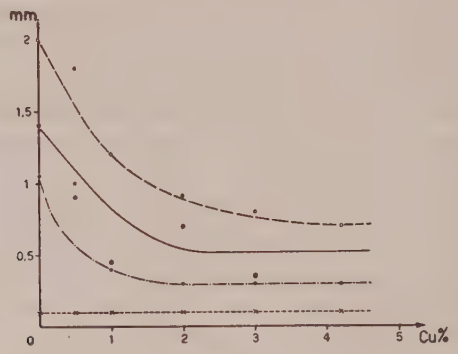


Fig. 1.

la percentuale di rame dell'amalgama aumenta (analogamente a quanto si era trovato per il sistema rame-zinco facendo aumentare la percentuale di rame nel bagno di zinco fuso), e che i fenomeni rimangono qualitativamente uguali a quelli trovati sperimentando con mercurio puro.

TABELLA I.

Temp. °C	Durata Ore	Corrente Amp.	Composizione bagno Cu %	Accorciamenti degli elettrodi in mm.				
				Corrente continua		Corrente alternata		Senza corrente
				positivo	negativo			
200	8	125	0	1,9	1,0	1,2	1,6	0,1
200	8	125	0,5	1,8	1,0	—	0,9	0,1
200	8	125	1	1,2	0,4	0,4	0,5	0,1
200	8	125	2	0,9	0,3	0,6	0,8	0,1
200	8	125	3	0,8	0,3	0,5	0,2	0,1
200	8	125	4,2	0,7	0,3	—	—	—

Molto diversi sono i fenomeni che si verificano con l'amalgama di zinco di composizione variabile tra lo 0 % e il 2 % per la quale l'accorciamento dei cilindretti di rame percorsi da corrente è fortemente ridotto anche da percentuali molto piccole di zinco; quando poi la percentuale di zinco raggiunge il 0,5 % i cilindretti percorsi da corrente, sia continua che alternata, si corrodono solo come il cilindretto di confronto non percorso da corrente e i fenomeni verificati in tutti gli altri sistemi precedentemente indagati scompaiono. Per l'importanza di questo risultato ho eseguito numerose esperienze di controllo che hanno confermato i risultati precedenti riportati nella ta-

bella II e illustrati nella fig. 2. Per l'amalgama di cadmio la percentuale è variata tra lo o % e l'8 % Cd con i risultati della tabella III illustrati nella fig. 3: con l'aumentare della percentuale di cadmio aumenta gradualmente l'accorciamento dei cilindretti, e per una percentuale di cadmio maggiore

Fig. 2.

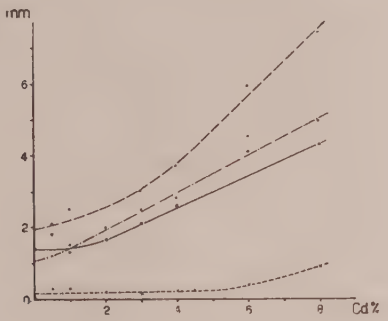


Fig. 3.

dell'1 % l'accorciamento del cilindretto percorso da corrente continua e fungente da polo negativo diventa maggiore del valor medio degli accorciamenti subìti dai due cilindretti percorsi da corrente alternata, analogamente a quanto si verificava nel sistema rame solido-cadmio liquido.

TABELLA II.

Temp. °C	Durata Ore	Corrente Amp.	Composizione bagno Zn %	Accorciamenti degli elettrodi in mm.				
				Corrente continua		corrente alternata		Senza corrente
				positivo	negativo			
200	8	125	0	1,9	1,0	1,2	1,6	0,1
200	8	125	0,001	1,4	1,0	1,1	1,0	0,1
200	8	125	0,005	1,0	0,7	0,8	0,6	0,1
200	8	125	0,01	0,75	0,65	0,6	0,3	0,1
200	8	125	0,05	1,05	0,55	0,7	0,7	0,1
200	8	125	0,1	0,9	0,25	0,35	0,35	0,05
200	8	125	0,2	0,4	0,3	0,25	0,2	0,1
200	8	125	0,3	0,25	0,15	—	—	—
200	8	125	0,5	0,1	0,1	0,1	0,1	0,15
200	8	125	1	< 0,1	< 0,1	< 0,1	< 0,1	0,1
200	8	125	2	< 0,1	< 0,1	< 0,1	< 0,1	0,1

TABELLA III.

Temp. °C	Durata Ore	Corrente Amp.	Composizione bagno Cd%	Accorciamenti degli elettrodi in mm.				
				Corrente continua		Corrente alternata		senza corrente
				positivo	negativo			
200	8	125	0	1,9	1,0	1,2	1,6	0,1
200	8	125	0,5	2,1	1,2	1,4	2,2	0,3
200	8	125	1	2,5	1,5	1,3	1,3	0,3
200	8	125	2	(4,6)	2,0	1,8	1,5	0,2
200	8	125	3	3,0	2,5	2,1	2,1	0.1
200	8	125	4	3,7	2,8	3,1	2,1	0,2
200	8	125	6	5,9	4,5	3,9	4,3	0,4
200	8	125	8	7,4	4,9	4,5	4,1	0,9

L'indagine del sistema rame–amalgama di piombo è stata molto laboriosa per la dispersione di punti che mi impediva di tracciare le curve (specialmente per quanto riguarda la posizione reciproca delle curve stesse) e mi ha obbligato a ripetere tre volte le esperienze con il 6,5 % Pb, l'8 % Pb, il 10 % Pb, e il 12 % Pb. Per questi casi ho segnato nella tabella IV, che riassume i risultati ottenuti, la media dei tre valori.

TABELLA IV.

Temp. °C	Durata Ore	Corrente Amp.	Composizione bagno Pb%	Accorciamenti degli elettrodi in mm.				
				corrente continua		Corrente alternata		senza corrente
				positivo	negativo			
200	8	125	0	1,9	1,0	1,2	1,6	0,1
200	8	125	1	2,2	1,7	2,0	1,5	0,2
200	8	125	2	2,4	2,0	1,9	2,1	0,3
200	8	125	3	2,4	1,7	1,7	2,0	0,4
200	8	125	4	2,7	1,6	2,3	1,9	0,3
200	8	125	5	3,0	2,2	—	2,2	—
200	8	125	6,5	2,6	1,9	2,1	2,2	0,4
200	8	125	8	2,7	2,0	1,9	2,1	0,4
200	8	125	10	3,1	2,6	2,1	2,2	0,3
200	8	125	12	2,7	2,4	2,5	2,4	0,2

Dalla fig. 4, che illustra graficamente i risultati delle prove con l'amalgama di piombo, si rileva che anche in questo caso l'accorciamento dei cilindretti aumenta con l'aumentare della percentuale di piombo e che l'accorciamento del cilindretto percorso da corrente continua e fungente da polo negativo tende a diventare maggiore dell'accorciamento medio dei cilindretti percorsi da corrente alternata, analogamente a quanto avveniva con l'amalgama di cadmio. Con l'amalgama di piombo ho eseguito anche due prove aggiungendo lo 0,3 % Zn, prove che hanno confermato che anche in presenza di piombo lo zinco riduce fortemente l'accorciamento dei cilindretti. Per esempio con l'amalgama col 2 % Pb + 0,30 % Zn gli accorciamenti

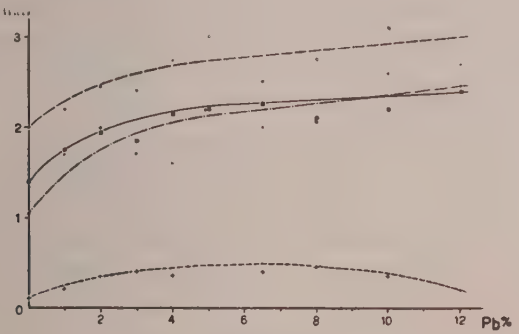


Fig. 4.

erano di mm. 1,0 per il cilindretto di rame percorso da corrente continua e fungente da polo positivo, di mm. 0,4 per quello fungente da polo negativo e di mm. 0,7 (media dei due valori) per i cilindretti percorsi da corrente alternata: e questo contro gli accorciamenti rispettivamente di mm. 2,4, mm. 2,0 e mm. 2,0 ottenuti nelle stesse condizioni di temperatura, corrente e durata con l'amalgama contenente solo il 2 % di piombo.

Tanto in questa come nelle Note precedenti mi sono limitato a esporre i risultati sperimentali astenendomi di proposito di avanzare ipotesi che possono dar ragione delle particolarità dei fenomeni osservati. Appare tuttavia che la causa prima si deve attribuire al trasporto di ioni dei due segni di cui, nelle linee generali, ho dato relazione nel primo paragrafo della I[a] Nota.

Ringrazio il Direttore del Laboratorio, prof. Oscar Scarpa, che mi ha guidato durante lo svolgimento della presente ricerca.

Geologia. — *Sulla tettonica del M. Circeo* (Lazio). – Nota di C. Maxia (*), presentata (**) dal Corrisp. G. Checchia-Rispoli.

Sulla base delle determinazioni paleontologiche del Di Stefano, il Viola, escludendo il Retico vagamente indicato dal Moderni e dal Meli, aveva riconosciuto nel M. Circeo (1), due principali formazioni calcaree: del Lias inferiore, la prima; della parte inferiore del Lias medio, l'altra. Queste verranno meglio precisate, in seguito, dal Rovereto, il quale, tenendo conto delle loro analogie litologiche con i terreni dell'Appennino centrale, assegnava i calcari cristallini del Lias inferiore al Lotaringiano; i calcari bianchi selciferi e quelli bianchi, bigiognoli, a tritumi di alghe, dubitativamente, al Pliesbachiano e, finalmente, i calcari marnosi compatti, grigi, del tipo della « corniola », a *pecten* lisci e a brachiopodi, al Domeriano.

Il complesso marnoso-arenaceo varicolore dei dintorni del Semaforo, della Torre del Fico e di S. Felice Circeo, indicato come eocenico dal Viola, oligocenico dal Meli, veniva, sempre dal Rovereto, riportato al Miocene.

Le interpretazioni tettoniche del Circeo sono due, le quali, fra l'altro, non concordano sul diverso modo di spiegare i rapporti di posizione tra

(*) Pervenuta all'Accademia l'8 febbraio 1947.

(**) Nella seduta dell'8 marzo 1947.

(1) Sulla geologia del M. Circeo si conoscono alcune note di Viola, Di Stefano e Rovereto, i quali, come anche indirettamente il Brocchi, l'Issel, il Tuccimei, il Meli, il Moderni e lo Stella i cui lavori riguardano principalmente il Quaternario nei suoi vari aspetti ed i giacimenti di alabastro, hanno avuto per oggetto le ricerche stratigrafiche e strutturali sui terreni meso-cenozoici. È d'altra parte noto il grande interesse scientifico destato in quest'ultimo decennio dalle scoperte paletnologiche fatte, nel caratteristico promontorio tirrenico, da A. C. Blanc.

Elenco bibliografico

C. Viola e C. Di Stefano, Comunicazione fatta alla Soc. geol. it., « Boll. Soc. geol. it. », XII, 1893; C. Viola, *Osservazioni fatte sui M. Lepini e sui C. Circeo*, « Boll. Com. geol. », 1894; C. Viola, *Il M. Circeo*, ibid. 1896; C. Viola e C. Di Stefano, *Foglio geol. n. 170 Terracina*, R. Uff. geol., 1912; G. Rovereto, *Condizioni tett. del Prom. Circeo*, « Rend. R. Acc. Lincei », XXXIII, 1924; G. Rovereto, *Geologia*, Milano, Hoepli, 1931; *Geol. morfol.*, pp. 317, 319; C. Brocchi, *Catal. ragionato di una racc. di rocce*, ecc., Milano, 1817; C. Brocchi, *Viaggio al M. Circeo*, Giorn. Lett., Sc., Arti, VII, 1817; A. Issel, *Bradisismi*, Genova, 1883; G. Tuccimei, *Sul Prom. Circeo*, « Boll. Soc. geol. it. », XII, 1893; R. Meli, *Sopra la nat. geol. dei terreni rinvenuti nella fond. del sifone . . .*, ecc. ibid., XIII, 1894; P. Moderni, *Note geol. sulla catena del Lepini e degli Ausoni e sul Promont. Circeo*, « Boll. Com. geol. », XLIX, 1913; A. Stella, *L'alabastro del Circeo*, « Atti III Congr. Naz. Studi Rom. »; A. C. Blanc, *Fauna a ipp. e ind. paleol. nel riemp. delle grotte lit. del M. Circeo*, « Rend. R. Acc. Lincei », XXV, 1937; *Giac. aurignac. medio nella grotta del Fossellone*, « Atti Soc. it. Progr. sc. », 1938; *Una serie di nuovi giac. pleist. e paleol. in grotte lit. del M. Circeo*, « Rend. R. Acc. Lincei », XXVIII, 1938; *L'uomo foss. del M. Circeo: un cranio neandert. nella Grotta Guattari*, ibid., XXIX, 1939; *Il M. Circeo, le sue grotte paleol. e il suo uomo fossile*, « Boll. Soc. geogr. it. », LXXVI, 1939; *L'uomo del M. Circeo e la sua età geologica*, « Boll. Soc. geol. it. », LVIII, 1939.

Lias inferiore e Miocene: secondo una semplice paraclasi orientata N. NO–S. SE, dal Viola; per un ricoprimento anomalo di una facoide liasica, proveniente dai Lepini, sopra il Miocene autoctono, dal Rovereto.

La presente Nota, che, per le attuali difficoltà di stampa non può accogliere tutti i risultati delle ricerche da me fatte lo scorso autunno durante una campagna geologica sul M. Circeo e per essere, d'altra parte, il materiale paleontologico non ancora determinato, ha soltanto lo scopo di prospettare una terza soluzione strutturale del promontorio tirrenico, già accennata in un precedente lavoro [2]. Questa, nelle sue linee semplicissime, si riduce a considerare tre elementi tettonici principali, i quali, da sud verso nord, sono i seguenti: una piega–faglia, con vergenza a nord o NE, il cui nucleo di Lias inferiore è fortemente eroso ed estesamente affiorante su tutto il versante meridionale e occidentale del Circeo; una sinclinale di ritorno, asimmetrica, col fianco mediano fortemente stirato e rotto, immerso a sud o a SO, a nucleo arenaceo–marnoso miocenico, in gran parte nascosto dalla copertura detritica, sulla parete d'erosione prospiciente l'abitato di S. Felice; la contigua anticlinale, regolare, a nucleo di Lias inferiore, messo allo scoperto in R.ne Peretto, e ad involucro domeriano, molto sviluppato sul versante settentrionale fra Torre Paola e la collina di Monticchio.

Prima di passare alla illustrazione della struttura del Circeo, conviene accennare brevemente alle principali caratteristiche stratigrafiche delle formazioni liasiche e miocenica, conservandosi, per ora, la divisione in piani, proposta, per il Lias, dal Rovereto.

Il Lias inferiore è rappresentato, alla base, da un calcare dolomitico cristallino, biancastro o bianco verdastro, talora mostrante un accenno alla tessitura orientata, contenente, qualche volta, concentrazioni o venette calcitiche bianche e croste rossicce di ossidi di ferro. Superiormente è associato a un calcare magnesiaco, a struttura da microcristallina a saccaroide, bianchiccio, più o meno disgregabile alla pressione delle dita. Queste rocce si mostrano in grossi banchi, talora brecciformi, quasi sempre a stratificazione indistinta, specialmente nei punti dove sono state sconvolte dalla tettonica; solitamente e intensamente emananti, per percussione, un odore sgradevole, simile a quello « mercaptanico », recentemente ricordato dal Bonarelli [3].

Il Lias inferiore forma interamente il ripido versante meridionale del Circeo, la sua estrema appendice di NO, per ricomparire poi, saltuariamente, lungo una sottile striscia sul versante settentrionale, sopra la strada che da S. Felice conduce a Torre Paola e presso la sorgente di Mezzomonte. Costituisce, infine, l'appiattita sommità di R.ne Peretto. Il calcare bianco, saccaroide, lo si ritrova, trasformato lungo le superfici di frattura in una massa farinosa bianca, a ricoprire il Miocene sotto la Torre del Fico, da

(2) C. Maxia, *Vecchie e nuove osservazioni sui terreni neogenici e quaternari del Lazio occidentale.* « Boll. Uff. geol. d'It. », LXX, 1947.

(3) G. Bonarelli, *Mercaptaniti*, « Boll. Soc. geol. it. », LXIII, 1946.

dove sale sopra la Villa Aguet, ridotto in tronconi contorti, fino a raggiungere la Crocetta e le mura ciclopiche di età enea, dove presenta un accenno di struttura pisolitica. Sul piano, però, tra il Semaforo e la Crocetta, il suo passaggio al Lias medio è mascherato da una copertura di terra rossa. Fra la Grotta delle Capre e la Torre del Fico sono evidentissimi due sistemi di fratturazione, incrociantisi quasi a 90°, con accentuate pendenze a SE e a NO, l'uno; a NE, l'altro; determinando scuneamenti triangolari a vertici in alto, che si riflettono nella morfologia a dentellature della cresta del Circeo. Il calcare cristallino, talora farinoso, lo si incontra anche a NO del Circeo, costituendo una striscia allungata NO–SE alla quota di circa 75–100 metri, in parte nascosto da puddinghe di ciottoli liasici, che ne mascherano il contatto coi calcari domeriani; i quali conservano abbondanti tracce di crinoidi. Questo passaggio pare avvenga con l'intermediario di un calcare bianco grigiastro, compatto, non fetido e di un calcare grigio chiaro, poco cristallino, scheggioso.

I bassi dossi ad est di S. Felice, uno dei quali si protende verso l'albergo della Maga Circe, e l'altro fino alla Villa Guattari, sono costituiti, in parte, di calcare brecciforme a stratificazione indistinta, con prevalenza del tipo cristallino del Lias inferiore; senza che, per altro, vi manchino quelli domeriani, dei quali, però, non ci si rende facilmente conto dei reciproci rapporti di posizione.

Delle rocce appartenenti al Lias medio sono molto diffusi i calcari bianchi selciferi e quelli marnosi grigi, sempre in strati regolari, con spessori medi di cm. 20–30, costituenti quasi tutto il versante settentrionale del Circeo. Il calcare selcifero, attribuito al Pliesbachiano, affiora lungo una striscia poco a nord del Semaforo, con strati di direzione NO–SE, immersi a SO di 40°. Quello domeriano, è di colore grigio cenere o grigio piombo, leggermente marnoso, a pasta finissima, a frattura un poco scheggiosa e anche tagliente, con rare plaghette calcitiche bianche disseminate nella massa. Vi si conservano, localmente, abbondanti fossili: lamellibranchi, specialmente pettinidi lisci, gasteropodi, brachiopodi. Sul versante meridionale ho incontrato un esacorallo che non è stato ancora studiato. I fossili da me rinvenuti provengono da località diverse da quelle indicate dal Viola e Di Stefano, e, precisamente, dal versante meridionale, tra la P.ta Circeo e la vecchia Batteria Pontificia, da calcari domeriani, allungati in sottili striscie NO–SE, forse affioranti per l'erosione del lotaringiano e dall'estremità occidentale dell'abitato, dove i calcari grigi sono quasi costantemente ricoperti da uno sfasciume detritico. A nord del Semaforo, il Domeriano, è in strati di cm. 40, diretti NO–SE, con pendenza a NE di 80°. In tale località, fra il calcare a selce e quello domeriano (ovest della Crocetta), corre una lingua di un calcare cariato, bianco: forse, il « calcare ad alghe », del Rovereto.

Sulla P.ta Circeo, i calcari grigi, induriti e semicristallini, hanno direzione NO–SE, la quale viene conservata più ad ovest, dove però gli strati assumono fortissime pendenze fino a raggiungere la verticale, lungo la sottile cresta, non più spessa di cm. 40–50, sovrastante la scoscesa e suggestiva

parete, detta « Il precipizio ». Sul versante nord del Circeo, gli strati domeriani sono attraversati da piani quasi orizzontali: ciò che riduce la roccia in una specie di gradinata; la quale, benchè ripida, rende meno disagevole l'ascesa alla cima dal lato della Pianura Pontina. I calcari domeriani sono inoltre sviluppati ad ovest di R.ne Peretto, dove si osservano piani di frattura diretti N–S, pendenti ad ovest di 35°. Prima di passare al Lias inferiore, s'incontrano i calcari a noduli e straterelli di selce e di marne indurite presso la sorgente di Mezzomonte.

Nella cava di Guardia d'Orlando, i calcari grigi, in strati molto contorti, presentano piani di frattura diretti E–O, con immersioni a nord di 80°. Qui, come a Monticchio, la direzione degli strati è quella NO–SE, con forti pendenze a NE. Alla base ricompare il calcare cristallino del Lias inferiore, in banchi di spessore di oltre 1 metro, anch'essi molto contorti e fortemente immersi sotto la Piana Pontina.

Lungo la mulattiera litoranea del versante sud del Circeo, si incontrano calcari schiacciati e triturati per cause tettoniche. Presso Torre Vecchia, vicino al Faro, ecc., si ha l'impressione che queste miloniti derivino dai calcari marnosi domeriani.

La serie miocenica del Circeo consta principalmente di marne e di arenarie. Si tratta di un complesso varicolore e variconsistente. Si va, infatti, da arenarie di colore giallo paglierino ad altre grigio ferro; da tipi mollassici a quelli di arenarie dure; specialmente le brecciole che vi sono comprese, in lenti e straterelli. Le marne possono andare dal colore grigio chiaro a quello plumbeo, dal tipo alberese a frattura poliedrica, a quelle fogliettate, quasi friabili.

Presso S. Felice Circeo le marne mioceniche sono dirette NE–SO, immerse a NO di 45°. Anche qui si hanno piani di rottura, immersi a SE di 80°. In certi punti la roccia è ridotta in una vera poltiglia di colore giallo bruno, tendente a quello scuro. Lungo la strada del Cimitero, le arenarie, quasi scistose, contenenti lenti di brecciole, hanno pendenza a NE di 45 50°. Nell'insieme sembra che si abbia un nucleo marnoso incluso nelle arenarie fogliettate, dirette a NO e immerse a SO di 70°. Analogamente pare avvenga sotto la Torre del Fico, dove le marne, avvolte dalle arenarie, sottostanno ai calcari del Lias inferiore in giacitura secondaria. Una marna verdiccia, in *facies* normale, affiora, per piccolo tratto, lungo la riva tra S. Alfonso e la Villa Guattari. Vi si notano straterelli orientati E–O, contenenti due sistemi di reticolature calcitiche, uno dei quali immerso a sud di 80°, mentre l'altro, diretto quasi N–S, mostra uguale pendenza, ad ovest. Lungo la strada, tra l'albergo della Maga Circe e il paese di S. Felice, riappaiono le arenarie mioceniche di colore paglierino, in strati immersi a NO di 35°.

Mentre le marne e le arenarie sono risultate sterili di fossili, le breccioline che vi sono intercalate, contengono invece abbondanti globigerine, comuni miogipsine ed anfistegine, in mezzo ad un groviglio di alghe, briozoi, radioli di echinidi; rarissime piccole nummuliti, fortemente erose e mal ridotte.

Si hanno, cioè, le medesime *facies* delle rocce, così diffuse nell'Appennino centro–meridionale, studiate dal prof. Checchia–Rispoli e da lui riferite al Miocene medio (4); una volta, da tutti, credute eoceniche. Come verrà spiegato in seguito potremo considerare la serie normale miocenica così costituita: arenarie e brecciole calcare alla base, e marne superiormente.

Per afferrare il motivo tettonico principale del M. Circeo conviene portarsi lungo la spiaggia, poco ad est della Villa Guattari e da qui osservare l'imponente parete d'erosione che corre, circa N. NO–S. SE, tra la Torre del Fico e la sommità del monte, presso la Crocetta (fig. 1). Si vede chiaramente un coltrone costituito di banchi di calcari saccaroidi e di dolomie cristalline lotaringiane, fortemente contorti e ridotti a tronconi, in forma di S, oppure diritti, quasi verticali, pur essi troncati alla loro base, lungo una superficie che trova rispondenza in una linea che viene chiaramente definita dagli strati calcarei di Lias medio sotto la Crocetta, fortemente immersi sotto la Torre del Fico; dove, come già detto, il Lias inferiore ricopre direttamente la formazione marnoso–arenacea miocenica. Per cui sorge quasi spontanea l'idea di considerare l'involucro calcareo lotaringiano come facente parte di un nucleo di piega rovesciata verso nord, lungo la superficie di scorrimento sotto la Crocetta; ancora ammantato, in corrispondenza della cerniera fortemente inflessa, da uno spicchio di Lias medio, il quale sopporta un residuo lembo della copertura miocenica, poco a nord del Semaforo.

L'accavallamento del nucleo calcareo–dolomitico è avvenuto, nelle parti ora topograficamente più elevate, sopra i calcari selciferi pliesbachiani, e, inferiormente, sul complesso marnoso arenaceo miocenico; il quale ha offerto un'adatta superficie di scorrimento, per la sua notevole plasticità. Cosicchè le laminazioni e le rotture sul fianco inverso della piega, si succedono, a quote sempre più basse, mano a mano che interessano i terreni più recenti; possiamo anche immaginare la sinclinale contigua ridotta ad una serie di cunei o spicchi, assottigliantisi verso sud, disposti quasi a raggiera che diverge nel tratto La Crocetta–R.ne Peretto.

La successiva anticlinale si rivela manifestamente, col nucleo lotaringiano, per una vasta area della R.ne Peretto, dove sono sviluppati i calcari bianchi dolomitici e quelli saccaroidi. Il fianco settentrionale di questa piega, appare, nella sua successione normale, portandoci dalle rovine di Peretto verso le collinette di Guardia d'Orlando e di Monticchio; incontrando, infatti, dapprima, i calcari selciosi pliesbachiani e quindi, quelli marnosi, domeriani; i quali si immergono fortemente sotto la pianura, nelle cave aperte sui versanti orientali di queste due colline.

Si è visto che nel Circeo, la direzione predominante degli strati è quella NO–SE, mentre quella generale delle pieghe varia dalla E–O, nel fianco orientale, a quella NO–SE, per la restante parte del promontorio. Ne risulta

(4) G. Checchia–Rispoli, *Osservaz. geol. nei dint. di Biccari*. «Atti R. Acc. d'It.», XIII, 1942.

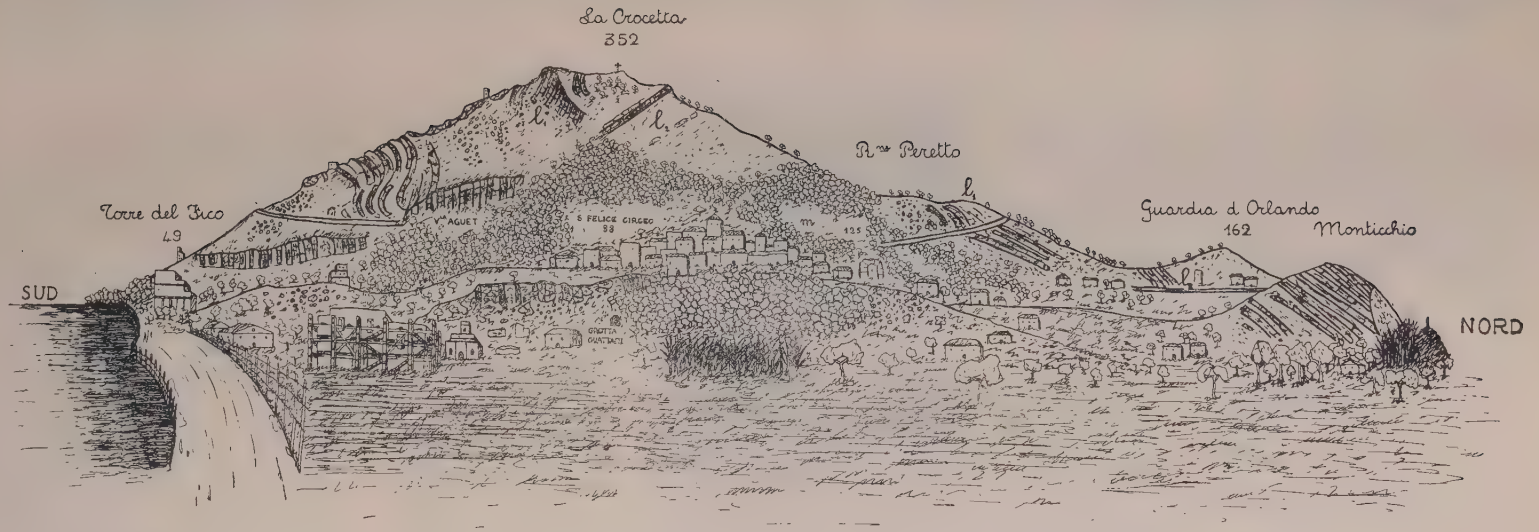


Fig. 1. – Schizzo morfologico–strutturale del versante est del M. Circeo.
(C. MAXIA *dis.*).

Punto di osservazione: fra la Villa Guattari e la Torre Vittoria. Distanze: alla Torre del Fico, m. 1600; alla Crocetta, m. 1500; alla Guardia d'Orlando, m. 1650; fra la Torre del Fico e la Crocetta, m. 1000; tra la Crocetta e Monticchio, m. 1300. – La parete d'erosione del M. Circeo, fra la Torre del Fico e la Crocetta, taglia, con un angolo poco maggiore del retto, una superficie di scorrimento diretta O. NO e immersa a S. SO di circa 35°. Sopra di questa si vede infatti un coltrone calcareo–dolomitico del Lias inferiore (l_1), contorto e spezzettato, appoggiare sopra i calcari selciferi e marnosi del Lias medio (l_2), con gli strati immersi a S. SO. Presso la Torre del Fico, il ricoprimento avviene direttamente sopra la formazione marnoso–arenacea miocenica. Questa superficie è perciò da ritenersi coincida col fianco inverso, stirato e rotto, di un'anticlinale a nucleo di Lias inferiore, rovesciata verso N. NE. Andando da R.ne Peretto verso le colline Guardia d'Orlando–Monticchio, i calcari del Lias inferiore e medio sono in perfetta giacitura concordante, rivelando un'anticlinale regolare, il cui fianco N è fortemente immerso sotto la Piana Pontina. Il complesso marnoso–arenaceo miocenico (*m*), costituisce quindi il nucleo dell'interposta sinclinale asimmetrica e schiacciata. Queste rocce, come anche i calcari marnosi domeriani, facilmente erodibili, spuntano però soltanto, qua e là, sotto la copertura detritica; la quale si abbassa dalla Crocetta, intensamente ricoperta di bassa macchia mediterranea. In primo piano, due piccoli dossi di calcari liasici, in giacitura brecciata e poco distinta: in quello più orientale è scavata la Grotta Guattari, a riempimento tirreniano e musteriano, in cui furono rinvenuti i due crani neandertaliani, fatti conoscere dal BLANC e dal SERGI. L'abitato di S. Felice è costruito su rocce di diversa età: arenarie e marne mioceniche, sopratutto sul lato occidentale del paese; detriti di calcari liasici, talora rappresentati da blocchi enormi, provenienti dal fianco scosceso del Circeo, e, infine, conglomerati fortemente cementati, presumibilmente pleistocenici.

che lo sviluppo direzionale dell'asse anticlinalico della piega-faglia ha un andamento sinuoso: quasi E-O nei dintorni della Crocetta; quindi, rientrante verso sud, fino alla quota 419, da dove si inflette verso NO e N. NO, dirigendosi alla Torre Paola; disegnando, in tal modo, una linea in forma di S lassa, coricata, avente gli estremi, nel complesso, orientati NO–SE.

Nella sommità del Circeo è ancora conservato, per lunghi tratti, l'involucro di Lias medio, rappresentato dai calcari selciosi e dal calcare marnoso più recente, mentre in nessun punto, ad eccezione dei dintorni del Sema-

SE NO

Fig. 2.

Dalla P.ta Circeo (la più alta), scendono fasci di strati calcarei domeriani, bianchi e ondulati, con direzione divergente dalla NO alla N–S. Le loro pendenze sono interrotte da piani di frattura, orientati NO–SE, variamente inclinati; scomponenti, in tal guisa, la parete settentrionale del Circeo, in una serie di spicchi calcarei, che s'immergono, assottigliandosi, verso sud. L'estremo limite nord della superficie biancheggiante coincide con la prosecuzione della faglia della Crocetta. L'imponente coltre detritica impedisce però di vedere, in direzione, la continuazione degli altri elementi strutturali, così evidenti sul lato orientale, riprodotto nella fig. 1. Il Lias inferiore, è messo allo scoperto dall'erosione sulla q. 418 (a NO della P.ta Circeo), verso cui si abbassa la cresta della piega-faglia della Crocetta.

foro, si ha traccia della copertura miocenica. Questa non affiora più neanche direzionalmente, lungo la sinclinale schiacciata: ciò che può essere spiegato dalla presenza dell'imponente detrito di falda che fascia il versante settentrionale del Circeo (fig. 2), dove, d'altra parte, è intensamente sviluppato il modellamento carsico, che ha prodotto abbondanti aree di terra rossa. Non mancano, d'altra parte, rilevanti coperture di conglomerati a cemento rossiccio, incisi lungo le vallecole, orientate quasi S–N, che corrono fra la R.ne Peretto e R.ne Mezzomonte.

Dalla P.ta Circeo il Lias medio si abbassa verso ovest, dove il Lias inferiore costituisce il dirupato costone che scende a Torre Paola. Sembra quindi

che, nell'insieme, si abbia una specie di ellissoide brachianticlinalico, a nucleo di Lias inferiore, allungato da NO a SE, con abbassamenti assiali verso queste direzioni; ciò che, unitamente agli sbancamenti, immersi a SE di 45°, sul lato est e a NO, sul costone occidentale, può concorrere a far immaginare una inesistente piega ad assi N–S, tra la P.ta Circeo e quella del Circello.

Cosicchè, il passaggio tra Lias inferiore e Lias medio, che corre lungo il dirupato ciglio meridionale del Circeo, è da riguardarsi un limite di erosione, oscillante a diverse altezze e degradante fino a raggiungere il massimo ad ovest, dove il Lias medio è stato completamente asportato. A nord invece, il contatto anomalo fra questi due piani non si coglie per l'accennato sviluppo di materiali detritici esogeni, ad eccezione della parete di erosione sotto la Crocetta.

Il fascio di strati fortemente contorti, che scende quasi verticale dalla P.ta Circeo verso nord (fig. 2), si vede interrotto da sistemi di piani prevalentemente ad andamento radiale. Pertanto le pendenze di questi strati cambiano bruscamente da punto a punto, risultandone una tipica struttura a spicchi assottigliantisi verso i vertici appuntiti, che sono rivolti ad est e a SE. Uno dei sistemi di frattura mostra evidenti i suoi effetti sulle pareti settentrionali delle cime più occidentali del Circeo, dove i tagli seguono le superficie molto contorte degli strati, determinando distacchi di masse calcaree, delle quali rimangono i liscioni a superfici curve che guardano verso nord; talora conservate in serie degradanti da SE verso NO. A tali fratture, ad andamento elicoidale, e a quelle radiali, sono dovuti i vistosi scoscendimenti, il più importante dei quali è quello detto « Il Precipizio », quasi un semi imbuto che si osserva, in tutta la sua imponenza, affacciandoci, come da una immensa balconata, dalla ricordata, assottigliatissima cresta che corre fra la q. 418 e la P.ta Circeo. Possiamo cioè immaginare che siano avvenuti degli abbassamenti di cunei calcarei, a cui sono contigui altri rimasti in posto, col vertice rivolto in alto; fatto questo che, come accennato, si riflette sulla morfologia del Circeo; il quale, si può dire costituito da una serie di blocchi piramidali, soffocati, per notevole altezza, sul lato nord, dalla coltre esogena di origine subaerea. Tali fratture hanno inoltre isolato da tutti i lati la massa circeiana, come voleva il Viola. Ai Lepini infatti, si contrappone la Piana Pontina, che è da ritenersi di origine tettonica, in quanto il Miocene ed il Pliocene in *facies* costiera, sono stati incontrati, a nord di Torre Paola [5], a notevole profondità. È quindi verosimile che queste fratture siano avvenute allorchè tutto il Pliocene è stato coinvolto in un generale abbassamento a zolle degradanti verso sud e SO: [6] cosicchè, a due epoche distinte si può far risalire l'attuale assetto tettonico del Circeo: a spinte tangenziali nel Miocene superiore; a movimenti radiali nel Postpliocene inferiore.

(5) V. Novarese, *Trivellazione profonda nell'Agro Pontino*. « Boll. R. Uff. geol. d'It. », LV, 1930.

(6) C. Maxia, vedi nota a p. 633.

Non sappiamo neanche quali erano le condizioni fisiche del complesso liasico all'atto della sedimentazione miocenica, la quale, presumibilmente, sarà avvenuta sopra una superficie in cui il Lias medio era già fortemente eroso. Il mare miocenico avrà ricoperto questa regione, in un primo tempo, con materiale clastico grossolano: arenarie giallastre e brecciole calcaree, con assai mal conservati resti di macroforaminiferi rimaneggiati, e, successivamente, con sedimenti più fini, marnosi, derivati da rocce di identica natura, del Lias medio. Comunque, un episodio marino prevalentemente terrigeno, con senso normale di sedimentazione; costiero, alla base; più, fino, in alto; nell'insieme, non molto rilevante.

Geologia. — *Sull'esistenza del Campaniano nella Migiurtinia* (*). Nota di A. M. Maccagno, presentata (**) dal Corrisp. G. Checchia-Rispoli.

Nel 1935 l'Hawkins ha pubblicato uno studio su un certo numero di echinidi raccolti dal Macfadyen nelle rocce cretacee della Somalia britannica (1). Benchè le specie rappresentate nella raccolta non portino sufficienti indicazioni stratigrafiche, l'autore, in base alla loro conservazione e alla natura della matrice che includeva gli esemplari, ammise ch'essi provenissero tutti dallo stesso orizzonte stratigrafico, che egli ascrisse, benché con dubbio, al Senoniano più alto. La sua opinione è fondata sulle notizie date dal Barrington-Brown nel suo lavoro: *The Geology of North-Eastern British Somaliland* (2) dove è indicato un livello ad echinidi e ostriche formato da arenarie poste alla sommità della serie cretacea, circa m. 100 al di sopra di un livello di calcari a *Lopha dichotoma* ed *Exogyra Overwegi*.

L'Hawkins identifica il livello ad echinidi e ostriche del Barrington-Brown, con quello rappresentato nella località B 73 della sua raccolta, dal quale provengono gli esemplari del nuovo genere di echinide da lui descritto e figurato sotto il nome di *Somaliaster magniventer*.

I due autori inglesi, partendo dal principio che le due ostriche su nominate siano forme caratteristiche del Senoniano alto, pongono il livello arenaceo a *Somaliaster*, situato m. 100 al di sopra di quelle, come limite massimo del Senoniano stesso.

Nel 1941 io ebbi in studio, per incarico del prof. G. Checchia-Rispoli, circa una ottantina di esemplari di questo nuovo genere, i quali fanno parte della

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia e Paleontologia dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 12 aprile 1947.

(1) H. L. Hawkins, *Cretaceous Echinoidea. The Mesozoic Palaeontology of British Somaliland*. Part. II by the Government of the Somaliland Protectorate, p. 47, tav. VI, fig. 9-10 e tav. VII, 1935.

(2) C. Barrington-Brown, *The Geology of North-Eastern British Somaliland*. « Quart. Journ. of the Geol. Soc. of London », vol. LXXXVII, part. II, p. 264. Londra, 1931.

ricca collezione di fossili provenienti dalla Somalia italiana, raccolti nel 1938 dalla Missione Geologica dell'AGIP, diretta dal prof. ing. C. Migliorini [3].

Gli esemplari di *Somaliaster* si trovano associati a *Lopha* in calcari nodulosi, giallastri, intercalati a due strati di arenarie. Si tratta certamente anche qui del livello a *Somaliaster* dell'Hawkins, con intercalati strati di calcare; sopra alle arenarie, però, come mi informa il prof. Migliorini, si trovano altri calcari ad echinidi, più elevati nella serie cretacea. Essi sono tutt'ora in esame presso il prof. Checchia-Rispoli, che, in base al loro studio, pensa rappresentino il Maestrichtiano, perchè comprendono specie, che sono state riconosciute dallo stesso autore nel Maestrichtiano della Tripolitania.

Poichè interessa stabilire con esattezza la posizione stratigrafica degli strati a *Somaliaster*, sono tornata a consultare i lavori dell'Hawkins e del Barrington-Brown; bisogna notare qui, che l'indicazione sulla quale essi basano le loro deduzioni cronologiche, cioè il riferimento di *Lopha dichotoma* e di *Exogyra Overwegi* esclusivamente al Senoniano alto, non corrisponde ad un criterio di precisione assoluta. Infatti, come si può rilevare dalla bibliografia, che riguarda le due specie, la loro distribuzione verticale è alquanto più ampia; infatti *Alectryonia* (*Lopha*) *dichotoma* si trova dal Coniaciano al Maestrichtiano ed *Exogyra Overwegi* è indicata dal Campaniano al Maestrichtiano.

Per questo ho voluto riprendere lo studio degli esemplari di *Somaliaster*, esaminando la roccia in cui sono contenuti, nella speranza di trovare elementi paleontologici per l'indicazione più precisa dell'età.

Gli esemplari di *Somaliaster* sono, nella maggior parte dei casi, accompagnati dalla roccia. Questa è costituita da un calcare talora compatto, talora

Fig. 1. – Disegno schematico: *a*) della sezione sagittale di *Monolepidorbis Sanctae Pelagiae* var. *densa* Astr., ingr. circa 30 volte; *b*) della sezione sagittale di *M. Douvilliei* Astr., ingr. circa 31 volte; *c*) della camera embrionale biloculare, ingr. circa 50 volte.

terroso, di tinta chiara, il quale è ricchissimo di minuti fossili tra cui abbondano foraminiferi ben conservati. Lo studio delle sezioni sottili della roccia mostra la frequenza di un piccolo foraminifero appartenente agli orbitoidi. Essendo esso abbondantissimo, l'ho potuto studiare bene, sia nelle sezioni sottili della roccia, sia in individui che sono riuscita ad isolare.

Si tratta di una forma molto piccola, meno di 2 mm. di diametro, circolare, a bordo non tagliente ed irregolare. Si trovano individui piuttosto gonfi, biconvessi; altri, più rari, a forma di cono bassissimo, con una faccia piana,

(3) A. M. Maccagno, *Osservazioni sul genere Somaliaster Haw.* « Boll. Soc. Geol. It. », vol. LX, fasc. I, p. 89, tav. XI, Roma, 1941.

depressa nel centro e l'altra appena conica, oppure addirittura pianeggianti su tutte e due le facce.

In sezione sagittale si vede uno strato di loggette equatoriali, che, nelle forme biconvesse, è diritto o al più si spiega verso il bordo e nelle forme piatte e in quelle a cono bassissimo, è curvo e spesso alquanto ondulato; i setti che dividono le loggette sono incurvati verso il centro. Lateralmente al piano equatoriale le pareti delle logge anulari si prolungano fino al centro e sono compatte; non ho trovato nessun individuo con vacuolosità nelle pareti laterali.

Nella sezione equatoriale si vede un reticolo formato da logge ogivali, alte quanto larghe, ben definite, perchè formate dalla saldatura completa e periodica delle pareti delle logge anulari. Al centro la camera embrionale è grande, a pareti spesse, biloculare; le due logge sono subuguali, reniformi e separate da un setto diritto e molto sottile (Fig. 1 *c*).

Queste forme sono identificabili perfettamente con *Monolepidorbis* Astre, un orbitoide primitivo, che si può considerare intermedio tra il gen. *Linderina* Schlumb. [4] (che ha le pareti delle logge anulari ondulate, ma non saldate) e i veri *Orbitoides* dei quali ha le stesse logge equatoriali, pur mancando di logge laterali. Essi furono notati la prima volta in un solo individuo, del tipo biconvesso, dal Douvillé, che, pur riconoscendone i caratteri differenziali, li mantenne provvisoriamente uniti a *Linderina* [5], in seguito fu ampiamente descritta da Astre [6], che istituì il genere *Monolepidorbis* con le due specie: *Sanctae Pelagiae* e *Douvillei*. Tra i miei esemplari credo di poter identificare con la specie tipo: *Sanctae Pelagiae* var. *densa* (Fig. 1 *a*), quelli a piano equatoriale diritto e a forma più o meno biconvessa e con *M. Douvillei* (Fig. 1 *b*), quelli a piano equatoriale incurvato e ondulato e a forma conica, piano-convessa.

Douvillé aveva trovato l'individuo da lui descritto nel calcare campaniano ad *Alveolina* nei dintorni di Belvès. Astre poi istituì il genere su numerosi esemplari, che trovò nei calcari marnosi intercalati nelle serie senoniana, nel versante Nord della Sierra de Turp (Pirenei spagnoli), la cui età campaniana è ben stabilita dalla presenza di numerose specie caratteristiche.

In conseguenza di ciò, io credo di poter affermare che l'età dei calcari a *Somaliaster* e *Lopha* della Migiurtinia, data la presenza di *Monolepidorbis*, è con ogni probabilità campaniana, e questo mio modo di vedere è confermato anche dalla presenza, in un livello ad essi sovrastante, di calcari fossiliferi riferibili al Maestrichtiano.

Naturalmente anche l'età del livello a *Somaliaster* della Somalia britannica, descritto dal Barrington-Brown e dall'Hawkins, è da riportare al Campaniano.

(4) M. C. SCHLUMBERGER, *Note sur les genres Trillina et Linderina.* « Bull. Soc. Géol. de France », 3ª ser., vol. XXI, p. 120, tav. III, figg. 7–9, 1893; J. A. CUSHMANN, *Foraminifera. Their classification,* p. 278. Sharon, 1933.

(5) H. DOUVILLÉ, *Evolution et Enchaînement des Foraminifères.* « Bull. Soc. Géol. de France », 4ª ser., vol. VI, p. 601, tav. XVIII, fig. 18, 1906.

(6) G. ASTRE, *Sur Monolepidorbis. Foraminifère voisin dès Linderines et des Orbitoïdes,* « Bull. Soc. Géol. de France », 4ª ser., vol. XXVII, tav. XX, p. 387, 1927.

Geologia. — *Struttura marginale dell'Appennino Lucano.* Nota I di R. Signorini, presentata (*) dal Corrisp. G. Checchia-Rispoli.

In questa Nota riassumo i resultati, per quanto concerne la zona marginale dell'Appennino Lucano dall'Agri all'Ofanto su un centinaio di chilometri di lunghezza, di miei rilevamenti ex novo, senza rapporti con i precedenti scarsissimi lavori: basta guardare per confronto la Carta geologica al 100.000 di Viola e Sabatini, fogli 188 Gravina e 200 Laurenzana.

L'Appennino Lucano è costituito da grandi masse di calcari mesozoici che si ergono nella parte più interna (Cilento, Alburno, gruppo di Monte Mazzano, zona Caggiano – Sala Consilina – Lagonegro) in blocchi fratturati tra lembi di un mantello di flysch. Adiacente ad est segue una zona ove si estende il flysch paleogenico (1) che può passare inferiormente a flysch cretacico, indi a scisti silicei mesozoici e questi a calcari selciferi ad Halobie del Trias medio (gruppi del Monte Sirino, del Volturino, di Pignola – Abriola, di Vietri di Potenza, dei Foi di Picerno). Non sono ancora chiariti i rapporti tra questa serie stratigrafica e quella dei calcari adiacenti (2).

Esternamente a questa regione con i nuclei più antichi dell'Appennino Lucano, seguono a NE altre striscie di formazioni terrigene (arenarie e argille scistose con brecciole calcaree): zona di accumulo terrigeno oligocenico e miocenico, equivalente di quella che costituisce tanta parte dell'Appennino Settentrionale. La struttura è generalmente a scaglie vergenti a NE. Si giunge con queste al margine dell'arco montuoso lucano sopra all'avanfossa ricolma di sedimenti pliocenici, equivalente e in continuazione della zona pliocenica che decorre lungo tutto il margine appenninico al bordo della pianura padana e del mare Adriatico in cui sparisce il lato NE della fossa. Qui invece la fossa appare completa (3), emergendo al suo bordo NE, nelle Murge come nel Gargano, il substrato di calcari mesozoici, prevalentemente cretacei, al di sopra dei quali non sono giunti i materiali terrigeni cenozoici dell'Appennino, ma si hanno lembi trasgressivi di calcari organogeni del Paleogene, del Miocene e anche del Pliocene: facies organogena di avampaese di quei periodi in cui nel retrostante Appennino si accumulavano sedimenti terrigeni in rapporto con l'orogenesi. Ai caratteri stratigrafici d'avampaese si aggiungono quelli tettonici: mancano infatti del tutto nelle Murge i corrugamenti, che sono invece intensissimi nel retrostante Appennino. Le Murge sono dunque caratteriz-

(*) Nella seduta del 12 aprile 1947.

(1) R. Signorini, *Fauna a Lepidocicline presso S. Angelo le Fratte in Lucania.* « Boll. Soc. geol. it. », vol. LX, Roma 1941.

(2) R. Signorini, *Sulla tettonica dei terreni mesozoici nell'Appennino Lucano.* « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », Cl. Sc. fis., mat. e nat., fasc. 10, ser. 6ª, vol. XXIX, 1939.

(3) C. Migliorini, *Cenno sullo studio e sulla prospezione petrolifera di una zona dell'Italia Meridionale.* Comunicazione presentata al IIº Congresso Internazionale del Petrolio a Parigi, Roma 1937. L'A. chiama l'avanfossa « Fossa Bradanica » e dà importanti cenni, con uno spaccato teorico, dei rapporti tra l'Appennino e l'avampaese Gargano-Murge.

zate dall'assenza delle conseguenze, siano stratigrafiche siano tettoniche, dell'orogenesi appenninica.

Avanzando dall'avampaese (altipiano delle Murge) verso l'Appennino Lucano, la massa calcarea organogena si immerge lentamente verso SO e i soprastanti terreni pliocenici (non mi occupo qui della distinzione del Calabriano dal Pliocene), passati dalla facies organogena d'avampaese (calcare materino) alla facies terrigena (argille, sabbie, conglomerati), assumono spessori sempre crescenti dalle Murge verso il margine appenninico.

In prossimità di questo i terreni pliocenici si sollevano rapidamente fino a portare ad affiorare, di sotto alle potenti argille piacenziane, una caratteristica formazione basale. Questa è costituita da sabbioni, sabbie con ciottoli, conglomerati, banchi conchigliferi; la sua parte inferiore è talora costituita da pezzi della sottostante formazione miocenica appena rimaneggiati o rimpastati, o anche così poco elaborati che talora in affioramento mal si delimitano dal Miocene in posto. Tale formazione basale del ciclo sedimentario pliocenico affiora lungo tutto il margine, interposta tra le argille azzurre e i terreni prepliocenici. Essa poggia trasgressivamente e con discordanza angolare sopra a questi ultimi più intensamente piegati.

Questi terreni che lungo il margine dell Appennino Lucano affiorano direttamente sotto ai terreni pliocenici, sono costituiti in gran parte da un complesso di arenarie tenere grigie passanti talora a zone marnose, talora a zone di straterelli di calcari bianco-giallicci con spalmature nerastre; spesso vi si intercalano brecciole calcaree piene di organismi. Questo complesso è molto esteso (zona A) ed è riferibile al Miocene medio.

Cominciando dall'affiorare presso il Mare Jonio delle argille plioceniche dell'avanfossa lucana, si nota nella zona di Pisticci, nel Cavone e oltre, un generale sollevamento degli strati pliocenici verso ovest. Una linea di dislocazione passante per Craco vi porta ad affiorare, di sotto alle argille che si sollevano fortemente verso ovest, le sabbie gialle e i conglomerati basali (il paese è su una cresta formata dagli strati raddrizzati di conglomerato), e anche le sottostanti arenarie con calcari marnosi bianchicci del Miocene medio. Ma più apertamente affiorano i terreni prepliocenici in una lunga striscia, S. Maria – S. Mauro Forte, lungo il margine appenninico, ancor giù nella bassa distesa dei terreni dell'avanfossa, dinanzi all'alta Serra di Stigliano (fig. 1). I terreni pliocenici vi presentano una piega anticlinale in cui viene ad affiorare di sotto alle argille la formazione basale costituita da sabbioni gialli, teneri, grossolani, tufacei, spesso conchigliferi, e da conglomerati; nel nucleo emergono le arenarie e marne del Miocene medio formando una serie di colline tra 500 e 650 metri di altitudine: S. Maria, Serra Palazzo, Serra la Cisterna, Tempa di Cristo. A S. Mauro Forte la formazione basale (sabbie con ciottoli e tufi calcarei) circoscrive l'affioramento mesomiocenico immergendosi sotto alle argille plioceniche a SO, a N e a NE.

Continuando verso NO, ancora affiorano le marne e sabbie grigie, con i tipici calcari bianchicci a spalmature scure, del Miocene medio, profondamente incise dal torrente Salandrella tra Oliveto Lucano e Garaguso, con

prevalenti inclinazioni forti a SO. Ambedue questi paesi sono costruiti sopra ai conglomerati e sabbioni concrezionati dell'orizzonte basale del Pliocene che a Oliveto immerge verso SO sotto alle argille plioceniche. I sabbioni e i calcari bianchicci mesomiocenici si estendono anche a nord di Garaguso fino all'ampia distesa delle argille plioceniche che fiancheggiano il Basento

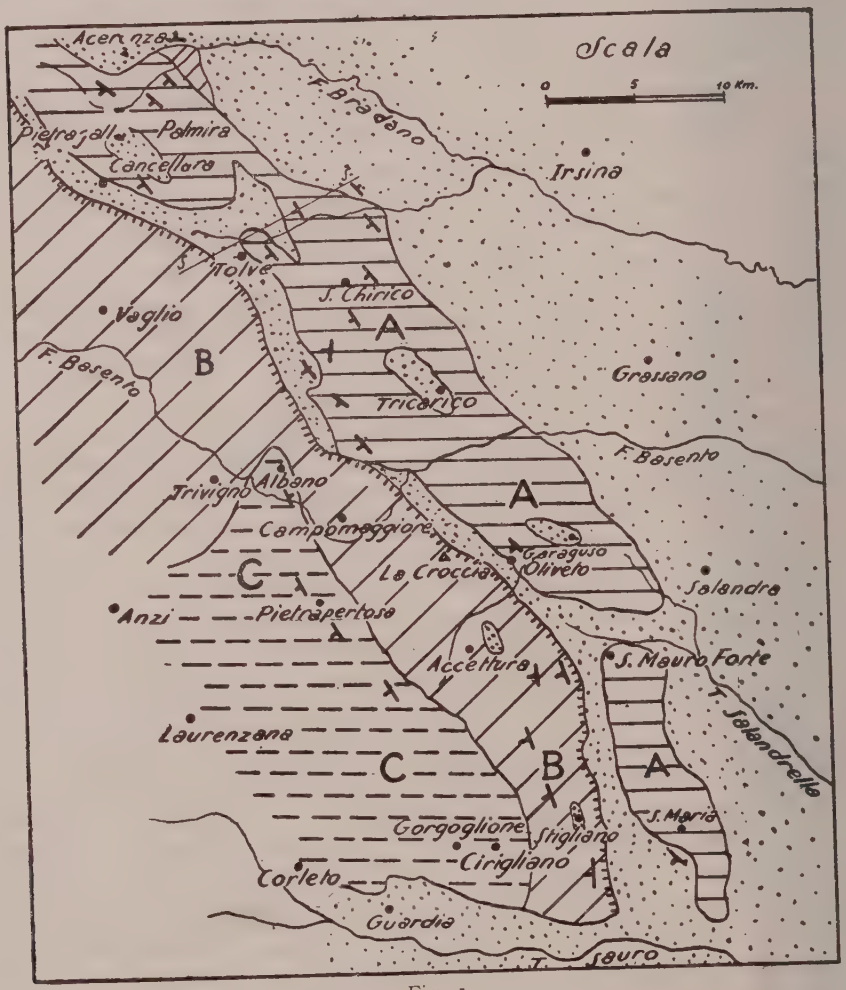


Fig. 1.

presso la stazione di Grassano. A monte, su ambedue i versanti del Basento, continua ad affiorare con notevole estensione la formazione mesomiocenica costituita prevalentemente dalle solite arenarie tenere con inclinazioni predominanti sui 30° verso SO (Bosco S. Domenica sul versante destro, zona di Tricarico sul sinistro). Il paese di Tricarico è costruito su conglomerato conchiglifero basale al bordo di un lembo sinclinale pliocenico che riposa trasgressivamente sulla formazione miocenica.

La ruga di terreni mesomiocenici continua verso NO nella zona di S. Chirico, con pendenze a SO. La Fiumara di Tolve incide il medesimo complesso mesomiocenico di arenarie tenere con zone di calcari bianco-giallicci e di marne (fig. 2). La pendenza degli strati è anche qui verso SO: gli strati mesomiocenici sono ancora inclinati a SO al margine esterno dove la valle della Fiumara di Tolve sbocca nella distesa delle argille plioceniche dell'avanfossa. Quivi i soprastanti strati pliocenici pendono invece verso NE. La formazione basale del Pliocene e i suoi rapporti col sottostante complesso mesomiocenico sono benissimo esposti sul versante sinistro della Fiumara di Tolve nella Serra dell'Acqua Fredda, nella Difesa da Piedi (di Tolve) e più a monte, separato da una sinclinale di terreni pliocenici in situazione analoga a quella di Tricarico e a quella di Garaguso, nel poggio Lo Stallone e in quello dove sorge, sui conglomerati pliocenici, il paese di Tolve. Gli strati della porzione basale del Pliocene si presentano sempre con inclinazioni minori dei sottostanti strati miocenici, con netta discordanza, e costituiscono nel loro insieme due pieghe con immersione assiale verso NO che fa sparire, a sinistra della Fiu-

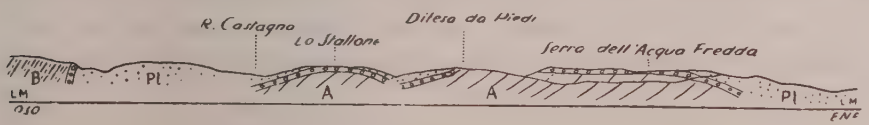


Fig. 2.

mara di Tolve, la sottostante formazione miocenica. I terreni pliocenici chiudono anche dal lato dell'Appennino questa duplice ruga: a Tolve e nei poggi a SE si hanno gli strati basali pliocenici inclinati a SO.

Proseguendo ancora lungo il margine appenninico verso NO, la formazione mesomiocenica torna a riemergere nel Monte Moltone e in tutta la zona tra il paese di Palmira (o Oppido che dir si voglia) e quello di Cancellara, poi tra Acerenza e Pietragalla: sono al solito arenarie tenere grigie, calcari marnosi giallicci e brecciolini calcaree, con generali pendenze a SO. Vi rimangono sopra dei lembi pliocenici: i maggiori sono quello di Piano Marino - Taverna Arsa a nord di Cancellara e quello di Acerenza: essi giacciono trasgressivamente con una formazione basale costituita da ciottoli di calcare marnoso gialliccio e di brecciolina calcarea del sottostante Miocene, e da strati di sabbie gialle, talora con banchi conchigliari. Molto più in basso di Palmira e di Acerenza, sulle pendici a NE, decorre il bordo della distesa delle argille plioceniche dell'avanfossa. Sotto ai sabbioni gialli della formazione basale, sui due lati del Bradano, non si trova direttamente il solito complesso «A», ma un insieme franoso di argille scistose variegate (rosse, verdi, azzurre) con intercalazioni dure silicee e brecciole calcaree contenenti anche Nummuliti.

Questo fatto nuovo si presenta molto più esteso e chiaro proseguendo ancora lungo il margine appenninico. Infatti dalla contrada S. Zaccaria si allunga verso NO, man mano allargandosi, per Forenza, Maschito e la parte mediana della distanza tra Venosa e Ripacandida, una zona, al bordo della

distesa pliocenica dell'avanfossa, in cui direttamente sotto ai conglomerati pliocenici compaiono bancate di brecciole calcaree spesso con abbondanti Nummuliti; talora vi si presentano interstrati di argille scistose rossicce. Gli strati hanno pendenze varie e si trovano anche raddrizzati. Verso SO, con prevalente pendenza a SO, vanno sotto a una zona di arenarie gialle; poi sopra a queste viene un potente complesso di arenarie tenere grigie del solito tipo mesomiocenico. È qui infatti, non più marginale, la continuazione della zona « A ». Ad est di Ripacandida e presso Ginestra vi si intercalano anche strati di calcare marnoso bianco-gialliccio. Gli stessi calcari si trovano ancora ad est di Rapolla. In tutte queste ultime località sono più o meno coperti dai tufi vulcanici del Vulture.

Tutta questa zona « A » forma un'unità tettonica costituita da un pacco di strati mesomiocenici sollevati con inclinazioni prevalentemente a SO: cioè un blocco, un cuneo, una scaglia, talora multipla, con vergenza a NE. La forte discordanza angolare col Pliocene trasgressivo indica che il diastrofismo principale è avvenuto prima del Pliocene. Posteriormente a questo si è avuto un ripiegamento di minore intensità. I terreni pliocenici si ritrovano sui due fianchi della ruga a nucleo miocenico descritta sopra: questa rimane così separata dalle prossime rughe o scaglie di terreni prepliocenici che si ergono più internamente, nell'Appennino Lucano.

Zoologia. — *Note araneologiche.* – XXV. *Considerazioni sul tipo di partenogenesi riscontrato negli Araneidi* [*]. Nota di B. Monterosso, presentata [**] dal Socio A. Russo.

In una Nota precedente [1] ho cercato di riassumere alcune caratteristiche presentate dalle femmine vergini dei Ragni, basandomi sui risultati delle indagini, da me stesso eseguite nelle quattro specie, che fino ad ora si sono dimostrate capaci di deporre uova partenogenetiche, e precisamente *Teutana triangulosa* (Walck), *Tetragnatha extensa* (L), *Tegenaria domestica* Clerk e *Thomisus albus* Gmelin.

Ho altresì accennato alle condizioni delle ovature, prodotte da individui che, pure non essendosi accoppiati, sono capaci di emettere i prodotti sessuali (vergini [2] feconde e fertili), insistendo sui seguenti reperti:

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata e Zoologia dell'Università di Catania.

(**) Nella seduta del 12 aprile 1947.

(1) B. Monterosso, *Note araneologiche* – XXIV. *Nuovi dati sulla partenogenesi naturale degli Araneidi*. Questi « Rendiconti », serie VIII, vol. I, fasc. 10 (1946).

(2) A tale riguardo ho distinto le specie, fino ad ora studiate, nei seguenti tipi, cui ho attribuito nomi convenzionali: *feconde* qualora le femmine allo stato vergine depongano uova normali; *fertili*, se producono uova anormali; *sterili*, ove si mostrino costantemente incapaci di ovificare (cfr. Nota precedente).

1° le uova vergini si segmentano sempre, fuorchè nel caso in cui sono affette da una qualunque delle anomalie [3] che si possono rilevare con la semplice osservazione esterna;

2° le femmine vergini quasi costantemente manifestano caratteri di « insufficienza sessuale » più o meno accentuata; insufficienza, che si mostra assoluta nelle vergini sterili;

3° il tipo di partenogenesi dei Ragni può considerarsi differente da ogni altro, fin qui descritto nelle varie specie animali [4].

Quest'ultima affermazione ritengo meriti un esame più largo e approfondito, sicchè vi dedico la presente Nota.

Una bibliografia tanto vasta, da non potere, specie nel momento attuale, consultarsi interamente, segnala un gran numero di specie animali [5], le cui uova hanno tendenza naturale a svilupparsi senza fecondazione e precisamente mediante quei tipi di partenogenesi, che sono stati denominati rispettivamente *rudimentale* e *accidentale* (*occasionale*). Ora, dall'esame dei più importanti lavori, pubblicati sull'argomento, risulta che questi due tipi hanno ambedue come carattere l'*incostanza* del fenomeno: lo sviluppo embrionale, cioè, si avvera in una percentuale più o meno elevata delle uova deposte, *mai in tutte*.

La partenogenesi, che ho messo in evidenza nei Ragni, è anch'essa *incompleta* (quindi rudimentale *sensu strictiori*), ma è *costante*, cioè si manifesta in *tutte* le uova - ben inteso, *in tutte le uova a struttura normale*. Insomma, le uova, che non iniziano la segmentazione, si sono dimostrate sempre difettose: esse dunque sono incapaci di sviluppo partenogenetico solo in quanto sono anormali [6]. In base a tale constatazione, lo sviluppo verginale delle uova, in questo Ordine sistematico, non può considerarsi come uno dei tanti casi di quella, che merita il semplice titolo di partenogenesi *rudimentale*, perchè questa, per quanto io sappia, si è rivelata sempre *occasionale*, cioè nelle specie, in cui è stata trovata, si è manifestata solo in una certa percen-

(3) In una Nota precedente (*Note araneologiche* – XXIII. *Partenogenesi in « Tetragnatha extensa »*. Questi « Rendiconti », vol. I, fasc. 10) a p. 1105 si legge la seguente frase: « quelle (uova) prodotte dalla *MO*, che furono complessivamente 127 ben 100 subirono la segmentazione ecc. ». Essa si rivela subito errata, ove sia dato uno sguardo al quadro contenuto nella medesima Nota a p. 1106. In realtà la frase, per una svista, è rimasta incompleta, poichè doveva invece suonare così: quelle (uova) prodotte dalla *MO*, che furono complessivamente 127, ben 100 essendo anormali, solo 27 subirono la segmentazione ecc. . . ».

(4) Cfr. B. MONTEROSSO, *Partenogenesi negli Araneidi*. « Boll. Soc. Ital. Biol. sper. », vol. XIX, fasc. 7–9 (1944); *Note araneologiche* – XII. *Partenogenesi naturale costante–incompleta in « Teut. triang. »*. Comunicata all'Acc. Gioenia nella seduta dell'11 giugno 1944. In corso di stampa; *Note araneologiche* – XXIII. *Partenogenesi in « Tetragnatha extensa »* (in coll. con C. RONSISVALLE). Questi « Rendiconti », vol. I fasc. 10 (1946), p. 1103.

(5) Cfr. A. VANDEL, *La Parthénogénèse*. C. Doin ed. (1931) ed altre ben note opere d'insieme sull'argomento.

(6) Evidentemente, anche se fossero state fecondate, tali uova non si sarebbero segmentate lo stesso. Cfr. Nota precedente (XXIV), già citata, in questi « Rendiconti ».

tuale – sia pure alta – delle uova, prodotte dall'individuo; eppure le altre – che non si sviluppano – *nulla mostrano di anormale*, come avviene nei Ragni.

Potrebbe obiettarsi che qualche anomalia pur esista, ma non sia materialmente constatabile o non sia stata constatata dagli studiosi. Di conseguenza, fino a quando tale constatazione non abbia avuto luogo nettamente – – come da me è stato fatto nelle specie araneologiche investigate – sarà opportuno tener distinto il tipo di partenogenesi, proprio dei Ragni, da quello, indicato con il semplice titolo generico di *rudimentale*, e ciò in quanto costituisce un caso peculiare di questo per il suo carattere di totalitarietà (7).

A questo riguardo non sembra inopportuno osservare qui che il numero delle uova anormali nei Ragni studiati potrebbe essere molto minore, di quanto ordinariamente non sia, se non vi influisse la condizione di cattività, che, per quanto si tenti, non si riesce mai a rendere del tutto inefficace. Prova si ha nel seguente fatto: qualora la femmina vergine abbia compiuto la maggior parte dello sviluppo liberamente nell'ambiente naturale, depone, in prigionia, uova tutte, o quasi, normali, almeno nei primi tempi dell'allevamento. Al contrario, le femmine mantenute in gabbia dalla nascita, non di rado depongono – e talora per tutta la vita – uova anormali.

Queste constatazioni ci fanno supporre legittimamente che il fenomeno della partenogenesi nei Ragni sarebbe molto più imponente e generale, ove si potessero mantenere i soggetti di studio nella libera natura ma lontani dal maschio, cosa praticamente impossibile. Pertanto non è improbabile che le specie *sterili* siano tali solo in quanto più delle altre sensibili alle condizioni di allevamento in laboratorio.

D'altra parte non pare dubbio, percorrendo la vastissima bibliografia, consacrata alle indagini sulla partenogenesi nelle varie specie animali (quella sui Ragni si limita alle mie recenti Note), che molte di esse danno una percentuale di sviluppi diversa, secondo che le loro uova siano fecondate o no. Questo fatto è particolarmente interessante se di tratta di organismi a fecondazione esterna, perchè, in tal caso, evidentemente, la femmina è *sempre vergine*, sicchè le uova, debbano o no ricevere lo spermio, risultano assolutamente uguali. E allora, la partenogenesi (sia naturale o sperimentale) va assunta in tali specie come *incostante*, anche se la differenza (in meno) degli

(7) Va in proposito rilevato come fino ad oggi manchi una classificazione completamente soddisfacente dei tipi di partenogenesi, che si avverano in natura; anche da ciò deriva la imprecisione e la molteplicità di termini, che si riferiscono a tale fenomeno. Così, per esempio GEDDES e THOMPSON in *Evolution of sex* (London 1899), distinguono i seguenti tipi di *partenogenesi naturale*: *occasionale*, *facoltativa*, *stagionale*, *esclusiva*. Pertanto quella che altri chiama *partenogenesi rudimentale* entra nell'*occasionale* ed eventualmente in altri tipi; la *p. geografica* nell'*esclusiva* (detta da altri autori *costante*) ecc. Invece M. CAULLERY nel volume *Les Problèmes de la Sexualité*, Paris 1913, divide la p. naturale nei seguenti tipi: *accidentale* (o *facoltativa*) e *normale*. Quest'ultima, secondo l'A. può essere *obbligatoria*, *ciclica* (*regolare* o *irregolare*) e *costante*. Alla accidentale pare riattacchi qualche caso sporadico, che denomina di *partenogenesi eccezionale*. In ogni modo, la p. rudimentale è di solito considerata come accidentale, cioè incostante.

sviluppi di uova vergini è minima rispetto alla percentuale di sviluppo di uova fecondate.

Nei Ragni, invece, lo ripeto, secondo i risultati da me ottenuti, *tutte* le uova che, previa fecondazione, sarebbero capaci di sviluppo, sono capaci di segmentarsi anche quando restano vergini.

È vero che, sotto questo punto di vista, le uova di Ragno pare si comportino come quelle di molti organismi a partenogenesi *facoltativa*, per esempio come quelle dell'Ape o di *Pediculoides ventricosus*, nelle quali specie sembra che *tutte* le uova siano capaci di svilupparsi senza essere state fecondate [8]. Vi sono però due differenze fondamentali da tener presenti: anzitutto, in questi organismi l'embrione arriva a terminare lo sviluppo, ciò che mai avviene nei Ragni; in secondo luogo, la mancata fecondazione, per un certo numero di uova, è un fenomeno (almeno negli Imenotteri a partenogenesi arrenotoca) già stabilizzatosi nell'economia della specie, tanto vero che anche nelle condizioni ordinarie tutti i maschi pare derivino da uova non fecondate. In ogni modo l'uovo, sia o no penetrato dallo spermio, dà origine ad un individuo; nei Ragni, invece, la nascita di un nuovo individuo è condizionata dall'anfimissi, sebbene l'uovo sia capace di *autoattivazione*, cioè il suo primo sviluppo sia indipendente dalla fecondazione.

In definitiva, allo stato delle ricerche, mi credo autorizzato a considerare la partenogenesi dei Ragni come un tipo con fisionomia propria, onde può continuare ad indicarsi come *incompleta costante*, giusta la denominazione, datale da me stesso fin da principio.

Con ciò non vuolsi certo affermare che *solo* i Ragni ne siano capaci: infatti, diverse specie di animali, se studiate sotto questo punto di vista, potrebbero mostrare il detto tipo di partenogenesi; ma, fino ad ora, nella letteratura sull'argomento, non mi pare di aver trovato un caso del tutto simile, fors'anche perchè nessuno è stato investigato con il criterio, da me seguìto nei Ragni, in modo cioè da risultare indubbio che le uova sterili siano anormali .Per esempio, le ricerche di Lécaillon, di Jucci e della sua scuola, di Grandori e discepoli, hanno dimostrato che la percentuale degli sviluppi partenogenetici nel Baco da seta può raggiungere quote elevatissime e *forse tutte le uova* iniziano – ma solo in certi casi, del resto non ben definiti nella intima essenza – anche se non fecondate, la segmentazione. Ove si potesse dimostrare qualcosa di analogo a quello, che ho trovato nei Ragni, anche la partenogenesi del Filugello sarebbe da assumersi come *costante*, mentre ora è da considerarsi come *incostante* (accidentale).

(8) Per l'Acaro nominato nel testo cfr. B. MONTEROSSO, *Osservazioni e ricerche sperimentali sulla biologia di «Pediculoides ventricosus»* (Newp.) Berl. «Riv. di Biol.», XVI, 1 (1934).
In questo lavoro statisticamente si è provato che ogni vergine (arrenotoca) produce in media un numero di nati, che è uguale a quello, prodotto da una femmina fecondata. Evidentemente, in questa specie, essendo vivipara, la dimostrazione del fatto accennato sopra, non poteva basarsi su dati concreti e su dirette osservazioni, come si è potuto fare invece per le uova di Ragno, ma solo su rilievi statistici, quindi approssimativi.

Anche la partenogenesi *sperimentale* è noto che nelle mani di Y. Delage, di Garbowski e di qualche altro ha dato in certi casi il 100% di sviluppi [9].

Ora se consideriamo la partenogenesi come una condizione filogeneticamente secondaria, derivata cioè dalla riproduzione sessuale, potremo assumere il caso dei Ragni come l'*ultima tappa evolutiva* della partenogenesi rudimentale, in quanto *costante*, ove assumiamo come prima tappa la *part. rudimentale–incostante*. Sarebbe del massimo interesse, pertanto, conoscere verso quale sesso negli Araneidi si orienti l'uovo, se cioè abbia tendenza alla telitochia, alla arrenotochia o alla deuterotochia.

Tale tipo di partenogenesi colma forse un vuoto, che si notava nella seriazione dei tipi, fin qui descritti. Difatti, pur non volendo pregiudicarci sul valore reale di detta seriazione, fatta da varii Autori, con finalità e criteri diversi, vogliamo notare che, accogliendo la differenziazione, da me proposta, in base ai reperti accennati, si può passare logicamente dalla partenogenesi « rudimentale » che è *incompleta–incostante*, alla *incompleta–costante* dei Ragni, indi alla accidentale o « facoltativa », essenzialmente *completa–incostante* e infine alla « obbligatoria » o « telitoca », che è *completa–costante*. A questo riguardo diamo ragione al Vandel [10] ove afferma (p. 20) che la classificazione dei tipi di partenogenesi riesce estremamente difficile, in quanto ogni caso presenta la sua particolare originalità.

Nel chiudere questa breve Nota desidero insistere sul fatto che, a quanto risulta dalle mie ricerche, pare che la *attivazione* dell'uovo dei Ragni rappresenti una condizione *necessaria*, ma *non sufficiente* per la nascita di un nuovo individuo.

Ora, tale capacità di attivazione, essendo spostanea, cioè insita nella compagine morfo–fisiologica di detto uovo (o dovuta al fluido che lo accompagna nella deposizione ?) scatena i fenomeni di sviluppo, che in mancanza dello spermio però non si completano, per ragioni a noi finora ignote (impossibilità di ricostituire il corredo diploide della specie ?). Da ciò si detrae come sicura una netta indipendenza tra *attivazione* dell'uovo ed *anfimissi*, almeno nelle conseguenze [11], come ebbe già a sostenere, in lavori classici, Teodoro Boveri, la cui teoria al riguardo, se, di fronte al progresso delle nostre conoscenze, ha oggi perduto il suo valore generale, merita sempre di essere considerata come una tappa importante nel tentativo di risolvere uno dei più oscuri problemi biologici: l'intimo determinismo dello sviluppo embrionale e il vero significato della fecondazione.

(9) Cfr. DELAGE, GOLDSMITH, *La parthénogénèse naturelle et expériméntale*. Paris 1913.

(10) A. VANDEL, op. cit.

(11) Per i Ragni, anche nelle cause. Difatti tutto ci induce a pensare che in questi organismi, esistendo la capacità di *autoattivazione*, non lo spermio, ma qualche altro agente sia responsabile della segmentazione; l'anfimissi, con conseguente ricostituzione del corredo diploide, dipenderebbe invece dall'intervento dello spermio.

Fisiologia vegetale. — *Escreti fungini e mitosi cellulari* (*). Nota II di F. M. Gerola, presentata (**) dal Socio G. Gola.

Ho continuato le ricerche, già riferite (1), sull'azione che alcuni substrati di cultura di funghi hanno sulle mitosi in piantine di frumento.

Ho modificato leggermente il modo di coltivazione, seminando un maggior numero di disseminuli di funghi, e favorendo l'aerobiosi delle culture; ho fissato la mia attenzione sopra tre gruppi di stipiti già usati per le precedenti ricerche e cioè: ad azione mitoinibitoria (A), bloccanti le cariocinesi alla metafase (B), privi di azione sulle mitosi (C).

Come base per l'interpretazione dei risultati ho eseguito dapprima prove analoghe a quelle già riferite, e ne dò le indicazioni fondamentali (2):

	24 ore		72 ore
Contr. in H_2O	334–232–0,1 =	(384–240–2) =	281–194–2,8 = (242–101–1)
A) 2376	119– 77– 0 =	(386–205–2) =	250–186–1,4 = (0 – 0 –2)
B) 1077	0 – 0 – 0 =	(279–237–0) =	0 – 0 – 0 = (126–121–0)
1064	195–173– 0 =		115–107– 0 = (102– 82–0)
C) 1047	327–246– 0 =	(390–272–0) =	181– 88–2,4 = (244–152–0)
1056	110– 77– 0 =		94– 69–0,1 = (279–160–0) .

Le migliori condizioni di sviluppo hanno dato luogo ad una maggiore produzione di sostanze attive.

Vediamo infatti come nel 1077 si ha addirittura inibizione completa della cariocinesi, accompagnata persino da degenerazione nucleare. Gli apici mostravano una colorazione rapida ed intensa con il reattivo di Schiff, tanto da rendere non più distinguibili i nuclei, in causa di una forte colorazione di tutta la cellula.

Anche il 1064 determinò una certa alterazione nucleare, rilevabile dalla scarsa colorabilità al Feulgen. Il 1056 infine manifesta una leggera mitoinibizione. Unica discordanza tra i dati precedenti e quelli che ho più sopra rife-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Padova.

(**) Nella seduta del 12 aprile 1947.

(1) F. M. Gerola, 1946, *Escreti fungini e mitosi cellulari.* (« Rendic. Acc. Naz. Lincei », Cl. sc. fis. mat. e nat., VIII, 801-805).

(2) Il significato dei numeri di questa e delle tabelle successive, corrisponde a quello della mia Nota precedente: in ogni colonna il primo numero indica il n° totale delle mitosi, il secondo corrisponde al n° delle metafasi, il terzo esprime un punto di merito sulla crescita delle radici. I numeri posti tra parentesi, in questa tabella, sono quelli da me già riferiti nella mia Nota precedente.

riti riguarda il 2376: in questo caso infatti non si nota un aumento del potere mitoinibitorio del liquido, ma anzi una diminuzione rispetto a quanto fu da me ottenuto antecedentemente; su tale fatto in apparenza discordante intendo ritornare in seguito.

A. *I modi di azione degli antimitotici e la loro concentrazione.* – Gli accenni ai più sensibili effetti della presenza di una maggior quantità di sostanze tossiche, mi hanno fatto rivolgere l'attenzione al problema di una più elevata concentrazione dei liquidi attivi.

Tale concentrazione fu ottenuta mediante graduale congelamento a — 5°, e separazione ad intervalli dei cristalli di ghiaccio formatisi, fino a quando veniva ridotta a metà la quantità di acqua dei singoli campioni.

Ritengo questo un procedimento assai migliore del riscaldamento o della evaporazione all'aria, evitando decomposizioni od ossidazioni dei materiali antibiotici.

Riporto i risultati ottenuti, ponendo tra parentesi quelli relativi ai liquidi non concentrati:

	24 ore		72 ore	
Contr. in H_2O	275–184– 1	=	213–146–4,8	
A) 2376	0 – 0 –0,1	= (119– 77–0)	0 – 0 –0,5	= (250–186–1,4)
B) 1077	0 – 0 – 0	= (0 – 0 –0)	0 – 0 –0,5	= (0 – 0 – 0)
1064	0 – 0 – 0	= (195–173–0)	0 – 0 –0,5	= (115–107– 0)
C) 1047	136– 82– 1	= (327–246–0)	226–146–3,2	= (181– 88–2,4)
1056	23– – 0	= (110– 77–0)	48– –0,5	= (94– 69– 1).

Si può da ciò affermare in maniera generale che il concentrato dei liquidi (come era da attendersi), ha un'azione sulla mitosi e sulla crescita delle radici notevolmente aumentata rispetto a quella dei liquidi usati tali e quali: infatti il 2376, che aveva manifestato solo una debole azione nelle prove precedenti, riacquista il suo potere altamente mitoinibitorio, se sottoposto a concentrazione; il 1064 assume pure il potere di impedire la cariocinesi; anche il 1056 mostra una più spiccata azione mitodepressiva. Da notare infine che il 1047, pur rimanendo apparentemente inattivo, dimostra una stimolazione del processo mitotico, dopo una sua iniziale leggera inibizione. In base a questi risultati è da ritenere che l'azione carioclasica, mitoinibitoria e bloccante la cariocinesi alla metafase, almeno per i miceti da me considerati, sia dipendente solo dalla concentrazione di una determinata sostanza (o sostanze) e non dalla presenza nei liquidi di sostanze aventi ognuna un potere diverso (carioclasico o mitoinibitorio ecc.).

B. *Diluizioni dei liquidi di cultura.* – Fino a quale diluizione i liquidi si manifestano ancora attivi? Eseguii pertanto diluzioni al 1/2, 1/10, ed 1/100. Ecco i risultati:

	24 ore	72 ore
Contr. in H_2O	179– 97–0,2 =	157–58 –3,1
A) 2376 ad 1/2	138– 85–0,1 =	298–198–2,5
2376 ad 1/10	159– 99–0,1 =	226–160–3,3
2376 ad 1/100	154– 96–0,1 =	136– 86–3,2
B) 1077 ad 1/2	12– – 0 =	264–175–0,8
1077 ad 1/10	220–152–0,1 =	118– 71–2,1
1077 ad 1/100	normale–0,1 =	normale–3,1
1064 ad 1/2	250–165–0,1 =	155–138–3,1
1064 ad 1/10	normale–0,1 =	normale–3,7
1064 ad 1/100	normale–0,1 =	normale–3,7
C) 1047 ad 1/10	316–167–0,1 =	118– 69–3,3
1047 ad 1/100	213– 94–0,1 =	normale– 3
1056 ad 1/2	91– 61– 0 =	119–113– 1
1056 ad 1/10	244–157– 0 =	167–107– 2
1056 ad 1/100	normale–0,1 =	normale–3,3 .

Alla diluizione di 1/2 solo il 1077, e in modo più limitato il 1056, mostrano ancora una certa azione mitodepressiva. Da tener presente pure che il 2376, come il liquido tal quale, così anche alle diluizioni di 1/2 ed 1/10 mostra avere dopo 72 ore un numero di mitosi superiore a quello dopo 24 ore. Ciò vale anche per il 1077 ed il 1056 alla diluizione di 1/2, mentre in tutte le altre prove, come pure nei controlli, si verifica il caso inverso: su tale fatto intendo però ritornare in seguito.

C. *Radici poste nei liquidi ed in seguito in acqua.* – Piantine di frumento poste per vario tempo nei liquidi di cultura e quindi trapiantate in terra o in sabbia, mostrarono una crescita corrispondente a quella dei controlli. Dopo tali risultati mi proposi di esaminare il destino non già di tutta la piantina di frumento, ma delle radici che erano rimaste immerse nei liquidi.

Con la solita tecnica lasciai per 24–48–72 ore delle piantine di frumento nei liquidi di cultura, e dopo lavaggio delle radici posi le piantine in acqua. Dopo 72 ore fissazione e colorazione delle radici. Ecco i risultati:

	24 liquidi + 72 H_2O	72 liquidi + 72 H_2O
Contr. in H_2O	264–160– 2 =	120– 69– 7
A) 2376	105– 50– 0 =	187– 78– 6
B) 1077	22– – 0 =	0 – 0 – 0
1064	35– – 0 =	0 – 0 – 0
C) 1047	327–220– 1 =	137– 83– 7
1056	202–132– 0 =	normale–3,4 .

Particolare appare subito il comportamento della crescita delle radici dopo 24 ore di immersione nei liquidi: malgrado il ritorno per 72 ore in acqua,

solo i controlli ed il 1047 mostravano una certa crescita. Dopo 48 ore di immersione anche per il 2376 si aveva crescita in lunghezza evidente, limitata per il 1056, nulla per gli altri liquidi. Dopo 72 ore di permanenza nei liquidi si hanno risultati analoghi a questi ultimi.

Il numero delle mitosi è quasi nullo in 1077 e 1064 (ciò che fa ritenere che anche il semplice blocco delle mitosi alla metafase produca una lesione nucleare non più reversibile); va decrescendo con l'aumentare delle ore di immersione nei liquidi per il 1047, mentre il 2376 presenta anche in questo caso un numero di cariocinesi che si eleva con l'aumentare nel tempo di immersione nel liquido.

In questa serie di esperienze ho notato inoltre un comportamento molto particolare delle radici immerse nei liquidi che bloccavano la loro crescita, e che avevano un'azione più o meno intensa sulla inibizione delle mitosi. In tali radici, rimaste del tutto corte (anche pochi millimetri), si verificava la emissione di un certo numero di bozze radicali nella parte alquanto distale dall'apice. Queste bozze raggiungendo un volume considerevole, erompevano all'esterno e si presentavano ben evidenti, anche al semplice esame macroscopico, in forma di extroflessioni rotondeggianti.

Nelle radici non bloccate nella crescita, si aveva pure produzione di radici laterali, ma queste erano ancora in uno stadio del tutto primitivo, appena abbozzate, e non ancora visibili all'esterno.

In tutti e due i casi, comunque, erano molto numerosi i nuclei in mitosi normali; nelle radici bloccate nella crescita si avevano così, alla distanza di pochi millimetri, nuclei normali in attiva cariocinesi (nelle bozze neoformate), e nuclei in degenerazione (all'apice).

In questa serie di esperienze si ripete per il 2376 il fatto, a cui ho già accennato in principio: si osserva cioè un arresto nella crescita, che si verifica molto precocemente, e quindi una ripresa nelle mitosi, che vanno aumentando fino alle 72 ore, senza cenno ad una riduzione di tale attività cariocinetica. In questi casi, anche in seguito, rimaneva sempre ben distinta la zona corrispondente al tratto subapicale della radice al momento della sua immersione nel liquido. Queste differenze erano ancora più evidenti dopo la colorazione col Feulgen, notandosi in corrispondenza di tale zona una maggiore opacità, contrastante sia con la zona prossimale più adulta delle radici, che con quella distale, neoformata dopo la ripresa della crescita.

All'esame microscopico tale maggior opacità risultò essere dovuta alla mancata distensione delle cellule, che in tale punto erano molto più addensate. Esse raggiungevano una lunghezza massima di 60 μ, altre avevano solo una lunghezza di 20 μ, la media si aggirava sui 44 μ; nella parte restante della radice invece (sia nel tratto più distale, che in quello prossimale), la lunghezza media delle cellule era di 360 μ, con variazioni tra 180 μ, e 500 μ. Da notare infine che in questa zona, ove le cellule non hanno subíto distensione, mancano completamente i peli radicali, mentre questi sono presenti in grande abbondanza sia nel tratto prossimale che distale ad essa.

Se ne può dedurre:

a) Il comportamento dei nuclei dell'apice di fronte a tali sostanze attive è nettamente differente da quello dei nuclei della porzione più adulta ed in via di differenziazione. Mentre infatti in corrispondenza dell'apice si ha la perdita della colorabilità dei nuclei e la loro morte, nel tratto più adulto si verifica al contrario una proliferazione intensa.

Da ciò si può supporre che i nuclei in mitosi siano maggiormente sensibili di quelli che hanno raggiunto lo stato quiescente. Tale diversità di comportamento appare ancora più notevole se si osservano le radichette più corte: in queste, sulla distanza di pochissimi millimetri, si ha contemporaneamente la distruzione dei nuclei precedentemente in mitosi e invece la cariocinesi di quelli quiescenti durante il periodo di immersione.

b) Le bozze radicali, che ho riscontrato, oltre che per il 1077 e 1064, anche per il 1056 (e cioè in conseguenza di un semplice arresto della crescita in lunghezza delle radici, e di una diminuzione ma non arresto delle mitosi) fa pensare ad una correlazione di crescita tra l'apice e le radici laterali in dipendenza del trattamento subíto: queste verrebbero emesse anche molto precocemente (nei casi da me osservati la radichetta aveva raggiunto appena il mezzo centimetro), se viene impedita o limitata notevolmente la crescita dell'apice.

Tale correlazione non sembra dipendere dallo stato dei nuclei dell'apice, in quanto la emissione precoce di radichette ha luogo sia quando essi, pur dividendosi in maniera limitata, presentano caratteri normali (1056), sia quando essi subiscono dei processi di degenerazione (1077 e 1064).

c) L'azione dei liquidi di cultura sulle cellule delle giovani radici è duplice. Si ha cioè da un lato una notevole azione sui nuclei (alla quale sono da riferirsi i fenòmeni di mitoinibizione ecc. dei nuclei dell'apice, e di stimolazione – forse solo mediata – di quelli originariamente in riposo), e dall'altra una influenza notevole sulla distensione cellulare (blocco dell'allungamento delle cellule subapicali che hanno subíto l'azione dei liquidi tossici).

Interessante è che il comportamento delle radici *in toto* rispetto agli agenti di cui mi occupo, è differente nelle diverse porzioni in rapporto all'anzianità o meglio alla differenziazione raggiunta dalle varie cellule. Mentre all'apice si ha l'azione più intensa con blocco anche delle mitosi (ed alle volte persino degenerazione dei nuclei), nelle cellule che hanno già iniziato a distendersi non si ha più una azione così violenta sul nucleo (perfetta loro colorabilità anche quando quelli apicali non sono più cromofili), ma solo un arresto nella distensione; infine, ancora più all'indietro dell'apice si può avere una stimolazione della mitosi, portante alla produzione di bozze radicali voluminose.

Questo distinto comportamento nelle diverse porzioni della radice, non è certo in rapporto con la concentrazione delle sostanze attive, essendo le radici immerse *in toto* nel medesimo liquido, ma rivela probabilmente una differente reattività dei nuclei dei diversi tessuti; è da escludere una diversa permeabilità verso le sostanze attive da parte delle differenti porzioni radicali poichè quanto rilevo riguarda solo la zona apicale e quella pilifera, cioè assorbente per eccellenza.

Biologia. — *L'interferenza dei chiasmi oltre il centromero* (*). Nota di G. MONTALENTI, presentata (**) dal Corrisp. G. COTRONEI.

H. J. Muller nel 1916 (1) dimostrò, per via genetica, che la presenza di uno scambio (*crossing-over*) diminuisce la probabilità di un altro scambio nelle regioni vicine. A questo fenomeno si dà il nome di interferenza. Numerose osservazioni citologiche e genetiche hanno in seguito dimostrato che i chiasmi citologicamente osservabili nei bivalenti alla meiosi corrispondono agli scambi genetici (2). Haldane (3) per primo potè riconoscere in un cromosoma di *Vicia faba* che esiste interferenza fra i chiasmi.

Numerose ricerche furono eseguite in seguito (4) su questo argomento e molti dati interessanti furono ricavati, in diversi organismi, sulla distribuzione degli scambi genetici e dei chiasmi citologici, sull'azione dei fattori esterni sulla localizzazione e la distribuzione degli uni e degli altri, ecc.

Per quanto riguarda in particolare l'interferenza, vari sistemi di misura furono proposti, e si riconobbe che vi può essere interferenza positiva (quando un chiasma inibisce in certa misura la formazione di un altro entro una data distanza) o negativa (quando la presenza di un chiasma favorisce la formazione di un altro entro una certa distanza).

Mather (5) trovò in *Drosophila* che non c'è interferenza degli scambi genetici al di là del centromero; quindi nei cromosoni con centromero mediano o sub–mediano i due bracci sono, da questo punto di vista, indipendenti. Il centromero perciò è considerato come un inibitore di interferenza (6). Perciò Mather (7) considera lo scambio, statisticamente, come un processo che si origina al centromero e procede lungo il cromosoma.

In seguito, però, furono date parecchie dimostrazioni di interferenza di chiasmi (citologici) che si estende oltre il centromero. Questo fenomeno fu dimostrato prima da Pätau (8) in *Culex*, su dati di Moffett (9) e in *Dicranomyia*, su dati di Wolff (10). Nello stesso anno Newcombe (11) trovò in *Tril-*

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Genetica dell'Università di Napoli.

(**) Nella seduta dell'8 marzo 1947.

(1) H. J. MULLER, « Amer. Nat. », L (1916), p. 193.

(2) Cfr. C. D. DARLINGTON, *Recent advances in Cytology*, Londra, 1937, p. 249; W. LUDWIG, *Faktorenkoppelung und Faktorenaustausch bei normalem und aberrantem chromosomenbestand*. Lipsia, 1938.

(3) J. B. S. HALDANE, « Cytologia », III (1931), p. 54.

(4) Cfr. DARLINGTON, loc. cit. e K. MATHER, « Biol. Rev. », XIII (1938), p. 252.

(5) K. MATHER, « Journ. of Genet. », XXXIII (1936), p. 207.

(6) DARLINGTON, loc. cit., p. 551.

(7) K. MATHER, 1938, loc. cit., p. 267.

(8) K. PÄTAU, « Chromosoma », II (1941), p. 36.

(9) A. A. MOFFETT, « Cytologia », VII (1936), p. 181.

(10) E. WOLFF, « Chromosoma », II (1941), p. 192.

(11) H. B. NEWCOMBE, « Genetics », XXVI (1946), p. 128.

lium erectum che vi è un'interferenza negativa oltre il centromero, cioè, in altri termini, che un chiasma « favorisce » la formazione di un altro chiasma nel braccio opposto. Kikkawa[12] aveva già calcolato, su dati di altri autori, l'interferenza genetica degli scambi oltre il centromero nel cromosoma III di *Drosophila*, ed aveva trovato un valore maggiore di uno, cioè interferenza negativa, e lo stesso Newcombe ottenne eguale risultato per il cromosoma I di *Neurospora crassa*, pure su dati di altri autori. Wanner[13], invece, in un'altra pianta, *Crepis capillaris*, trovò che in uno dei tre bivalenti (il bivalente A) non v'è alcuna interferenza fra i due bracci, i chiasmi essendo distribuiti nell'uno e nell'altro in proporzioni molto prossime a quelle teoricamente attese in base all'ipotesi che la distribuzione avvenga a caso.

In successivi lavori, l'interferenza positiva oltre il centromero fu dimostrata in altri ditteri: *Culex pipiens*[14], *Psychoda* sp.[15], *Simulium*[16], nonchè in un crostaceo Isopode[17], ed in un Ortottero, *Prionotropis*[18]. Da altre ricerche in corso e da osservazioni da me compiute, risulta che, questo fenomeno è probabilmente molto più generale di quanto non si pensasse.

Dai dati fin qui raccolti risulta dunque che, in vari organismi, possono darsi i tre casi: 1° nessuna interferenza; 2° interferenza positiva; 3° interferenza negativa. Quindi non è legittimo considerare il centromero, in ogni caso, come un inibitore di interferenza, nè considerare i due bracci di un bivalente come indipendenti nella formazione dei chiasmi.

Sarà interessante raccogliere dati più abbondanti e più precisi[19] in diversi organismi, e, possibilmente, paragonare i risultati della ricerca citologica e genetica nella stessa specie, onde avere una più chiara idea della distribuzione dei chiasmi e degli scambi in un maggior numero di casi.

(12) H. KIKKAWA, « Jap. Journ. of Genet. », XI, 1935, p. 51.

(13) H. WANNER, « Arch. d. Julius Klaus Stift. f. Vererbungsl. usw. » Erg. Bd. zu Bd. XX (1945), p. 356.

(14) H. G. CALLAN, and G. MONTALENTI, « Journ. of Genetics », 1947, in corso di stampa.

(15) G. MONTALENTI, questi « Rendiconti, » ser. VIII, vol. I (1946), p. 120.

(16) G. MOLTALENTI, questi « Rendiconti », questo fascicolo.

(17) G. MONTALENTI e G. VITAGLIANO, « La Ricerca Scient. e la Ricostruz. », anno 16, 1946, pp. 944–948.

(18) G. MONTALENTI e G. VITAGLIANO. Questi « Rendiconti », questo fascicolo.

(19) Per esempio nel caso studiato da Wanner non è stato tenuto conto della posizione dei chiasmi rispetto al centromero. Sussiste quindi il dubbio che possa esistere una interferenza, non tanto estesa però da inibire la formazione di un chiasma nell'altro braccio. Se il numero dei bivalenti con chiasmi prossimali in ambedue le braccia fosse inferiore alla attesa teorica – come nel caso di *Culex* analizzato da Callan e Montalenti – si potrebbe dire che l'interferenza esiste, ma si limita ad una regione prossima al centromero. Analoga critica, inversamente, può rivolgersi ad alcuni dei casi da me studiati, in cui, non essendosi determinata la posizione dei chiasmi nei bivalenti ad anello, non si può senz'altro asserire che l'assenza di chiasmi in un braccio sia dovuta ad interferenza, benchè ciò appaia molto probabile.

I risultati diversi finora ottenuti e qui brevemente riassunti non debbono sorprendere, anzi giustificano una più estesa ricerca. Poco o nulla ora sappiamo della meccanica della mitosi e della meiosi, e, in particolare, nulla sulle cause della interferenza nello scambio. Sappiamo però, e sempre più evidente risulta col procedere delle indagini, che lo scambio è un processo di fondamentale importanza nella riproduzione sessuale: « Crossing–over thus turns out to be the key process in sexual reproduction [20] ». È infatti attraverso lo scambio che sono rese possibili le ricombinazioni dei geni residenti nella stessa coppia di cromosomi, le quali sono una caratteristica fondamentale della riproduzione sessuale e, in un certo senso più ancora che non le mutazioni, forniscono la variabilità su cui opera la selezione. Perciò lo scambio è un processo di singolare importanza ai fini dell'evoluzione. E, come tale, non può esso stesso sfuggire al vaglio della selezione, anzi è certamente sotto il suo rigoroso controllo.

Per questa ragione, un'interpretazione puramente meccanica dell'interferenza, come quella che consideri il cromosoma come un filamento più o meno omogeneo, in cui uno scambio avvenuto in un dato punto automaticamente protegge da un altro scambio i punti vicini, per ragioni meccaniche, non regge. Il cromosoma non è un filamento omogeneo, ma una bene ordinata sequenza di molecole proteiche, nella quale non si possono portare le minime alterazioni senza che gli effetti si ripercuotano su tutto l'organismo. Perciò certi gruppi di geni non possono andare disgiunti senza che ne conseguano effetti letali. È evidente che tali gruppi sono in tal modo automaticamente protetti da scambi che possono avvenire nel loro seno. Altri gruppi possono invece disgiungersi senza pericoli, e gli scambi quindi danno luogo a individui vitali. Ma la loro frequenza non è indifferente ai fini della vita dei singoli individui e soprattutto della specie. Praticamente essa deve oscillare fra un limite inferiore, necessario a conferire alla specie una certa variabilità, e un limite superiore, oltre il quale l'eccessiva variabilità sarebbe dannosa. Questi limiti sono stabiliti, per ogni singola specie, per ogni carattere o gruppo di caratteri, e per ogni ambiente, da quell'insieme di fattori che appunto costituiscono i fattori selettivi.

Perciò è perfettamente comprensibile che, in specie diverse, in diversi gruppi di individui, e anche in diversi cromosomi di uno stesso assetto si trovino condizioni molto differenti per quel che riguarda la distribuzione dei chiasmi, e anche differenti meccanismi atti a controllarla. E l'indagine di tali distribuzioni e di tali meccanismi sarà certamente utile ai fini della miglior conoscenza dell'intima organizzazione del patrimonio ereditario e della sua evoluzione.

(20) H. J. Muller, *The gene*. « Proc. Roy. Soc. London », ser. B, vol. 134 (1947), p. 29.

Biologia. — *Nuove ricerche sulla sterilizzazione di embrioni di pollo mediante irradiazione con raggi γ. Costante determinazione del sesso femminile negli embrioni irradiati* (*). Nota di R. DULBECCO, presentata (**) dal Socio G. LEVI.

In una precedente comunicazione ho reso noto (1) di aver ottenuto degli embrioni di pollo con gonadi ben conformate, ma del tutto prive di gonociti, sottoponendo all'azione di raggi γ del radio germi di pollo allo stadio di linea primitiva; poichè l'irradiazione era protratta per 24 ore e l'uovo era mantenuto durante questo periodo nel termostato alla temperatura di 38°–39°, l'embrione risentiva l'azione del radio durante il periodo corrispondente alla formazione dei primi somiti. Nel riferire i risultati di quei primi esperimenti, ho accennato alla circostanza che gli embrioni divenuti sterili per effetto dell'irradiazione erano di sesso femminile.

Mediante ulteriori ricerche compiute sovra un materiale più abbondante risultò quanto segue: 1° fu in primo luogo confermato che la gonade si costituisce costantemente anche quando i gonociti erano stati distrutti in un periodo antecedente alla formazione della gonade; nè questi elementi si costituiscono successivamente (per lo meno sino al 16° giorno d'incubazione); 2° in tutti gli embrioni irradiati (in numero di 14) le gonadi non solo erano sterili, ma erano costantemente di sesso femminile.

Il fatto che tutti i 14 embrioni irradiati vissuti sino ad un epoca che permetteva di riconoscere il sesso con assoluta sicurezza (ossia almeno dall'8° giorno in poi), fossero di sesso femminile, nessuno escluso, fa ritenere estremamente improbabile, che si tratti di un reperto accidentale. Infatti nel pollo il numero di individui dei due sessi provenienti da uno stesso gruppo di uova, si può ritenere con buona approssimazione eguale, perciò il numero di probabilità che le 14 uova scelte a caso dessero luogo ad embrioni dello stesso sesso è di $(1/2)^{14} = 6{,}1 \cdot 10^{-5}$. È quindi statisticamente provato che lo sviluppo di embrioni tutti di sesso femminile in seguito all'irradiazione non può essere casuale.

Le mie indagini furono condotte con metodo analogo alle precedenti; fu collocato un tubetto di platino contenente 1 mg. di radium, con parete di mm. 1/2 di spessore, sull'uovo nel quale era stata praticata una finestra rettangolare nel guscio calcareo, in modo da mettere allo scoperto il blastoderma. Il tubetto era adagiato sovra uno strato di comune cerotto adesivo, posto a chiudere la finestra del guscio, in modo che la sua distanza dal blasto-

(*) Ricerche eseguite nel Centro per le ricerche sull'accrescimento e la senescenza presso l'Istituto anatomico di Torino, alle dipendenze del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 12 aprile 1947.

(1) « Atti Accad. Lincei », 1946, vol. I, pp. 1211–1213.

derma fosse di mm. 3 [2]: ivi era lasciato per la durata di 24 ore, mantenendo per tutto questo periodo l'uovo alla temp. di 38,5°. In questa serie di esperienze l'irradiazione veniva iniziata ad uno stadio di sviluppo alquanto più inoltrato che nelle precedenti, vale a dire quando l'embrione aveva raggiunti i 10 somiti. Con ciò era possibile di ottenere la sopravvivenza di una percentuale molto maggiore di embrioni che nelle mie esperienze preliminari; infatti mentre allora ero riescito ad ottenere soltanto 3 embrioni sopravviventi, su circa 100, in questa nuova serie di esperienze ho avuto undici embrioni sopravvissuti al di là dell'8° giorno sovra 22 uova irradiate.

Secondo i dati univoci degli Autori, questo stadio in cui fu intrapresa l'irradiazione precede di molto l'ispessimento dell'epitelio celomatico, il quale preludia la formazione della gonade: e si ritiene che a questo stadio i gonociti siano ancora in procinto di migrare verso la futura gonade.

Dopo l'irradiazione le uova furono incubate alla temperatura di 38,5°; gli embrioni furono in prevalenza fissati al 10° giorno, salvo uno che fu lasciato sviluppare sino al 16° giorno, e due che furono fissati tra l'8° ed il 9° giorno.

Riassumerò i fatti più essenziali da me osservati nei 14 embrioni irradiati:

1° Fu confermata la completa assenza dei gonociti nella gonade di sinistra, maggiormente sviluppata di quella di destra.

2° Tutte le gonadi esaminate presentano la configurazione morfologica del sesso femminile.

Per quel che riguarda il secondo punto, il sesso costantemente femminile degli embrioni irradiati e sopravvissuti oltre il periodo di differenziazione sessuale, faccio notare, prima di discutere il reperto, che il giudizio di femminilità degli embrioni si fonda sull'esistenza contemporanea dei seguenti quattro dati morfologici:

(2) Si può esprimere la dose di radiazione somministrata in r, usando l'equivalente biologico stabilito da MULLER («Amer. J. Cancer», vol. 32, p. 565, 1938), secondo cui un fuoco puntiforme di radium con filtro di mm. 0,5 di Pt irraggia a una distanza di cm. 1 una dose di 103 r/min/gr di Raggi X a 200 KV. Il preparato di Ra a mia disposizione è contenuto in un ago di platino della lunghezza di cm 2, praticamente filiforme, in cui la distribuzione del materiale attivo si può considerare uniforme: perciò la densità del materiale irradiante è di gr/cm. 0,5/1000. La zona da irradiare si può paragonare ad un punto distante cm. 0,3 dal centro dell'ago. La dose di irradiazione su di esso vale pertanto

$$103 \cdot 0{,}5/1000 \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{ds}{(0{,}3)^2 + S^2} = 0{,}438\ r/\text{min}.$$

Per una durata di 24 h si ha così una dose complessiva di 630 r. Con ciò non viene considerata l'azione del sottile strato di cerotto interposto tra il preparato di radium e il blastoderma. Si può ritenere che la dose complessiva si aggiri sui 600 r di raggi X a 200 KV. Questa dose è in buon accordo con la dose usata da ESSENBERG nei suoi tentativi (peraltro non riusciti) di sterilizzare precocemente le gonadi dell'embrione di pollo per mezzo dei raggi X («Radiology», 1937, vol. 28, p. 352).

a) maggior volume della gonade sinistra rispetto alla destra; *b*) maggior altezza dell'epitelio germinativo a sinistra con proliferazione di cordoni sessuali di seconda formazione, ben riconoscibili nonostante l'assenza di cellule sessuali; *c*) presenza di uno strato mesenchimale tra epitelio germinativo e la sottostante massa della gonade; *d*) formazione di cavità nei cordoni sessuali di prima formazione, i quali differiscono dagli embrioni di controllo per l'assenza di cellule sessuali.

La coesistenza di questi caratteri in tutti gli embrioni studiati non lascia dubbi sulla diagnosi di sesso della gonade.

Escluso per gli argomenti già addotti che la costanza dello sviluppo della gonade sinistra in ovario, sia un fenomeno contingente, si può prospettare la possibilità che esso dipenda da un fenomeno di mortalità selettiva, nel senso che per effetto dell'irradiazione i futuri maschi muoiano in un'epoca in cui la differenziazione sessuale non è ancora avvenuta e perciò non siano riconoscibili, mentre le femmine si sviluppano regolarmente.

Certamente l'irradiazione danneggia, com'è noto, in grado maggiore o minore tutti i tessuti dell'embrione e non soltanto i gonociti; in alcuni casi la resistenza dei tessuti è più grande ed essi sono in grado di sopravvivere. Particolarmente sensibile risultò l'apparato vascolare; effettivamente in tutti gli embrioni irradiati si manifesta un'alterazione più o meno profonda nel sistema vascolare extraembrionale: i vasi vitellini degli embrioni irradiati sono molto più esili, meno ramificati e meno estesi di quelli di controllo di eguale età. Questo determina una maggiore labilità degli embrioni; ed infatti ho notato nei miei esperimenti che gli embrioni morti prima dell'8° giorno avevano un circolo particolarmente deficiente, in modo che nel maggior numero dei casi la loro morte era già prevedibile qualche giorno prima. Inoltre ho osservato che gli embrioni in cui all'inizio dell'irradiazione il grado di sviluppo era alquanto inferiore a quello prevedibile in base alla durata del periodo di incubazione, morivano costantemente dopo l'irradiazione.

Queste osservazioni porterebbero adunque a concludere che la morte sia sopravvenuta negli embrioni fin dall'inizio meno sviluppati ed in quelli in cui il sistema vascolare venne più gravemente danneggiato dall'irradiazione, e perciò sia in definitiva dovuta a fattori legati alla variabilità individuale. Contro l'interpretazione che si sia avuta una mortalità selettiva nei maschi, mi sembra che depongano anche questi due fattori osservati: *a*) l'epoca della morte è variabilissima e l'ho osservata in tutti i periodi, dal terzo al decimo giorno d'incubazione (epoca in cui fissavo gli embrioni sopravviventi); *b*) nei casi in cui gli embrioni erano morti spontaneamente in un'epoca in cui la differenziazione sessuale era già iniziata, le gonadi presentavano, come negli altri casi, una differenziazione in senso femminile. Infatti tre dei 14 embrioni che sono l'oggetto di questa comunicazione, sono stati fissati dopo la morte, ed in essi la differenziazione sessuale in senso femminile è eguale a quella degli altri embrioni fissati quando erano ancora in vita.

Mi sembra pertanto che i risultati di queste esperienze stiano a dimostrare che l'irradiazione di embrioni di pollo nel secondo giorno di incubazione determina, per lo meno nella grande maggioranza dei casi, il sesso femminile.

Non mi risulta che questo fenomeno sia mai stato osservato; con l'esame della letteratura a me accessibile non ho potuto rintracciare alcuna ricerca analoga, se si prescinde dalle osservazioni di Knapp (1935) [3] e di Lorbeer (1936) [4], non certamente paragonabili alle mie, dalle quali risulta un'inversione del sesso dal femminile in maschile in *Sphenacarpus* per effetto di alte dosi di raggi X.

Il fenomeno che ho rilevato è indubbiamente singolare e di notevole interesse per lo studio della determinazione del sesso. Esso si presenta tanto più interessante, in quanto si ottiene con una durata relativamente breve dell'irradiazione, dopo di che in tutto il successivo periodo di sviluppo, l'embrione, non è più sottoposto ad alcuna causa perturbatrice: per questa peculiarità l'azione del mio metodo differisce profondamente dai metodi generalmente usati per lo studio sperimentale del problema del sesso, come il sottoporre gli embrioni all'azione di ormoni, la costituzione di coppie di parabionti embrionali, i trapianti, ecc., in cui l'embrione viene sottoposto all'azione di cause modificatrici di lunga durata, che persistono generalmente per tutta la durata della vita embrionale.

Ulteriori ricerche sono in corso, che sono destinate a dare un'interpretazione dell'essenza dei fatti osservati.

Biologia. — *Le grandezze nucleari nello sviluppo e metamorfosi degli Anuri. Considerazioni generali sulle ricerche cariometriche.* Nota di G. Schreiber, presentata [*] dal Socio G. Gola.

La presente Nota riassume i risultati di una serie di ricerche cariometriche sul fegato dei girini di *Bufo vulgaris* durante il periodo premetamorfico e durante la metamorfosi. Queste ricerche, eseguite allo scopo di estendere agli Anfibi le conclusioni ottenute da B. Schreiber e Angeletti [1] sulla Carpa, fecero sorgere una serie di problemi teorici, interessanti soprattutto l'accrescimento intercinetico del nucleo, che diedero a sua volta origine alle ricerche che saranno oggetto delle Note successive. L'estensione agli Anfibi delle ricerche cariometriche eseguite sui Pesci era giustificata sia dall'interesse intrinseco dei risultati ottenuti sulla Carpa dal punto di vista della citologia generale, sia per avere gli Anfibi una profonda crisi di sviluppo nella metamorfosi che manca nei Pesci.

Lo studio quantitativo dell'accrescimento nucleare ci sembra di eccezionale interesse e giustifica l'uso di una tecnica che può sembrare fin troppo

(3) « Z. indukt. Abstammgslehre », 1935, vol. 70, p. 309.
(4) « Planta »; 1936, vol. 70, p. 25.
(*) Nella seduta del 12 aprile 1947.
(1) « Anat. Rec. », 1940, 76, 431.

semplice come la misurazione geometrica del volume nucleare, in un campo come la citogenetica dove lo studio delle manifestazioni cromosomiche del ciclo nucleare hanno dato i più brillanti e spettacolari risultati. Ciò non ostante lo studio dell'interfase ci sembra ancora un campo quasi vergine e, se si tolgono le moderne ricerche di citochimica degli acidi nucleinici, nulla si conosce di ciò che succede nel nucleo in questo periodo. Vogliamo insistere ancora, che l'interesse dello studio della interfase è giustificato perchè in questo periodo i geni si duplicano, e con tutta probabilità i geni agiscono o preparano la loro azione specifica sulla cellula. Qualsiasi contributo e qualsiasi indagine che apra nuove prospettive in questo momento fondamentale della vita cellulare ci sembra degno del massimo interesse.

Le ricerche sulle grandezze nucleari del girino, ci hanno convinto della necessità di chiarire maggiormente i rapporti tra volume nucleare e comportamento quantitativo del genoma. Solamente al coperto dalle possibili obbiezioni in questo senso potremo interpretare i fenomeni risultanti dall'esame cariometrico in termini genetici. Inoltre, varie obbiezioni alle ricerche cariometriche ci fanno insistere nel chiarire che essendo il *volume* del nucleo l'oggetto delle ricerche, si deve dare a questa misura la più rigorosa esattezza nell'apprezzamento della forma geometrica di questo corpo a scanso di equivoci interpretativi che rendono le conclusioni talvolta del tutto inaccettabili. Premesse queste considerazioni, vediamo rapidamente i fatti [2]. Vennero misurati per mezzo del disegno alla camera chiara a un ingrandimento sempre costante un certo numero (100–200) nuclei del fegato e del pancreas dei girini rispettivamente di 10–14–29–51–72–77–80 e 100 giorni dalla schiusa e degli 8 stadi standard della metamorfosi (descritti da Schreiber). Vennero calcolati i volumi dalle misurazioni dei diametri sul disegno e costruite le curve di frequenza dei volumi raggruppati in classi corrispondenti alle variazioni unitarie del diametro. Di queste curve venne calcolato il valore modale. La scelta di questo parametro della curva di frequenza obbedisce al *criterio teorico che in una « popolazione » omogenea di nuclei in accrescimento i volumi più frequenti sono quelli nei quali i nuclei rimangono più a lungo; cioè le tappe dell'accrescimento stesso.* Confrontando tra loro questi volumi corrispondenti alle frequenze massime, si hanno, come è noto, serie di valori proporzionali e multipli generalmente di due che indicano esser l'accrescimento nucleare discontinuo e, come si dice « ritmico » o « periodico ». Le ricerche di D'Ancona [3] e quelle di Biesele, Poyner e Painter [4] hanno dimostrato che questa ritmicità è il risultato dell'aumento per multipli interi del genoma. Fenomeni fisico–chimici, di imbibizione, gelificazione ecc., potranno certamente interferire durante i periodi di accrescimento nucleare, ma ciò che da tutto il complesso delle ricerche cariometriche risulta sempre più evidente è che il volume nucleare riflette il comportamento quantitativo del genoma con

(2) « Boll. Fac. Filos. Cien. Letr. Uni. Saõ Paulo », XXII; « Zool. », N° 5, 1941, 234; « Anat. Record. », 1941, 87, Suppl.

(3) « Monit. Zool. It. », 1939, L, 225 « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 1941, 16, 49.

(4) « Univ. Texas Pubbl. », N° 4243, 1942.

esattezza sufficente a permettere ed autorizzare deduzioni teoriche dai risultati stessi della misura cariometrica. L'obbiezione di Le Breton e Schaeffer[5] che in queste ricerche si confrontano i volumi colle masse, ci sembra non alterare il significato dei risultati che sono sempre di valori « relativi » ed indipendenti dagli stadi intermediari per i quali il genoma influisce sul volume nucleare.

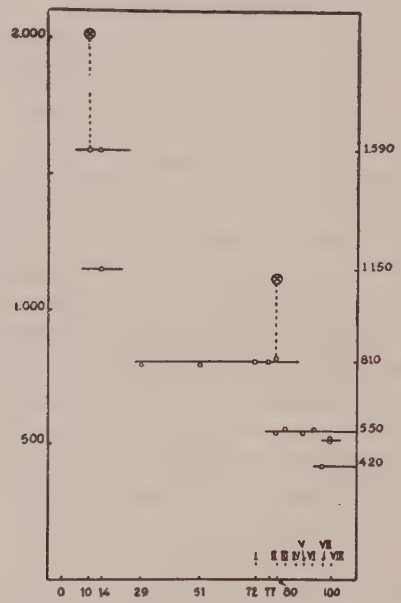


Fig. 1. – Variazioni « ritmiche » del volume nucleare epatico durante lo sviluppo e metamorfosi di *Bufo vulgaris*.

In ascisse: giorni fino all'inizio della metamorfosi; poi stadi standard (G. Schreiber, « Rend. Acc. Lincei », XXV, 1937).

In ordinate: valori modali del volume nucleare. A destra: medie di ogni « livello ». I punti colla croce rappresentano le profasi. (da Schreiber e Romano–Schreiber, 1941, modificato).

Le ricerche di citochimica, specialmente nel campo degli acidi nucleinici ci fanno intravvedere la possibilità in futuro di una più profonda interpretazione in termini chimici e chimico-fisici di questa correlazione tra genoma e grandezza nucleare.

Non essendo mai le curve di frequenza dei volumi dei nuclei in attività riproduttiva, delle vere curve « normali » in senso statistico, qualsiasi calcolo statistico basato sulla normalità sarebbe destituito di valore e significato biologico. Bisogna sempre esaminare le deviazioni di queste curve tenendo presenti i fenomeni biologici che influiscono sulla curva studiata.

Riassumiamo schematicamente i risultati di queste misurazioni che sono rappresentate nel grafico annesso il quale indica in ascisse il tempo (stadi di sviluppo) ed in ordinate i valori delle mode delle curve di frequenza di ogni singolo stadio. I valori indicati in ordinata a destra rappresentano le medie aritmetiche dei valori modali di uno stesso « livello ».

(5) « Anat. Anz. », 1938–39, 87, 65.

A 10 giorni i girini hanno le cellule epatiche ancora piene di placchette vitelline. Il nucleo presenta un valore modale di 1590 (unità cubiche all'ingrandimento del disegno). A questo stadio vi sono parecchie mitosi. Le profasi di queste mitosi hanno un volume di 1930 (segnato nel grafico con un cerchietto con la croce).

A 14 giorni il volume modale è di 1150 con una seconda moda al valore 1590 eguale al valore dello stadio precedente.

Dai 29 agli 80 giorni tutti i girini presentano una sola moda all'incirca a 810; a 80 giorni circa si inizia la metamorfosi ed i nuclei presentano un valore modale oscillante tra i 520 e 560. Le curve di frequenza mostrano una leggera asimmetria verso i valori alti indicando una certa attività trofica dei nuclei. All'inizio della metamorfosi si verifica nuovamente la presenza di mitosi che mancavano totalmente nel periodo premetamorfico. I volumi delle profasi in queste mitosi sono di circa 1148 e cioè eguali ai volumi delle interfasi dello stadio a 14 giorni.

Allo stadio VII poco prima della fine della metamorfosi i nuclei raggiungono il volume minimo in questa serie di valori (circa 420) con una curva di frequenza unimodale e ben regolare.

Possiamo da questi dati constatare che dalla schiusa alla metamorfosi il nucleo della cellula epatica (la cellula pancreatica segue perfettamente gli stessi valori) diminuisce di volume passando da un volume approssimativamente di 1600 a 1200 ,800, 600, 400. Il volume massimo si trova al momento del differenziamento citologico dell'abbozzo epatico, quello metà durante tutta la premetamorfosi ed il minimo(¼) alla fine della metamorfosi quando l'organo raggiunge la maturità citofisiologica ed inizia la funzione biliare. Si verifica negli Anuri quindi lo stesso fenomeno che B. Schreiber e Angeletti hanno trovato nei Pesci. La differenza però tra i Pesci e gli Anfibi si manifesta in un altro fenomeno; tra gli stadi di dimezzamento del volume nucleare ora indicati, negli Anuri vi sono due stadi, uno a 14 giorni ed uno più lungo durante la metamorfosi in atto, nei quali il volume modale dei nuclei è intermedio tra i valori della serie di dimezzamento (1150 e 560) e a sua volta questi due valori sono uno la metà dell'altro. Il rapporto esatto tra i valori modali in generale non è facile a determinare trattandosi di risultati statistici. Ricerche cariometriche condotte su svariatissimi materiali condussero G. Hertwig e Brummelkamp[6] indipendentemente a considerare il valore del rapporto tra le classi di massima frequenza intermediarie (« Zwischenklassen ») quale 1,41 ossia il valore della radice quadrata di 2.

Altri Autori invece propendono per scegliere come più esatto il valore di 1,5 e tra questi Wermel e Portugalow[7] in base alle misurazioni delle tappe di accrescimento del volume nucleare delle cellule in cultura in vitro studiato cinematograficamente.

È evidente che l'esatta conoscenza di questo valore presenta un interesse interpretativo fondamentale.

(6) « Acta Neerl. Morph. », 1939, II, 177.
(7) « Z. Zellf. mikr. Anat. », 1935, 22, 132.

Ricerche successive di Paccagnella [8] hanno confermato questi fenomeni di diminuzione del volume nucleare durante lo sviluppo dell'Axolotl e così pure l'esistenza delle classi modali intermediarie, all'incirca 1,5 volte i valori della serie di dimezzamento.

Dobbiamo chiarire però che questo Autore ci attribuisce una interpretazione di questi fatti in termini cromosomici, che noi abbiamo soltanto ammessa con grande riserva. Il lavoro successivo di Painter e collaboratori, come vedremo in una Nota successiva rafforza tuttavia questa interpretazione in modo notevole.

Un altro particolare ci sembra necessario chiarire: la trasformazione delle curve di frequenza nel senso che abbiamo qui constatato (diminuzione del valore modale) può essere il risultato di due fenomeni nettamente distinti, e cioè: o la trasformazione effettiva dei nuclei di una categoria in quelli dell'altra, oppure la proliferazione in tempi successivi di due categorie differenti di nuclei preesistenti nel tessuto fin dall'inizio. Noi stessi avevamo nel lavoro del 1941 discusso questo che possiamo chiamare « effetto statistico » della trasformazione delle curve di frequenza. In una Nota successiva sui volumi nucleari delle cellule uterine, che si comportano in modo analogo a quello constatato durante lo sviluppo del fegato dei girini [9], sarà dimostrato in modo indubbio che questo effetto non esiste e che, almeno in questi casi, i nuclei effettivamente passano da un volume all'altro nelle fasi successive dello sviluppo.

Come nelle ricerche di B. Schreiber e Angeletti, sulla Carpa, dalle quali abbiamo preso lo spunto, anche nei girini le mitosi appariscono prevalentemente negli stadi immediatamente precedenti al passaggio da un volume maggiore a quello minore. Abbiamo voluto compiere qualche misurazione di volume nelle profasi in questi stadi pur ammettendo che l'esiguo numero di queste forme non permetterebbe una esatta valutazione statistica. In ogni caso i dati sono sufficientemente precisi ed abbiamo constatato che sempre le profasi hanno un volume di circa 1,5 volte il volume modale dello stadio in esame.

Come vedremo nella Nota successiva dove sarà discusso il problema teorico di questa riduzione del volume nucleare, il valore del rapporto tra queste classi modali di 1,5 volte il volume basico, ci è sembrato fondamentale per la comprensione della natura di questi fenomeni. Ciò che ci è sembrato imprescindibile per poter intraprendere uno studio interpretativo di questi fatti è la esatta conoscenza delle variazioni volumetriche del nucleo durante l'interfase. Senza conoscere cosa succede nel nucleo interfasico in questa tappa del suo accrescimento, intermedia durante la duplicazione, non possiamo interpretare nemmeno la natura dei rapporti tra i nuclei che differiscono tra i volumi modali di questo valore intermediario e apparentemente non seguono quindi perfettamente la classica legge dell'accrescimento «ritmico» per raddoppiamento del volume.

(8) « Atti R. Ist. Veneto », 1944-45. CIV, II, 433.

(9) « Mem. Inst. Butantan. », in corso di pubblicazione, 1947.

Biologia. — *Il nucleo intermedio e la regione pretettale del talamo in alcuni teleostei* (*). Nota di V. MAZZI, presentata (**) dal Corrisp. N. BECCARI.

Dopo le eccellenti descrizioni della regione pretettale del talamo date recentemente da Meader (1), da Kudo e Suzuki (2), e le revisioni critiche apparse nei trattati di Kappers, Huber e Crosby (3) e di Beccari (4), un ulteriore contributo potrebbe apparire superfluo. Per altro avendo potuto chiarire alcuni punti controversi e approfondire lo studio del poco noto nucleo intermedio, non mi sembra inopportuno rendere di pubblica ragione i risultati della mia indagine.

Il presente studio è stato condotto prevalentemente su alcune serie di encefali di *Gyristes salmoides* trattate con il metodo III di Cajal, e colorate con il cresilvioletto, per lo studio della topografia. Osservazioni collaterali sono state eseguite su serie, egualmente trattate, di *Gasterosteus aculeatus* e di *Gambusia holbrooki*. La scelta è caduta su queste tre specie perchè in esse la zona pretettale è particolarmente favorevole allo studio, ed anche in considerazione del fatto che *Gyristes* non è stato mai oggetto di approfondite indagini.

Si intende per « zona pretettale » quella regione dorso laterale del talamo, compresa fra il segmento interno e il tetto ottico e che si estende, rostro–caudalmente, dall'estremità caudale del corpo genicolato, fino, a un dipresso, ad un livello segnato dalla parte istmica della commessura posteriore. In essa si riconoscono i seguenti nuclei: n. pretettale, n. anteriore del talamo, n. corticale, n. intermedio (5).

NUCLEO PRETETTALE. – È stato riconosciuto da tutti gli autori che hanno studiato il talamo dei pesci. Però la denominazione di n. pretettale ha perso molto del suo valore, in quanto con essa molti ricercatori, come Catois (6), Goldstein (7), Holmgren (8), comprendono anche quella parte del talamo, più

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata della Università di Firenze.

(**) Nella seduta del 12 aprile 1947.

(1) « J. Comp. Neurol. », *60*, 361 (1934).

(2) « Psych. Neurol. Blad. », no. *3-4*, 1934, p. 466.

(3) *The comparative Anatomy of the nervous system of vertebrates including man.* The Macmillan Co. New York, 1936.

(4) *Neurologia Comparata anatomo funzionale dei Vertebrati, compreso l'uomo.* Sansoni Edizioni Scientifiche. Firenze, 1943.

(5) Nel corso della esposizione mi varrò delle seguenti abbreviazioni: c. = corpo; com. = commessura; f. = fascio; ff. = fasci; fs. = fascetto, fasciculus; fsi. = fascetti, fasciculi; n. = nucleo; nn. = nuclei; p. = parte; tr. = tractus.

(6) « Bull. Scent. de la France e de la Belgique », *36*, 1 (1901).

(7) « Arch. mikr. Anat. », *66*, 135 (1905).

(8) « Acta Zool. », *1*, 137 (1920).

dorsale e mediale, che corrisponde effettivamente al n. della commessura posteriore di Burr [9], o al n. tegmenti motorius dorsalis di Brickner [10] e di Shanklin [11].

In considerazione di ciò, e tenendo conto delle strette relazioni che il n. contrae con il c. genicolato, Meader include il n. pretettale nel suo complesso genicolato, e lo chiama c. geniculatum posterius, per distinguerlo dal c. genicolato laterale degli autori, a cui riserba il nome di geniculatum laterale ipsum.

Io ho preferito adottare la vecchia terminologia, con le limitazioni che risultano dalla descrizione che segue.

Come in *Holocentrus* (Meader) e in *Ophiocephalus* (Kudo e Suzuki), nelle specie da me prese in esame il nucleo pretettale si suddivide in tre parti, ventrale, laterale e dorsale, quest'ultima chiaramente differenziabile dal n. anteriore del talamo soltanto in *Gambusia*.

Parte ventrale (fig. 1, A, 11). – Corrisponde al c. geniculatus posterius, p. ventralis di Meader, al n. pretettale, p. mediale di Kudo e Suzuki, al n. intermedio di Goldstein, Holmgren, Bergquist [12], Miller [13]. Nelle tre specie esaminate è presente nella stessa posizione topografica e contrae eguali connessioni.

Ha la forma di un fuso, che compare a livello della estremità caudale del c. genicolato, e il cui asse maggiore è disposto parallelamente all'asse rostro–caudale dell'encefalo.

È compreso, nel suo terzo anteriore, nell'angolo formato dal p. dorsale e da quello marginale del nervo ottico, confinando con la p. laterale del n. pretettale dorsolateralmente, con il c. genicolato laterale ventrolateralmente; medialmente è investito dal ramo ventrale della com. intergenicolata. Nel suo terzo mediale il n. contrae rapporti più intimi con il n. intermedio, da cui è separato da un ramo dorsale della com. intergenicolata; tale rapporto è ancora più accentuato nel terzo caudale, che è ricoperto dorsalmente da un'espansione craniale del n. anteriore del talamo.

Questo nucleo è formato da una massa fibrocellulare di aspetto peculiare in preparati all'argento, che comprende poche cellule di media grandezza immerse in un neuropilo piuttosto lasso. Rappresenta un'importante stazione della com. intergenicolata, e contribuisce notevolmente al braccio del tetto ventrale.

Parte dorsale. – È ben evidente in *Gambusia* (fig. 1 B, 30), ove compare unitamente alla p. ventrale, compresa fra questa il n. intermedio, e la p. laterale. Da esso partono i due ff. genicolo–tettale posterosuperiore e posteroinferiore di Meader, e in esso termina un ramo dorsale della com. intergenicolata.

(9) « J. Comp. Neur. », *45*, 33 (1928).
(10) « J. Comp. Neur. », *47*, 225 (1929).
(11) « Phil. Trans. Roy. Soc. London », ser. B. no. 516, v. 224, p. 361 (1935).
(12) « Acta. Zool. », *13*, 57 (1932).
(13) « J. Comp. Neur. », *73*, 345 (1940).

Questa com. fu descritta da Holmgren in *Callionymus*, e da Charlton [14] nei pesci ciechi *Troglichtys rosee* e *Iyphlichthys eigenmanni*. Meader segnala in *Holocentrus* due com. intergenicolate, l'una dorsale e l'altra ventrale.

Fig. 1. Sezione trasverso del meso–diencefalo di: A. – *Gyristes salmoides;* × 41. B. – *Gambusia holbrooki;* × 76 (metodo Cajal).

1, radice dorsale del n. ottico; 2, f. genicolo–tettale posterosuperiore; 3, n. corticale; 4, f. cortico–intermedio; 5, f. intermedio–tettale e dorsale; 6, braccio dorsale del tetto; 7, n. pretettale, parte laterale; 8, f. istmo–tettale, p. tettale; 9, braccio ventrale del tetto; 10, n. pretettale, p. intermedia; 11, n. pretettale, p. ventrale; 12, com. trasversa; 13, f. marginale del n. ottico; 14, n. intermedio; 15, f. tetto–prerotondo; 16, cordone telencefalico laterale; 17, com. di Herrick; 18, f. intermedio eminenziale; 19, eminenza del talamo, p. laterale; 20, segmento interno; 21, f. retroflesso; 22, n. della com. posteriore; 23, f. tetto–talamico; 24, n. anteriore del talamo; 25, f. intermedio–tettale ventrale; 26, f. preottico–genicolo–ipotalamico. (?); 27, f. intermedio–tegmentale ventrale e fibre ansulate; 28, n. motore ventrale del tegmento; 29, cordone telencefalico mediale; 30, n. pretettale p. dorsale; 31, com. orizzontale; 32, com. suborizzontale; 33, com. postottica dorsale; 34, f. dal tetto al n. della com. posteriore; 35, f. dal tetto al n. motore ventrale del tegmento.

Io ne ho riconosciuta una sola, robusta e formata da fibre piuttosto esili. Essa si biforca in due rami, di cui il ventrale va alla p. ventrale nel n. pretettale; l'altro si suddivide a sua volta il due rami. Di questi uno si

(14) « J. Comp. Neur. », *57*, 285 (1933).

distribuisce al n. pretettale, p. laterale; l'altro (il più corsale e caudale) va, in *Gambusia*, alla p. dorsale del n. pretettale, mentre in *Gyristes* e *Gasterosteus* termina in una zona incerta della regione pretettale, che è rappresentata molto probabilmente da una espansione rostrale del n. anteriore del talamo. In quest'ultime due specie si riconosce un f. genicolo–tettale posterosuperiore ma non uno posteroinferiore.

In *Gyristes* inoltre è evidente, dorsalmente alla com. intergenicolata, la com. intergranularis tecti di Meader, che si identifica con la com. superficialis tecti di Charlton.

Parte laterale (fig. 1. A , B , 7) – Corrisponde al c. geniculatum posterius,, p. lateralis di Meader, al n. pretettale, p. laterale di Kudo e Suzuki, e, almeno parzialmente, al n. pretettale della maggioranza degli autori. In *Gasterosteus* e *Gyristes* dalla sua faccia mediale si differenzia una massa neuropilare densa e ricca di grosse cellule, che potrebbe, forse, corrispondere alla p. intermedia del n. pretettale di Kudo e Suzuki (fig. 1, A, 10).

La p. laterale appare contemporaneamente alla p. ventrale, dorsalmente alla estremità caudale del c. genicolato. Quasi del tutto ventrale nel suo terzo anteriore, si fa poi più interna, venendo ad esser compresa fra il n. anteriore del talamo e il n. corticale. Dorsalmente alla sua porzione caudale, corrono, descrivendo un arco a concavità ventrale, le fibre tetto–talamiche. Si esaurisce ad un livello di poco posteriore a quello segnato dal p. istmica della commessura posteriore. È formato da un neuropilo piuttosto denso – contenente cellule piccole, ed alcune grandi, dalla caratteristica forma triangolare – che si raccoglie in fsi. i quali, fuorusciti dalla faccia dorsale, si dirigono rostralmente, contribuendo al braccio del tetto dorsale. Altri fsi. fuoriescono ventralmente, e vanno ad ingrossare il braccio del tetto ventrale. Riceve uno dei due rami dorsali della com. intergenicolata.

Essendo questo n. assai noto, non ne ricordo le altre connessioni.

Nucleo anteriore del talamo (fig. 1, A, B, 24). – In queste specie, il n. anteriore del talamo è ben distinto dal n. rotondo, a cui è connesso da un robusto f. talamo–rotondo. Poichè ho già illustrati i caratteristici rapporti della sua p. craniale, non ho nulla da aggiungere a quanto è noto.

N. Corticale (fig. 1, A, 3). – Non ho nulla da aggiungere a quanto è già noto.

Nucleo intermedio (fig. 1, A, B, 8, 14). – Corrisponde all'omonimo nucleo di Brickner, di Kudo e Suzuky, e di Meader, e non al n. intermedio di Goldstein e della maggior parte degli autori che è piuttosto riportabile alla p. ventrale del n. pretettale [15].

(15) Quindi non è esatto Brickner quando afferma che il suo n. intermedio «... undoubtedly corresponds to Goldstein's nucleus intermedius».

Nelle specie in esame questo n. ha una notevole estensione rostro–caudale, e presenta, grosso modo, la forma di una L, inclinata dall'avanti all'indietro. Compare, un poco caudamente al n. pretettale, immerso nelle ultime diramazioni del ramo dorsale del nervo ottico. Medialmente ad esso decorrono le fibre tettali del nervo ottico, e, un poco più indietro, il f. tetto-prerotondo di Kudo [16]. Sempre nella sua p. anteriore il n. è fiancheggiato, dal suo lato esterno, dalla c. intergranulare del tetto, da prima, dal ramo dorsale della c. interganicolata, poi. Caudalmente il n. si fa ventrale rispetto al n. anteriore del talamo e al n. pretettale, avendo al disotto le fibre della com. trasversa, contro cui va lentamente scomparendo.

È composto da cellule di media grandezza, piuttosto numerose, immerse in un neunopilo alquanto denso.

Connessioni. – Di solito non mi è stato possibile stabilire il senso di conduzione dei ff.

1. F. intermedio–tettale (o tetto intermedio) dorsale (fig. 1, A, 5). – È formato dall'unione di tre fsi. che emergono dalla faccia dorsale e mediale del nucleo. Decorre ventralmente al f. genicolo tettale posterosuperiore; si distribuisce in parte allo strato fibroso interno del tetto, in parte si unisce alla radice dorsale dell'ottico. Corrispondente ai fsi. intermedio–tecti dorsales di Brickner, e al tr. intermedio–tectalis di Meader.

2. F. intermedio–tettale (o tetto–intermedio) ventrale. – È particolarmente interessante in considerazione delle relazioni che esso contrae con il f. istmo–tettale e con la p. istmica della c. posteriore, relazioni che variano leggermente da specie a specie.

In *Gyristes*, (fig. 1, A, 25), dall'estremità caudale del n. intermedio si diparte un robusto f. che tosto si suddivide in numerose radicole, alcune delle quali penetrano nello strato granuloso interno del tetto; le altre si raccolgono in due fsi. che, frammisti alle radicole tettali del f. istmo–tettale, e dorsali rispetto alla radice marginale dell'ottico e laterali alle fibre della c. trasversa, si dirigono caudalmente. Il più laterale dei fsi. tosto si distribuisce allo strato granuloso interno del tetto, l'altro invece si unisce al f. istmo–tettale, con il quale si accompagna fino al n. dell'istmo. Costituisce pertanto un f. intermedio–istmico, o istmo–intermedio, fin'ora non descritto.

Ho avuto modo di eseguire in *Gyristes* un'accurata analisi del f. istmo–tettale, che integra l'attento esame di Kudo in altri Teleostei. Il comportamento caudale del f. è simile a quello illustrato da Kudo in *Osphromenus*. Il f. giunge in prossimità del polo caudale del n. pretettale sotto forma di un cordone compatto, e cui si divide in due rami. Il primo si risolve tosto in numerose radicole (fig. 1, A, B, 8), che proseguono in direzione rostro–ventrale, e, attraversato il f. ottico marginale, e in parte frammischiandosi alle fibre del braccio del tetto ventrale, penetrano nel tetto, di cui formano, come già vide Kudo, la parte più marginale dello strato fibroso esterno. L'altro ramo, rappresentato da un fs. robusto di fibre sottili, si rivolge dorso–

(16) « Proc. Kon. Akad. v. Wetensh. te Amsterdam », *26*, 65 (1923).

medialmente, e in corrispondenza della faccia ventrale del polo caudale del n. pretettale, p. laterale, si suddivide in un componente che termina in questo n., ed in un altro che termina nel n. della com. posteriore, dopo esser passato fra la p. laterale del n. pretettale e il n. anteriore del talamo.

È con la p. pretettale del f. istmo–tettale che, secondo Kudo, contrarrebbe intimi rapporti la p. praetectalis, o p. istmica della com. posteriore. Secondo il succitato autore una parte almeno di queste fibre commessurali assumerebbe decorso caudale, e, associandosi al f. istmo–tettale, terminerebbe nel toro semicircolare, o, più verosimilmente, nel n. dell'istmo, che in tal modo verrebbe collegato al n. pretettale controlaterale. In *Gyristes* credo di poter escludere questa possibilità. Infatti la p. istmica della com. posteriore, ben riconoscibile nei miei preparati, parzialmente termina nella p. laterale del n. pretettale, in parte prosegue il suo cammino verso il basso, passando anteriormente alla p. pretettale del f. istmo–tettale, risolvendosi in fine in radicole che si seguono con difficoltà fino allo strato fibroso esterno del tetto.

In *Gasterosteus*, in cui il f. intermedio–istmico si segue con difficoltà, parrebbe più probabile che un componente della p. istmica della com. posteriore passasse nel f. istmo–tettale.

In *Gambusia*, infine, il comportamento del f. intermedio tettale ventrale (fig. 1, B, 25) si presta assai bene allo studio. Subito dopo l'emergenza dal n. il f. in parola si suddivide in tre rami. Di questi, uno si distribuisce allo strato reticolare del tetto; il secondo allo strato fibroso profondo; il terzo si fa discendente, e, continuando a contribuire allo strato fibroso profondo, si riduce ad un esile fs. che si perde, unendosi al f. istmo–tettale. In quanto alla p. isthmica della com. posteriore non son riuscito a stabilire se essa si distribuisca completamente allo strato fibroso esterno del tetto, ovvero se dia anche un componente al f. intermedio–istmico, con cui contrae rapporti assai stretti.

3. F. intermedio–tegmentale ventrale (Meader = fsi. ab intermedio in n. ventralem di Brickner) (fig. 1 A, B, 27) stabilisce una prominente connessione fra il n. intermedio e il n. motore ventrale del tegmento. Non è escluso che alcune fibre passino direttamente nel fs. descendens.

4. F. intermedio tegmentale–dorsale (Meader = fsi. ab intermedio in n. dorsalem di Brickner). Collega il n. intermedio con il n. della c. posteriore. Non è chiaro nei miei preparati.

5. F. intermedio–eminenziale (fig. 1, A, B, 18). – Un fascetto esile, ma ben riconoscibile, interconnette il n. intermedio con la parte laterale dell'eminenza. (Nuovo per la letteratura).

6. Fsi. ab intermedio in segmentum internum (Brickner). Sono rappresentati da poche fibre.

7. F. cortico–intermedio (Meader = fibrae cortico intermediae, Brickner) (fig. 1, A, 4). – È costituito da tre fsi. che interconnettono direttamente il n. intermedio con quello corticale, descrivendo un arco intorno alla faccia dorsale del n. pretettale, p. laterale, ed incrociando il f. genicolo–tettale posterosuperiore.

8. Com. di Herrick (fig. 1, A, B, 17). – In *Gyristes* la maggior parte delle sue fibre terminano o nascono nel n. intermedio. In *Gambusia* pare invece che molte fibre passino oltre, verso il tetto. In *Gasterosteus* infine la com. di Herrick non è chiara.

9. Fibrae ansulatae di Bellonci (fig. 1, A, B, 27) riconoscibili per il loro grosso calibro. In parte terminano nel n. intermedio, a cui giungono frammischiate alle fibre del f. intermedio–tegmentale ventrale; in parte proseguono fino alla p. laterale del n. pretettale.

10. È evidente in *Gambusia* e *Gasterosteus* un esile, ben impregnato fs. di fibre, che si unisce al ramo dorsale della com. intertettale ventrale di Meader (fibrae tectales nervi optici di Krause e di altri autori). (Nuovo per la letteratura).

11. Connessioni brevi. È osservabile uno scambio di fibre fra il n. intermedio, le tre parti del n. pretettale e il n. anteriore del talamo. Fibre o collaterali della com. trasversa parrebbero terminare nel nucleo.

12. F. ottico–intermedio. Brikner ritiene probabile che fibre del ramo marginale dell'ottico penetrino nel n. insieme a quelle del f. tetto–intermedio ventrale. Meader disegna un f. ottico intermedio. Io ho visto numerose fibre dipartirsi dalla faccia ventrale della porzione craniale del n. e portarsi nel ramo marginale dell'ottico, ma non ne ho potuto accertare l'ulteriore corso.

In considerazione delle suddescritte connessioni, sono portato a condividere l'opinione di Brickner, che considera il nucleo intermedio come: « . . . in parte, un intermediario fra l'apparato visivo e centri che proiettano impressioni al bulbo ».

Biologia. — *I problemi della determinazione istogenetica e del differenziamento dei neuroni inquadrati nel campo della embriologia sperimentale* (*). Nota di A. Stefanelli, presentata (**) dal Corrisp. G. Cotronei.

Dopo una numerosa serie di indagini sperimentali sullo sviluppo del sistema nervoso centrale e sul differenziamento di alcuni peculiari neuroni della rana, da me iniziate nel 1942 e tuttora in corso, anche coadiuvato da interni dell'Istituto, ritengo opportuno fare una messa a punto dei risultati sin ora raggiunti riferendomi ai concetti già conseguiti dalla embriologia sperimentale, per chiarire quanto è estensione di questi e quanto va oltre agli stadi considerati in un nuovo campo di indagine. I risultati di queste ricerche sono stati annunciati in diverse Note preventive (1) e in parte docu-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata « G. B. Grassi » della Università di Roma.

(**) Nella seduta del 12 aprile 1947.

(1) « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », vol. XX, 1945. Nota I, II, III; « Acta Pont. Acc. Sci. », 1945, vol. VIII; « Historia Naturalis », anno I, n. 4 (1946).

mentati in una Memoria attualmente in corso di stampa a cura di questa Accademia [2]. Altre Note mie, di Rossetti e di Forti [3] sono seguìte per far conoscere i nuovi risultati conseguiti col metodo degli espianti.

Il problema principale di queste ricerche è stato quello di mettere in luce sperimentalmente quali siano i fattori causali estrinseci e quali i fattori intrinseci che portano un neuroblasta a divenire non solo una cellula nervosa differenziata con gli attributi caratteristici di questa (le poche ricerche fatte sulla neurofibrillazione si limitano proprio a questo punto), ma una cellula nervosa di un caratteristico tipo morfologico e funzionale; cioè in altre parole quello di indagare i processi della *determinazione istogenetica* e del differenziamento specifico e funzionale dei neuroni. Il differenziamento specifico dei neuroni non si esaurisce nella produzione delle neurofibrille, della sostanza cromofila e nella proprietà di filatura dei prolungamenti, per citare solo le caratteristiche morfologiche più salienti, ma si estende alla estrinsecazione di quella forma e grandezza cellulare caratteristiche e alla filatura di un certo numero determinato di prolungamenti con forma, estensione e direzione caratteristiche, poichè è ben noto come i neuroni possano differire anche assai profondamente in relazione alle condizioni morfologiche e funzionali assai diverse.

Il metodo usato da me in questa indagine sperimentale è stato quello dell'isolamento dei neuroblasti o delle cellule presuntive in diversi stadi dello sviluppo, operando dallo stadio di gastrula a tappo vitellino grande (secondo solco falciforme) a quello di bottone codale. L'isolamento è stato attuato con trapianti di frammenti neurali più o meno circoscritti in cavità di un embrione ospite (cavità celomatica, cavità ependimale) facendo così delle vere culture *in vivo*, con resezioni del neurasse a varie altezze, con l'asportazione di territori circumvicini e abbozzi di organi di senso, con espianti in soluzione fisiologica. Sono stati anche assai dimostrativi i trapianti in nuova sede del neurasse, facendo così intervenire nuovi fattori ambientali, e quelli nella stessa sede, ma facendo ruotare il frammento in vario modo.

In questa prima serie di ricerche mi sono limitato allo studio della determinazione e del differenziamento del neurone mauthneriano della rana poichè tale neurone ha un differenziamento assai precoce che lo fa distinguere rapidamente dagli altri circumvicini, ha una sede presuntiva facilmente identificabile, dopo un po' di pratica, anche con notevole precisione, e, non ultima cosa importante in questo genere di ricerche, acquisisce dei caratteri morfologici così peculiari da renderlo non solo distinguibile da tutte le altre cellule nervose dell'animale ma anche di facile studio nelle sue alterazioni strutturali.

(2) *I fenomeni della determinazione, della regolazione e del differenziamento del sistema nervoso. La determinazione istogenetica e il differenziamento della cellula nervosa studiata sperimentalmente in riferimento alla cellula di Mauthner degli anfibi.*

(3) ALBERTO STEFANELLI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 1946; L. FORTI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 1946; F. ROSSETTI, « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », 1946.

Nelle ricerche di embriologia sperimentale la gran maggioranza degli autori, che pur hanno fatto assurgere questa branca della biologia a una importanza di primissimo piano, si è limitata ad uno studio citologico basato su preparati colorati con i consueti metodi istologici di colorazione doppia; in una ricerca come quella da me intrapresa di istogenesi sperimentale del tessuto nervoso è stata condizione essenziale l'applicazione di un metodo specifico di impregnazione neurofibrillare.

La difficoltà tecnica di una estensione delle ricerche di embriologia sperimentale nel campo istogenetico stava proprio nella refrattarietà degli Anfibi ai metodi argentici di Cajal. Il laborioso e assai lungo metodo escogitato da Szepsenwol non dà dei risultati che valgano la lunga pena del loro allestimento. Gli ottimi preparati da me ottenuti su tale materiale applicando il metodo argentico colloidale di Bodian, che impregna sin dai primissimi stadi della neurofibrillazione, mi hanno concesso di dedicarmi a queste ricerche permettendomi così di associare la tecnica embriologica e quella istologica secondo quei criteri e quei metodi, che, adottati da Ruffini, furono così fecondi, e di raggiungere dei risultati atti ad illuminare quei problemi di carattere generale che sono stati lo scopo delle mie ricerdhe.

I risultati da me ottenuti con questo metodo sulla determinazione istogenetica nervosa e il differenziamento citologico mi inducono a fare un opportuno raffronto con quelli ottenuti dagli embriologi sperimentali sulla determinazione e il differenziamento morfogenetici.

Riassumo brevemente i fatti essenziali sulla determinazione istogenetica del neurone di Mauthner come si sono rivelati con le esperienze di cultura *in vivo*, confermati poi con gli espianti:

1° Allo stadio di gastrula a tappo vitellino grande si ottiene: regolazione del frammento in forma di corto tubo nervoso in cui le cellule si differenziano come cellule nervose di aspetto pressochè simile con neurofibrille e moderata filatura di prolungamenti, con un carattere cioè generale. Non si distingue alcuna cellula con aspetto mauthneriano. La cellula di Mauthner si differenzia invece in sede del donatore il cui encefalo si è completamente regolato.

2° Allo stadio di tappo vitellino piccolo o appena introflesso si ha uno sviluppo del frammento a vescicola con tendenza, se il materiale è sufficente, ad assumere una struttura morfologica somigliante a quella dell'allungato. Le cellule si differenziano quali cellule nervose, tra cui si distingue, sebbene alterata nella forma, la grossa cellula di Mauthner. In alcuni casi si nota anche nella sede del donatore, completamente riparata, una seconda cellula con aspetto mauthneriano che evidentemente è stata determinata successivamente alla operazione.

3° Agli stadi di cercini midollari sollevati, di doccia e di tubo midollare chiuso (bottone codale) si nota sempre il differenziamento della cellula di Mauthner, più o meno alterata nella forma, nel trapianto, mentre non si osserva più nella sede del donatore sebbene risulti ancora notevolmente riparata.

Da questo esito delle esperienze ho potuto dedurre che il periodo di determinazione istogenetica della cellula di Mauthner si svolge sino alla fine della gastrulazione, poichè ancora a questo stadio, asportando la zona, si ha non solo una riparazione regolativa morfogenetica ma viene determinata e si differenzia una nuova cellula di Mauthner. La determinazione istogenetica risulta altresì di una certa durata poichè in alcune operazioni allo stadio di tappo vitellino appena retratto vengono determinate una cellula in sede ed una nel trapianto o nell'espianto. Da questi dati di fatto si desume che nella neurogenesi i processi di determinazione morfogenetica legati all'azione dell'organizzatore e quelli della determinazione istogenetica non sono coincidenti, ma come i secondi si estendano sino a stadi alquanto più avanzati. Sono assai istruttive a questo riguardo le recenti ricerche di Barth (1941) e di Holtfreter (1944) sulla differenziazione morfologica neurale (non del differenziamento istologico) che è stata ottenuta anche in espianti di gastrule precosissime quando ancora non era entrato in giuoco l'organizzatore primario.

L'esame istologico con metodo specifico da me fatto sui frammenti isolati in gastrule a tappo vitellino grande dimostrano come sia già attuata la determinazione istogenetica ma *solo sino a un certo punto*, poichè le cellule che compongono questi frammenti sono cellule nervose, con neurofibrille e prolungamenti, ma non hanno caratteri differenziativi particolari risultando tutte di aspetto pressochè simile. Sarebbe interessante sapere il grado di differenziamento istologico degli espianti di Barth e di Holtfreter studiati con tecnica adeguata, ma c'è ragione di credere che non debba essere superiore a quello da me ottenuto con gli espianti allo stadio di tappo vitellino grande.

Avendo così potuto con queste esperienze limitare sino ad un certo grado il differenziamento delle cellule nervose di un frammento che lasciato nel suo ambiente avrebbe raggiunto un differenziamento ben più elevato e specifico, ho dedotto che la determinazione istogenetica si debba scindere almeno in due fasi, una che si attua più precocemente ed una più tardivamente. Il limite tra queste due fasi per il neurone di Mauthner è verso la fine della gastrulazione, ma tutto lascia ritenere che esso possa essere anticipato o tardato per altri neuroni. Ho chiamate queste due fasi di determinazione *determinazione istogenetica generale* quella che porta le cellule del frammento neurale ad assumere l'aspetto di cellule nervose con gli attributi specifici comuni a tutte le cellule nervose (neurofibrille, tigroide, prolungamenti) e di *determinazione istogenetica particolare* quella che porta le varie cellule nervose ad assumere le caratteristiche strutturali particolari.

I termini *generali* e *particolare* sono vecchi termini che sono stati usati anche in embriologia per indicare la limitazione di potenze che da una condizione più « generale » si riducono ad una condizione più « particolare ». Sono termini usati da Lillie nella esposizione dei suoi concetti sulla « segregazione embrionale » secondo una « dicotomia differenziale », basandosi sui risultati che la Hoadley ha ottenuti con ricerche di trapianto di frammenti

embrionali di pollo in allanto-corio. Comunque, una cosa è esporre con dei termini dei concetti teorici generali e una cosa è l'impiego di questi termini a indicare definiti processi dello sviluppo così come sono stati da me concretati prendendo come riferimento un caso peculiare di determinazione istogenetica, quale è quello del neurone mauthneriano.

Un altro punto che deve essere chiarito si riferisce alle relazioni della determinazione istogenetica con l'attività dell'organizzatore. Rientra la determinazione istogenetica nella azione generale determinante dell'organizzatore primario ? Che relazioni esistono tra la determinazione istogenetica nervosa e la determinazione morfogenetica neurale, e in che rapporti stanno con le fasi della induzione ?

Si ritiene oggi, in seguito alle ricerche di Needham, Waddinghton, e molti altri autori, che l'attività di azione del fenomeno induttivo del sistema assiale dell'embrione di cui è parte il tubo neurale si debba scindere in due fasi, una iniziale evocatrice che, secondo l'espressione di Needham (*Biochemistry and Morphogenesis*, 1942), modifica il destino istologico della zona, ed una susseguente, individuatrice, che fa assumere all'insieme di queste cellule una organizzazione morfogenetica regionale e in cui intervengono forze di campo [4].

L'evocazione è oggi considerata, secondo le ben note ricerche di Needham, di Fischer e dei loro collaboratori, quale stimolo chimico (di natura non ancora definita ma in rapporto, sembra, a processi di denaturazione delle proteine [5]), mentre l'individuazione è messa in relazione alla natura delle cellule stimolate cioè al loro stato di raeattività o, usando un termine introdotto da Waddington, alla loro « competenza ». Nel concetto di competenza, secondo Needham, sono contenuti la « capacità di reazione » e la « determinazione labile » di Spemann (la determinazione labile indica la capacità di autodifferenziamento *sino ad un certo punto* in una data direzione anche senza stimolo ulteriore; se questo agisce si ha la « doppia assicurazione »). Le forze regionali o di campo che intervengono in questa seconda fase sono di natura complessa e agiscono sul risultato finale della differenziazione dell'indotto. Esse sono secondo Cotronei, che ha assai bene sintetizzato il concetto di «campo », « . . . le influenze che agiscono in una zona in via di sviluppo: influenze chimiche, fisiche, biologiche che giungono dalle parti che per la loro distanza e per i loro rapporti possono manifestare una qualsiasi azione efficiente e che agiscono in ultima analisi sulle potenze embrionali contenute nella parte indotta [6] ».

Per riferirci al sistema nervoso che quì ci interessa, l'evocazione è « . . . lo stimolo alla neuralizzazione sull'ectoblasto competente dell'ospite » (Needham, loc. cit.) cioè nelle primissime fasi della gastrulazione e quindi in

(4) Il concetto di « campo » è già espresso da SPEMANN nel 1921.

(5) Anche le note ricerche di GILCHRIST col calore, come le recentissime di HOLTFRETER con le soluzioni saline, possono essere così interpretate.

(6) *Biologia e Zoologia generale*, 1938. Vedi anche la relazione al congresso romano di Anatomia del 1934 (nel *Monitore Zoologico*).

uno stadio alquanto anteriore rispetto a quelli considerati nelle mie ricerche. « Il suo effetto istologico – dice sempre il Needham – deve essere ancora delucidato con assoluta chiarezza ». In altre parole la estrinsecazione differenziativa della determinazione labile provocata dalla evocazione non è ancora ben nota.

L'individuazione è il processo che fabbrica il tessuto neurale costituito in un sistema che si distingue in una parte cefalica ed una codale in cui si estrinsecano le azioni di campo su riferite; le cellule subiscono un ulteriore stimolo che determina in loro una potenzialità (doppiamente assicurata) che si può estrinsecare anche con un processo di autodifferenziamento. Ma anche il grado di differenziamento raggiunto con questa ulteriore azione non è chiaramente dimostrata. « Quando l'autodifferenziamento ha dato tutto quello che può dare – dice sempre il Needham – segue la fase di differenziamento funzionale e l'attività ormonale e i fattori neurali compiono una reintegrazione (Weiss) dell'organismo ». Quale è il limite tra differenziamento per autodifferenziamento e differenziamento funzionale ? Nessun autore si è posto sin ora il problema ne ha tentato di chiarirlo per via sperimentale. (È quì opportuno far presente che gli autori danno un diverso significato al termine « differenziamento funzionale » essendo per alcuni (tra cui il Needham) il differenziamento specifico che permette la funzione e per altri quell'insieme di modificazioni strutturali dell'elemento già differenziato che si attua solo con la funzionalità). Credo interessante anche riferire quanto il Needham aggiunge: « Sul differenziamento funzionale poco sarà detto. . . perchè noi siamo completamente ignoranti dei suoi aspetti biochimici; è assolutamente necessaria una buona monografia sul differenziamento funzionale »; e cita come unica fonte di un certo interesse la breve rassegna di Mashkovezev (1934).

Ho voluto quì riportare integralmente diverse considerazioni del Needham, certamente uno dei più competenti in questo campo, per dimostrare anche con i giudizi di un eminente studioso l'opportunità delle ricerche che io avevo intrapreso quando ancora non ero in grado di prendere visione di questo suo libro.

I concetti sull'azione induttrice che ho sinteticamente esposti mettono in chiara luce come i fenomeni della determinazione istogenetica generale e particolare dei neuroni, quali ho potuto rivelare con le mie esperienze, non si esauriscono con i fenomeni di evocazione e di individuazione che si attuano nella gastrula precocissima, ma si estendono sino alla fine del processo di gastrulazione quando l'azione induttrice primaria è già esaurita.

La prima fase delle determinazione istogenetica nervosa, cioè quella della determinazione istogenetica generale che attribuisce alla cellula i caratteri comuni delle cellule nervose, appare nelle mie esperienze già allo stadio di tappo vitellino grande, ma probabilmente come lasciano pensare i recenti lavori di Barth e di Holtfreter, che debbono però essere riveduti con metodi istologici specifici, è più precoce. Coincide col periodo di induzione primaria ?

Con la sua fase di individuazione ? Già Needham quando parla della evocazione afferma non essere ancora chiaro a che grado di differenziamento porti questo processo. È solo con lo studio istologico con mezzi tecnici adeguati di espianti fatti in tempi più precoci di quelli sin ora da me fatti che si potrà avere una risposta.

La seconda fase della determinazione istogenetica nervosa, quella della determinazione istogenetica particolare, che attribuisce alle varie cellule nervose i caratteri differenziativi particolari, si attua in un tempo più tardivo che, per i neuroni di Mauthner degli Anfibi, tra i primi a differenziarsi, è verso la fine della gastrulazione. È solo a questo stadio che una coppia di neuroblasti, già determinati come tali nella fase precedente, acquisiscono potenzialmente il futuro differenziamento particolare delle cellule di Mauthner. È bene quì specificare i neuroni poichè già da queste mie ricerche appare come il limite della determinazione particolare possa variare un poco per diversi neuroni.

La determinazione istogenetica nervosa si estende quindi oltre agli stadî delle azioni evocatrice ed individuatrice e si attua nelle particolari sedi che la morfogenesi, determinata con quei processi, è venuta formando. Va così esteso il concetto regionale o di « campo » oltre ai campi più circoscritti delle induzioni secondarie, terziarie ecc. sino al concetto di *sede istologica* nei fenomeni della determinazione istogenetica nervosa.

Con la determinazione istogenetica particolare che acquisiscono nelle varie sedi, i vari neuroblasti acquistano intrinsecamente la potenzialità particolare che li porta alla estrinsecazione di caratteri morfologici particolari. Ma durante questo processo del differenziamento si aggiungono altri fattori estrinseci che si sommano alla potenzialità acquisita portando la cellula al suo aspetto definitivo: la condizione del substrano della sede, sia da un punto di vista fisico che chimico, i fattori tropici di varia natura sull'accrescimento dei prolungamenti (numero lunghezza e direzione) quali quelli tigmo, chemio e neuro–tropici, i fattori di accrescimento somatico e quindi i fattori funzionali estrinseci (derivanti cioè dalla funzionalità degli altri organi e tessuti dell'organismo) umorali e nervosi, ed intrinseci, cioè dipendenti dalla propria attività funzionale.

Di questi fattori causali del differenziamento specifico particolare ho ampiamente discusso nella mia Memoria citata, in corso di stampa, e non ritengo per il momento necessario riprendere l'argomento.

Biologia (Medicina). — *Le variazioni del tasso ematico di acido piruvico nella febbre* (*). Nota di E. Bonetti e L. Scapellato, presentata (**) dal Corrisp. G. Vernoni.

L'esaltamento delle attività biochimiche che sta alla base del processo febbrile, ha una delle sue più importanti sedi nei muscoli. I quali, essendo rilasciati, si trovano in condizioni di *deficit* circolatorio così da non poter eliminare l'eccesso di calore prodotto dall'esaltato metabolismo (Vernoni (1)). Ne consegue un ristagno del supercalore prodotto che in condizioni fisiologiche di attività muscolare, accompagnate da adeguata funzionalità circolatoria, viene agevolmente eliminato.

Questo aumento del metabolismo muscolare porta l'attenzione sugli idrati di carbonio che sono alla base della contrazione muscolare. La letteratura in proposito è ricca di osservazioni sulle variazioni quantitative degli idrati di carbonio come tali, ma scarsa di dati sui composti intermedi di trasformazione, nè permette di stabilire se tutte le fasi della demolizione degli idrati di carbonio sono ugualmente modificate.

Antiche e ben note ricerche riportano che il glicogeno epatico diminuisce fortemente negli animali febbricitanti rispetto ai controlli e che nella febbre si ha quasi sempre iperglicemia (numerosi autori citati in Richter (2)). Più recenti ricerche in parte confermano questi risultati (Cahn e Houget (3)). Gli stessi autori in muscoli di cani resi ipertermici col dinitrofenolo hanno dimostrato lieve aumento di ac. lattico nel muscolo che corrisponde solo ad una frazione del glicogeno muscolare che scompare in misura rilevante (Cahn (4)); in cani sottoposti a lavoro hanno osservato uguale caduta del glicogeno muscolare ed epatico, e nel muscolo valori più bassi di ac. lattico dopo il lavoro, tanto che pensano ad una ossidazioue dell'acido lattico (Cahn e Houget (5)).

Ricerche più recènti di Malaguzzi–Valeri (6), dimostrano che il muscolo nell'animale febbricitante produce più acido lattico e assorbe maggior quantità di fosforo, il che dimostrerebbe una maggiore attività glicolitica nella febbre.

L'acido lattico però non è un composto intermedio di costante dimostrazione nel ricambio degli idrati di carbonio. La sua comparsa, come è

(*) Dal Centro di studio per la fisiopatologia del C. N. R. presso l'Istituto di patologia generale di Roma.

(**) Nella seduta dell'8 febbraio 1947.

(1) G. Vernoni, « Lo Sperimentale », *94*, 1 (1940).

(2) P. F. Richter in Oppenheimer, *Hdb. d. Bioch.*, II ed., vol. 7, p. 544 (1927).

(3) Th. Cahn et H. Houget, « C. R. Soc. de Biol. », *113*, 587 (1933).

(4) Th. Cahn, « C. R. Soc. de Biol. », *113*, 39 (1933).

(5) Th. Cahn et J. Houget, « C. R. Soc. de Biol. », *113*, 1132 (1933).

(6) C. Malaguzzi–Valeri, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », *14*, 125 (1939).

noto, è in dipendenza delle condizioni di ossigenazione nelle quali avviene l'ulteriore trasformazione dell'acido piruvico, che è invece il composto intermedio centrale del metabolismo dei glicidi. Anche se ad acido piruvico giungono le trasformazioni demolitive dei grassi e delle proteine, tuttavia praticamente l'acido piruvico può essere quantitativamente considerato come il rappresentante dei prodotti terminali della prima fase di trasformazione degli idrati di carbonio, che sono quelli che principalmente contribuiscono a formarlo.

Le ricerche di Johnson e Edwards [7] in individui sottoposti a grave esercizio fisico hanno dimostrato che si ha un innalzamento del tasso di acido piruvico e lattico nel sangue che, anche nel ritorno alla norma, seguono un andamento parallelo. Bollman, Flock [8] per stabilire se la sede di questa elevata produzione di acido piruvico era il muscolo, hanno titolato direttamente l'acido piruvico nel muscolo sottoposto ad una serie di contrazioni ed hanno seguìto l'andamento del ritorno alla norma delle variazioni riscontrate. La quantità di acido piruvico nel muscolo risulta aumentata a 4–6 mg per 100 g di muscolo sopra il valore normale di 1,5 mg.

Altre ricerche che mettono strettamente in rapporto l'attività muscolare contrattile col tasso di acido piruvico del sangue, sono quelle del Lu [9].

L'importanza del muscolo nella genesi della febbre e quella degli idrati di carbonio nel metabolismo del muscolo, le constatate variazioni dell'acido piruvico durante la contrazione muscolare, e la considerazione che l'acido piruvico è il prodotto terminale costante di una precisa fase di trasformazione degli idrati di carbonio, hanno condotto a queste ricerche.

Metodi e tecnica di ricerca. – Individui d'ambo i sessi e di varia età, ricoverati nell'Istituto di clinica medica per varie affezioni e sottoposti a piretoterapia, sono stati i soggetti di ricerca. Nessuno di essi era diabetico, nè presentava note di deficienza di vitamina B_1. In tutti i soggetti per alcuni giorni precedenti quello dell'attacco febbrile, veniva prelevato il sangue a digiuno e ricercato l'acido piruvico. La sostanza piretogena (lisato di tifo secondo Di Cristina–Caronia, o vaccino antimelitense o piretamina) veniva iniettata endovena dopo il prelievo di sangue normale. I pazienti erano digiuni dalla sera prima e gran parte di essi manteneva il digiuno fino all'inizio della defervescenza. La durata dell'attacco febbrile era di 10–15 h; durante l'attacco febbrile il prelievo del sangue veniva effettuato all'acme o se vi era *plateau*, nell'ora che l'esperienza della sostanza piretogena ci insegnava essere intermedia. Nessuno dei soggetti aveva brivido; alcuni pochi nausea, cefalea e senso di repugnanza per il cibo, disturbi che scomparivano alla defervescenza. La titolazione dell'acido piruvico veniva continuata

(7) R. E. Johnson and H. T. Edwards, « J. Biol. Chem. », *118*, 427 (1937).
(8) L. J. Bollman and E. V. Flock, « J. Biol. Chem. », *130*, 565 (1939).
(9) G. D. Lu, « Bioch. J. », *33*, 774 (1939).

per più giorni dopo quello della piretoterapia, a soggetto a digiuno nel mattino.

L'acido piruvico è stato determinato con il metodo colorimetrico di Lu [10], modificato da Bueding e Wortis [11], e più recentemente descritto da Long [12] usando fotometro Leifo, filtro 510. Per la curva *standard* si è usato acido piruvico purificato per bidistillazione e titolato quantitativamente con il metodo manometrico di Krebs riportato da Long.

Le sostanze secondo lo stesso Long, che possono intervenire nella reazione con la 2,4 difenilidrazina, possono essere tutti gli altri α–chetoacidi presenti nel sangue oltre il piruvico. Le ricerche di Johnson e Edwards (loc. cit.) allontanano il dubbio che altre sostanze intervengano nella titolazione con questo metodo, perchè gli autori hanno isolato l'acido piruvico in quantità comparabili con quelle messe in evidenza col metodo colorimetrico, dal sangue e dalle urine (v. anche Bollman e Flock, loc. cit.)

In vari soggetti normali tenuti fermi in letto si è ricercato il comportamento dell'acido piruvico con prelievi di sangue nelle varie ore della giornata, a digiuno o a vitto normale, per escludere che eventuali variazioni del tasso di acido piruvico riscontrate durante la febbre, avvenissero normalmente nella giornata a seconda dei momenti fisiologici. I soggetti esaminati non hanno presentato scostamenti dai valori normali.

In alcuni soggetti, possibilmente gli stessi in precedenza sottoposti a piretoterapia, si è praticato in una seconda e terza serie di esperimenti un intenso trattamento con vitamine C e B_1 per le ragioni e con le modalità che verranno in seguito specificate.

I valori normali di acido piruvico in 38 determinazioni prima della piretoterapia, dànno un valore di γ 9,8 per cc. di sangue corrispondente a quello riportato dalla letteratura (v. Euler e coll.) [13].

Risultati delle ricerche. a) *Valori di acido piruvico in soggetti sottoposti a piretoterapia.* – In alcuni individui, l'attacco febbrile è stato ripetuto più volte. La tabella I e la figura 1, dimostrano un rilevante innalzamento dell'acido piruvico durante l'attacco febbrile. La media di 17 determinazioni dà un valore di acido piruvico pari al doppio del valore normale raggiungendo γ 20,1 per cc. Tale aumento non si estingue alla fine della piressia, ma continua in apiressia fino al mattino seguente (v. fig. 1, II giornata), anche se gli eventuali rialzi termici erano stati di pochi decimi di grado. Il valore medio alla seconda giornata è di γ 15/cc. I valori della III, IV, V giornata non presentano variazioni degne di nota fra loro; la media complessiva è di γ 9,8/cc.

(10) G. D. Lu, « Bioch. J. », *33*, 241 (1939).

(11) E. Bueding and H. Wortis, « J. Biol. Chem. », *133*, 585 (1940).

(12) G. Long, « Bioch. J. », *36*, 807 (1942).

(13) H. v. Euler, F. Schlenk und B. Högberg (da « Ber. ueber die gesamte Physiologie », *118*, 119 (1940).

b) *Valori di acido piruvico in soggetti pretrattati con vitamina C e poi sottoposti a piretoterapia.* – Alcuni dei soggetti esaminati in questo gruppo avevano già subìto piretoterapia prima del trattamento con vitamina C. Un soggetto era stato sottoposto a trattamento per venti giorni con g 0,06

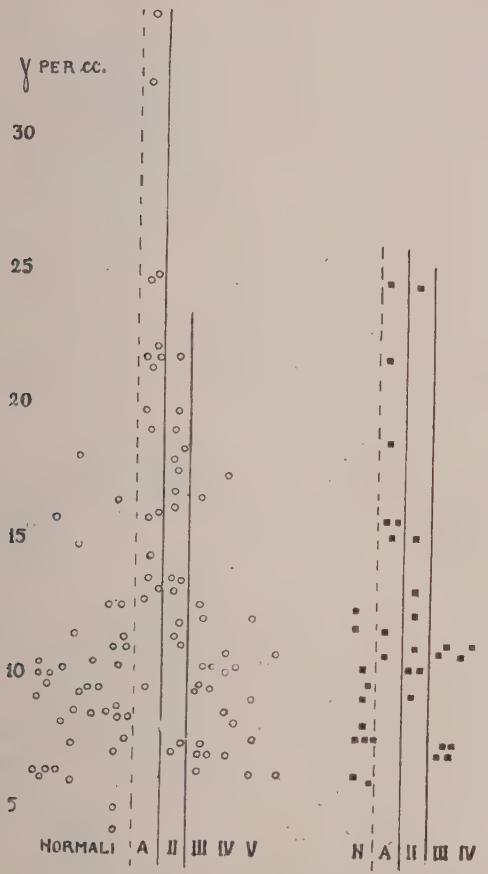


Fig. 1. – Valori di acido piruvico (γ/cc di sangue) prima durante e dopo l'attacco febbrile in individui non trattati (○) e in quelli trattati con acido ascorbico (■).

Nelle colonne contrassegnate N, A, II, III, IV ecc. sono distribuiti i valori di acido piruvico di soggetti normali esaminati prima dell'attacco febbrile, all'acme, e nella II, III, IV ecc. giornata dalla piretoterapia.

di vitamina C *pro die*. In un altro si praticò iniezione endovenosa di g 0,50 di acido ascorbico subito dopo l'introduzione della sostanza piretogena. Agli altri si sono somministrati endovena per 3 giorni g 0,50 di vitamina C unitamente, in alcuni, a g 0,20 della stessa sostanza per via intramuscolare e per via orale. Al terzo giorno si produceva l'attacco febbrile.

TABELLA I.

Valori di acido piruvico di soggetti normali, cioè non pretrattati, sottoposti a piretoterapia.

N°	Età; sesso; peso	Malattia	Sostanza piretogena	Temperatura all'acme	Valori di acido piruvico γ/cc di sangue						
					prima della piretoterapia	all'acme	nei giorni seguenti				
							II	III	IV	V	
72	a. 42; f.; Kg. 64	sclerosi in placche	Piretamina	38°,5	8,8	22,–	18,2	9,8	17,6	6,5	
			lisato di tifo	39°,–	9,–	21,6	19,3	12,8	8,8	12,3	6,–
			id. id.	38°,4	12,8	9,7	16,4	6,6	—	—	—
			id. id.	39°,–	8,6	13,–	13,3	—	—	—	
60	a. 39; m.; Kg. 56	asma bronchiale	id. id.	39°,–	11,2	16,1	17,–	16,8	10,3	9,3	11,-
54	a. 57; m.; Kg. 74	melitense	vaccino antimelitense	39°,9	11,6	24,8	11,6	—	—	—	
126	a. 38; f.; Kg. 67	sclerosi in placche	lisato di tifo	39°,5	12,8	20,–	7,3	—	—		
83	a. 49; f.; Kg. 51	melitense	vaccino antimelitense	40°,5	8,6	32,2	17,8	7,6	7,2		
			id. id.	40°,8	—	19,3	11,3	7,3			
36	a. ?; m.; Kg. ?	melitense	id. id.	40°,3	—	14,6	—	10,5			
			id. id.	40°,3	11,2	16,2	18,6	—			
83 bis	a. 20; f.; Kg. 66	asma bronchiale	lisato di tifo	40°,1	10,5	35,–	13,7	—			
66	a. 30; m.; Kg. 51	id. id.	id. id.	39°,2	16,7	22,4	20,–	9,7	11,–		
				39°,4	5,2	13,4	12,1	12,3			
43	a. 60; m.; Kg. 52	id. id.	id. id.	39°,5	7,3	13,8	13,8	9,6	10,5		
57	a. 40; m.; Kg. 48	id. id.	id. id.	39°,8	4,4	22,–	22,–	7,3	8,4		
108	a. 36; f.; Kg. 53	id. id.	id. id.	39°,5	7,8	25,–	7,6	10,5	—		
Media					9,8	20,1	15,–	9,9			

Tabella II.

Valori di acido piruvico in soggetti sottoposti a piretoterapia previo trattamento con acido ascorbico nelle quantità e modalità indicate.

Alcuni dei soggetti avevano già subìto piretoterapia in condizioni normali (v. tabella I).

N°	Età, sesso, peso	Malattia	Sostanza piretogena	Temperatura all'acme	Valori di acido piruvico (γ/cc di sangue)					Acido ascorbico somministrato
					prima della piretoterapia	all'acme	nei giorni seguenti			
							II	III	IV	
26	a. 43; m.; Kg. 53	melitense	vaccino antimel.	40°,6	8,4	11,9	10,5	11,1	—	mg 60 al giorno nei 21 giorni precedenti.
			id. id.	39°,5	9,4	11,–	10,5	—	—	
83	a. 49; f.; Kg. 51	id.	id. id.	40°,6	—	22,–	9,5	7,3	11,–	g 0,5 endovenoso contemporaneamente al vaccino.
			id. id.	40°,–	10,5	16,–	24,7	11,4	11,4	g 0,5 per 3 gg. endovenoso
83 bis	a. 20; f.; Kg. 66	asma bronchiale	lisato di tifo	40°,4	7,9	24,8	13,4	7,3	—	g 0,5 per 3 gg. per via intramuscolare.
66	a. 30; m.; Kg. 51	id.	id.	39°,3	9,9	18,9	15,4	—	—	g 0,5 endovenoso; 0,2 intram.; 0,2 orale per 3 gg.
43	a. 60; m.; Kg. 52	id.	id.	38°,8	7,9	15,4	11,3	7,7	—	id.
57	a. 40; m.; Kg. 48	id.	id.	39°,4	6,3	16,–	13,–	7,7	—	id.
Media					8,9	17,–	13,5	9,4		

TABELLA III.

Valori comparativi di acido piruvico negli stessi soggetti sottoposti a piretoterapia in condizioni normali e dopo trattamento con acido ascorbico e vit. B_1.

N°	Normali cioè non pretrattati		Pretrattati con acido ascorbico				Pretrattati con Vitamina B_1	
	temp.	acido piruvico γ/cc	temp.	acido piruvico γ/cc	temp.	acido piruvico γ/cc	temp.	acido piruvico γ/cc
83	1) 40°,5 2) 40°,8	32,2 19,3	40°,6	22,-	40°,-	16	—	—
83 bis	40°,1	35,-	40°,4	24,8	—	—	—	—
66	1) 39°,2 2) 39°,4	22,4 13,4	39°,3	18,9	—	—	39°,4	21,-
43	39°,5	13,8	38°,8	15,4	—	—	40°,-	18,-
57	39°,8	22,-	39°,3	16,-	—	—	39°,4	10,1

La media dei valori dell'acido piruvico, all'acme, in 8 individui così trattati fu di γ 17/cc. Questo valore, inferiore di circa 3 gamma a quello dei soggetti non sottoposti a nessun trattamento con vitamina C, potrebbe far pensare ad una influenza dell'acido ascorbico sul tasso dell'acido piruvico, se la differenza fra questo valore e quello di individui normali, cioè non pretrattati, avesse anche statisticamente il significato che invece non ha (v. tabella IV).

Il valore di acido piruvico era nella seconda giornata di γ 13,5/cc.; nelle seguenti di γ 9,4/cc. (v. tabella II).

c) *Valori di acido piruvico in soggetti pretrattati con vitamina B_1 e poi sottoposti a piretoterapia.* – Tre individui già sottoposti a piretoterapia sia in condizioni normali, sia pretrattati con acido ascorbico, sono stati successivamente trattati anche con vitamina B_1, somministrata in dosi fortissime per tre giorni consecutivi e sottoposti alla piretoterapia nella terza giornata (mg 20, 40, 20 al giorno rispettivamente nei tre giorni di trattamento).

Il tanto esiguo numero di soggetti non permette di stabilire una media, ma l'esame comparativo dei valori dell'acido piruvico autorizza a ritenere che nemmeno la vitamina B_1 influenza il tasso di questo acido in rapporto all'attacco febbrile (v. tabella III).

Tabella IV.

Valutazione statistica dei dati di cui alle tabelle I e II.

n = numero dei casi; M = media aritmetica; σ = scostamento quadratico medio; E_m = errore probabile della media = $\frac{\sigma \cdot 0{,}6745}{\sqrt{n}}$; E_d = errore probabile della differenza fra due medie = $\sqrt{E^2_{m_1} + E^2_{m_2}}$; $M_1 - M_2$ differenza tra la media dei valori all'acme e prima della piretoterapia; S. D. significato della differenza = $\frac{M_1 - M_2}{\sqrt{E^2_{m_1} + E^2_{m_2}}}$.

	n	M	σ	E_m	E_d	$M_1 - M_2$	S. D.	
prima	38	9,8	3,05	0,333				Serie A: soggetti normali, cioè non pretrattati, sottoposti a piretoterapia
all'acme	*17*	*20,1*	*6,57*	*1,075*	*1,12*	*10,3*	*8,9*	
2° giorno	16	15,–	4,2					
3° » e segg.	25	9,9	2,82					
prima	11	8,9	1,87	0,38				Serie B: soggetti pretrattati con acido ascorbico e sottoposti a piretoterapia.
all'acme	*8*	*17,–*	*4,42*	*1,05*	*1,11*	*8,1*	*7,3*	
2° giorno	8	13,5	4,58					
3° » e segg.	8	9,4	1,8					
					1,50	*3,1*	*2,–*	fra la media all'acme della serie A e B.

Commento e conclusioni. – I tre gruppi di esperimenti dimostrano che si ha costante innalzamento del tasso ematico di acido piruvico durante l'attacco febbrile.

Gli esperimenti di «saturazione» con vitamina C o con vitamina B_1, servono a dimostrare che il dimostrato innalzamento dell'acido piruvico non dipende da un iperconsumo e conseguente deficienza di vitamina B_1 o di vitamina C. Le esperienze di saturazione con vitamina C trovano il loro fondamento dottrinale nella constatazione che durante la febbre si ha un abbassamento del contenuto in vitamina C nei surreni (Bonetti [14]) e nel sangue (Daum, Boyd e Paul;

(14) E. Bonetti, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », *15*, 684 (1940).

Dobbelstein; cit. da Bonetti), e nel fatto che recenti ricerche di Cavallini [15] *in vitro* e di Cavallini e Bonetti *in vivo* [16], dimostrano che la vitamina C esplica la sua funzione catalitica producendo nella sua ossidazione perossido di idrogeno, che a sua volta ossida l'acido piruvico nei prodotti terminali acido acetico e CO_2. L'abbassamento dell'acido ascorbico, riscontrato nella febbre, poteva far supporre che questo, per questo suo meccanismo d'azione, esercitasse una influenza sul tasso di acido piruvico ematico.

Non può essere nemmeno attribuito l'aumento constatato di acido piruvico a contrazioni muscolari sotto forma di brividi, perchè nessuno dei nostri soggetti ha presentato brividi durante l'attacco febbrile e perchè anche la influenza del brivido sul tasso di acido piruvico non può esercitarsi per così lungo tempo, come dura l'aumento dell'acido piruvico che permane fino alla cessazione, e assai oltre, di ogni rialzo termico.

L'acido piruvico è il prodotto terminale costante e bene identificato della fase fosforilata del metabolismo dei carboidrati, o ciclo di Embden [17]. L'aumentato consumo di idrati di carbonio nella febbre induce di conseguenza una maggior produzione di acido piruvico. Questo si accumula nel sangue perchè gli ulteriori processi ossidativi che presiedono alla demolizione dell'acido piruvico vengono a difettare.

Il muscolo febbricitante contiene più acido lattico del normale (Malaguzzi–Valeri [6]). Le ricerche di Cahn indicano anche esse un aumento dell'acido lattico nel sangue. Questo aumento può essere interpretato nel senso che per una relativa deficienza di O_2 si abbia accumulo di acido lattico per aumento dei processi riduttivi svolgentisi per via anaerobica a carico dell'acido piruvico. Tale effetto si può avere anche in altre condizioni di aumentato metabolismo, come durante il lavoro muscolare in deficienti condizioni di ossigenazione (Margaria, Edwards e Dill [18], [19]).

Nella febbre si può assistere appunto all'instaurarsi di questa condizione di *deficit* di O_2 perchè la vascolarizzazione del muscolo insufficientemente capillarizzato, porta a condizioni simili a quelle del muscolo in riposo nel quale (Verzàr, cit. da Starling, *Human Physiology*, VII ediz., 1936), una gran parte dei territori muscolari, si trovano ad una tensione di O_2 uguale a zero.

Non sembra logico d'altra parte pensare, perchè contraddetto da numerosi risultati sperimentali, che l'aumento dell'acido lattico sia primitivo e, ossidandosi, induca secondariamente un aumento dell'acido piruvico. Le esperienze di Margaria e Ponzo [20], Foà e Fornaroli [21], Flock, Boll-

(15) D. Cavallini, « Arch. di Fisiol. », *45*, 189 (1946).

(16) D. Cavallini, e E. Bonetti, « Arch. Sc. Biol. ». (In corso di stampa).

(17) G. Embden, H. J. Deuticke und G. Kraft, « Klin. Wochnschr. », *1*, 213 (1933).

(18) R. Margaria, H. T. Edwards and D. B. Dill, « Am. J. of Physiol. », *106*, 689 (1933).

(19) R. Margaria, « Arch. Sc. Biol. », *21*, 213 (1935).

(20) R. Margaria e E. Ponzo, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », *12*, 573 (1937).

(21) P. Foà e P. Fornaroli, « Arch. di Fisiol. », *39*, 210 (1939).

man e Mann [22], con somministrazione di acido piruvico per via endovenosa hanno dimostrato che questo induce un aumento dell'acido lattico nel sangue, mentre l'introduzione di acido lattico non porta mai ad un aumento dell'acido piruvico. Margaria e Ponzo, inoltre, hanno osservato che la caduta del tasso di acido piruvico è molto più rapida che quella dell'acido lattico. Nello stesso senso depongono le conclusioni delle ricerche già citate di Bollman e Flock durante il lavoro muscolare.

Le nostre ricerche portano a concludere che durante la febbre si assiste ad un incremento della prima fase del metabolismo degli idrati di carbonio o fase fosforilata, che si manifesta con il prodotto ultimo e costante che è l'acido piruvico. Si può supporre che l'aumento del tasso di questo chetoacido è mantenuto inoltre dal deficiente suo ulteriore metabolismo ossidativo e che anche la via riduttiva attraverso l'acido lattico non è sufficiente ad eliminarlo completamente.

Per formulare una conclusione più generale questi dati non sono in disaccordo con quelli forniti dalla letteratura che tendono a dimostrare una identità qualitativa fra il ricambio del muscolo nel lavoro e nella febbre. Il muscolo febbrile ha però, come è noto, una propria condizione funzionale che gli dà quelle caratteristiche di imperfezione nei riguardi dell'eliminazione del calore che non si riscontrano nel lavoro meccanico.

Patologia. — *Preparazione del curaro da parte degli Indi Makù. Piante usate. Attività.* (*Regione dell'Alto Rio Negro–Amazzoni*). Nota I di E. Biocca, presentata [*] dal Corrisp. V. Puntoni.

Per tutto il Cinque e Seicento le notizie sulla preparazione del curaro furono circondate da leggende e racconti fantastici. Questo veleno terribile, la cui azione paralizzante è da tutti conosciuta, che lascia al ferito le capacità intellettuali (Vulneratus moritur sui conscius brevi tempore, secondo l'espressione di Martius [1]), fu considerato dotato di proprietà magiche e diaboliche. Ciò si spiega facilmente, perchè coloro che in questo tempo vennero a contatto con gli Indi non furono degli studiosi, ma dei missionari, dei commercianti o degli avventurieri.

I primi studi di sicuro valore scientifico sul curaro sono quelli pubblicati già nel 1781 da Felice Fontana [2]. In essi si sventa la maggior parte delle leggende e si dimostra, tra l'altro, come il veleno provochi la paralisi dei muscoli quando viene a contatto col sangue, mentre è praticamente inat-

(22) E. Flock, L. J. Bollman and F. C. Mann, « J. Biol. Chem. », *118*, 427 (1937).

(*) Nella seduta dell'8 marzo 1947.

(1) C. Martius, *Flora Brasiliensis*. Vol. VI, Pars I. Vindobonae et Lipsiae 1840–1906.

(2) F. Fontana, *Traité sur le venin de la vipère, sur les poisons américains, sur le laurier–cerise et sur quelques autres poisons végétaux*. Florence 1781.

tivo se applicato sui tronchi nervosi. Queste ricerche saranno poi confermate e ampliate, quasi un secolo dopo, da Claude Bernard [3].

Sopratutto nella seconda metà dell'Ottocento sono fioriti gli studi sulle proprietà chimiche e farmacologiche del curaro. Una rassegna completa di tutte le osservazioni di biochimica e farmacologia eseguite sull'argomento fino al principio del Novecento, si trova nel lavoro classico di Boehm [4].

In questi ultimi anni, sopratutto nei paesi anglosassoni (Stati Uniti e Inghilterra) il curaro è decisamente entrato nel campo della terapia umana per il trattamento di alcune malattie nervose, come coadiuvante delle anestesie chirurgiche ecc.

Nonostante la grande mole dei lavori eseguiti, ancora oggi le nostre conoscenze sono oscure su che cosa sia effettivamente il curaro, come sia preparato dagli Indi, quale la pianta o quali i componenti di origine animale da cui viene estratto.

Nel 1940 un esploratore americano, Gill [5], assistette alla preparazione del curaro fatta dagli Indi nei boschi dell'Equador; ne riportò una forte quantità nell'America del Nord (dove fu subito industrializzata per la preparazione di prodotti medicinali) e pubblicò un libro in cui è descritto il metodo e le piante usate da questi Indi per la preparazione del veleno.

Le recenti pubblicazioni scientifiche di autori anglosassoni, basate sul fatto che Gill ha assistito alla preparazione del curaro, fatta con il *Chondodendron tomentosum*, si esprimono come se questa pianta fosse la vera pianta del curaro.

Qualche studioso, sopratutto nel secolo scorso, aveva assistito alla preparazione del curaro in alcune regioni della foresta tropicale sud americana. Il numero delle descrizioni che, per la serietà con cui sono esposte, hanno un sicuro valore scientifico, è però relativamente molto scarso.

Meritano, secondo noi, di essere ricordate le descrizioni, seguitesi in ordine di tempo, di Von Humboldt [6] (Orinoco), Waterton [7] (Essequibo), R. Schomburgk [8] (Orinoco), De Castelnau [9] (Solimões), Appun [10] (Guiana Inglese), Martius [11] (Solimões), Crevaux [11] (Guiana Francese), Jobert e

(3) C. Bernard, *Leçons sur les effets des substances toxiques et medicamenteuses*. Paris 1857.

(4) R. Boehm, *Curare und Curarealkaloide*. (*Handbuch der experimentellen Pharmakologie*. Heffter A.) Berlin 1920.

(5) R. C. Gill, *White waters and black magic*. New York 1940.

(6) A. Humboldt von, *Reise in die aequinoctial Gegenden des neuen Continents*. Stuttgart 1874.

(7) C. Waterton, *Wanderings in South America*. London 1891.

(8) Rich. Schomburgk, *Reisen in Britisch Guiana in den Jahren 1840–1844*. Leipzig 1847, Cit. Naumann W., *Anotações historicas acêrca da investigação do curare*. « Acta Ciba », *8*; 92, 1941.

(9) F. De Castelnau. *Expédition dans les parties centrales de l'Amérique du Sud*. Paris 1851.

(10) F. K. Appun, *Unter den Tropen*. Jena 1871.

(11) J. Crevaux, *Les voyages dans l'Amérique du Sud*. Paris 1883.

Schwache[12] (Solimões), Hoehne[13] (Matto Grosso) e Vellard[14] (Matto Grosso).

Dallo studio attento dei metodi di preparazione descritti da questi autori risulta che solo alcuni Indi, generalmente appartenenti a tribù di cacciatori e i più lontani dalla nostra civilizzazione, sanno preparare il curaro. La preparazione è quasi ovunque circondata da riti magici e con grande difficoltà gli Indi accettano che estranei, sopratutto bianchi, siano presenti mentre essi preparano il veleno.

Indipendentemente dalla regione e dalla tribù, e senza considerare tutto il cerimoniale naturalmente diverso, il metodo di preparazione del curaro è fondamentalmente simile dappertutto e consiste nel raschiare la corteccia di tronchi e radici di numerose piante, farne un infuso acquoso e sottoporlo a una lentissima e prolungatissima ebollizione. Durante l'ebollizione nuovi estratti vegetali e a volte animali, sono aggiunti, e la preparazione continua, finchè il liquido ha assunto un aspetto di cioccolato ed è diventato scuro e denso.

Le piante descritte dai vari studiosi come le responsabili per l'azione del curaro, variano secondo la zona in cui l'osservazione del curaro è stata fatta. Furono considerate più importanti, nella Guiana Francese la *Strychnos Crevauxii*, nella Guiana Inglese la *Strychnos toxifera*, la *Strychnos cogens* ecc., nell'Orinoco la *Strychnos Gubleri* ecc., nell'alto Solimões, Marañon e affluenti la *Strychnos castelnoeana*, la *Strychnos yapurensis* (vedi lavori di Planchon[15]), nel Matto Grosso varietà di *Strychnos* non completamente identificate.

Al lato di queste numerose varietà di *Strychnos*, altre piante furono segnalate, sopratutto appartenenti alle Menispermaceae, da Martius[1], Castelneau[9], Gill[5] ecc., e precisamente il *Coccolus toxiferus*, l'*Abuta imene*, il *Chondodendron tomentosum* ecc.

Conosciute sono le interminabili polemiche che sorsero tra i sostenitori delle Loganiaceae (*Strychnos*) come le vere responsabili del potere paralizzante del curaro, contro le Menispermaceae; ricorderemo solamente le violente discussioni tra Barbosa Rodrigues[16] e Batista Lacerda[17].

Oltre alle Loganiaceae e alle Menispermaceae sono state viste usare Piperaceae, Rubiaceae ecc. Come abbiamo già riferito, alcuni autori hanno osservato che durante la preparazione del curaro erano mescolati ai vari estratti di piante, speciali veleni animali, formiche ecc.

Nessun osservatore aveva finora assistito alla preparazione del curaro in tutta quella immensa regione che va dalle sorgenti dell'Orinoco al Rio

(12) Jobert e Schwache, Cit. B. Lacerda.

(13) F. Hoehne, *Plantas e substancias tóxicas e medicinais*. S. Paulo-Rio 1939.

(14) J. Vellard, *Preparação do curare pelos Nambikwaras*. « Rev. Arquiv. Munic. S. Paulo », *59*: 5, 1939.

(15) G. Planchon, *Etudes sur les Strychnos*. « Journ. de Pharm. et Chimie », *1*, 293, 1880.

(16) B. Rodrigues, *L'Uiraêry ou curare*. Bruxelles 1903.

(17) B. Lacerda, *De variis plantis veneniferis florae brasiliensis*. Rio de Janeiro 1908.

Yapurà e Solimões (che segue la linea di divisione tra il Brasile e il Venezuela, il Brasile e la Columbia), dove si estendono gli ultimi affluenti del Rio Negro.

Per alcuni anni in Brasile ci siamo occupati del curaro e durante un viaggio eseguito nella regione citata (precisamente del Rio Uaupes e affluenti, Paporí e Tiquié) nell'anno 1944, abbiamo avuto la possibilità di studiare, dal punto di vista biologico [18] e culturale [19], alcune tribù di Indi e di assistere alla preparazione del curaro.

Lungo il corso di questi fiumi da noi percorsi, vivono numerosi Indi delle tribù Tukano e Tariana. Ognuna di queste tribù è suddivisa in «sipe» esogamiche. I Tukano e i Tariana sono Indi dedicati sopratutto alla pesca e alla coltura della mandioca, di robusta costituzione fisica, riuniti in grandi case collettive o «malocche», lontane chilometri l'una dall'altra. Questi Indi non sanno preparare il curaro, ma sono quelli che hanno i maggiori contatti con i Missionari.

Nelle grandi zone di bosco, delimitate da questi fiumi, si trovano altri Indi che appartengono alla tribù Makù. La loro costituzione somatica è differente; sono meno muscolosi e più agili, dediti quasi esclusivamente alla caccia. Parlano una lingua completamente diversa da quella del gruppo Tukano o Tariana.

I Makù rappresentano una minoranza etnica rispetto agli altri, quindi sono disprezzati e mantenuti in uno stato di semischiavitù dagli Indi Tukano e Tariana. Le persecuzioni che subiscono da parte degli altri Indi, come la necessità di procurarsi ed inseguire la selvaggina, li obbligano ad una vita nomade nell'interno del bosco. Sono sospettosi ed infidi. Sono i conoscitori più profondi di tutte le piante velenose e sanno preparare il curaro. Avvelenano con esso le piccole freccie che soffiano con la cerbottana e le grandi freccie che lanciano con l'arco. La preparazione del curaro, arma così importante per la loro vita, rappresenta l'unica loro superiorità e uno dei loro maggiori segreti.

Metodo di preparazione. – Nel marzo del 1944 risalii in canoa un affluente senza nome del margine destro del Rio Tiquié, vicino alla frontiera tra Brasile e Columbia e per mezzo di Indi Tukano interpreti riuscii ad avvicinare alcuni Makù. (Tutto ciò fu possibile grazie àlla generosa e disinteressata collaborazione dei Missionari Salesiani, ai quali resto profondamente grato).

In seguito ad una grande quantità di regali (centinaia di ami da pesca, specchi, coltelli ecc.) i Makù consentirono di mostrarmi il metodo da essi usato per la preparazione del curaro.

(18) E. Biocca e F. Ottensooser, *Estudos etno–biológicos sôbre os indios da região do Alto Rio Negro-Amazonas*. Nota I. *Grupos sanguineos comuns e fatores M e N*. «Arquiv. de Biol.», *28*: 1–8, 1944 (Estratto).

(19) E. Biocca, *Estudos etno–biológicos sôbre os indios da região do Alto Rio Negro–Amazonas*. Nota II. *Trasmissão ritual e trasmissão criminosa da espiroquetose discrómica (Puru'–Puru') entre os indios do Rio Içana*. «Arquiv. de Biol.», *29*: 1–8, 1945 (Estratto).

Cercarono lungamente nel bosco le piante necessarie e la mattina seguente portarono una quantità di arbusti che avevano strappato dalla terra con tutte le radici: divisero queste piante in due gruppi e dissero ai miei intepreti che un gruppo era più e l'altro meno importante. Cominciarono poi a raschiare i tronchi e le radici delle diverse piante e a macerare il raschiato in acqua, ottenendo un liquido rossiccio, che veniva poi filtrato molto lentamente in un imbuto fatto di foglie verdi. Questo liquido venne concentrato ad un fuoco debolissimo e la schiuma, che si formava durante il primo periodo dell'ebollizione, era eliminata con una spatola di legno. Il liquido che evaporava era sostituito con nuovo liquido che proveniva dall'infuso del raschiato di altre piante. L'ebollizione durò qualche ora, finchè i Makù interruppero il lavoro dicendo che ormai avevano mostrato come si preparava il curaro. Per ottenere però un veleno perfetto, dissero agli interpreti, che sarebbe stato necessario seccare le piante prima di raschiarle, per due giorni sopra un fuoco lentissimo. La bollitura degli infusi doveva durare per altri due giorni, finchè non fosse restata nel fondo del recipiente altro che una sostanza densa come miele spesso. Il liquido che si evaporava doveva essere continuamente sostituito con del nuovo.

Durante tutta la preparazione alla quale assistemmo non furono usate sostanze di origine animale e i Makù assicurarono i miei interpreti che essi non le aggiungevano mai al curaro.

Ricordiamo questo particolare, perchè altri osservatori di indiscussa serietà, che hanno assistito alla preparazione del veleno in zone differenti, riferiscono di aver visto mescolare, a volte determinate formiche, a volte veleni di rospi, veleni di serpenti ecc.

Ci è stato possibile ottenere una documentazione fotografica delle principali fasi del metodo di preparazione, come delle diverse piante usate. È stata tentata anche una breve documentazione cinematografica.

Nella lingua makù il curaro è chiamato *Nam*, mentre nella lingua tukano si chiama *Nimà*.

Le donne sono gelosamente escluse dalla preparazione del veleno e un cerimoniale magico, che per brevità tralasciamo di ripetere dettagliatamente, è seguito dagli addetti alla preparazione. Si riassume sopratutto nella proibizione di mangiare alcuni cibi o di riposarsi nell'amaca durante tutto il periodo in cui continua l'ebollizione degli infusi.

Piante usate. – Campioni delle piante usate dai Makù nella preparazione del curaro furono da noi portate a San Paolo dove furono identificate da Hoehne F., Direttore del Departamento de Botanica do Estado, nella seguente maniera.

(La mancanza di fiori e di frutta, nella maggior parte dei campioni, ha impedito una identificazione più esatta).

Piante considerate dagli indi *più importanti*:

1ª *Strychnos, sp. indet.*

2ª *Menispermaceae: Abuta Grisebachii* (?), *Triana e Planchon.*
3ª *Menispermaceae: Anomospermum* (?).

Piante considerate dagli indi *meno importanti:*
1ª *Strychnos* (tre varietà)
2ª *Malpighiaceae, indet.*
3ª *Rubiaceae: Palicourea o Psychotria.*

Attività del curaro Makù. – Durante il nostro viaggio nella regione dell'Alto Rio Negro abbiamo raccolto curaro makù in cinque località differenti (una località del Rio Uaupes, una del Rio Paporí e tre del Rio Tiquié).

Questi 5 campioni di curaro ci sono serviti per conoscere l'attività biologica media del curaro makù e per confrontare il veleno già pronto e usato per la caccia dagli Indi, con quello preparato dinanzi ai nostri occhi.

Metodi di dosaggio. — Vari sono i metodi usati per il dosaggio dell'attività del curaro. Fu utilizzata la capacità che possiede il curaro di interferire sulla contrazione muscolare provocata dall'acetilcolina: un gastrocnemio di una rana, immerso in un bagno di soluzione di Ringer, sotto condizioni costanti e determinate di temperatura e di ossigenazione, si contrae in presenza di acetilcolina, ma questa contrazione è diminuita o annullata a seconda della quantità di curaro che viene aggiunta. Un altro sistema di dosaggio, usato attualmente nei lavori americani, è l'« Head drop test», che consiste nell'iniettare lentamente nella vena marginale dell'orecchio del coniglio una soluzione di curaro, interrompendo l'iniezione al momento esatto in cui l'animale, in seguito al rilasciamento progressivo dei muscoli del collo, non riesce più, se stimolato, a sollevare la testa che ha appoggiata sul tavolo.

Questo «end point» non è costante nei vari animali, potendo presentare variazioni anche del 150 %; sembra però costante nello stesso animale, in prove successive. È un metodo che ha il vantaggio di non sacrificare gli animali, che possono essere utilizzati per una lunga serie di osservazioni. Per poter usare questo metodo, però, è necessario possedere un valore Standard a cui riferire la resistenza dei singoli animali.

Secondo le nostre prove, la quantità di curaro necessario per determinare il rilasciamento dei muscoli del collo del coniglio, è circa quattro volte minore di quella capace di provocarne la morte.

Per le presenti ricerche abbiamo trovato più semplice riferirci alla dose minima letale. Abbiamo avuto a nostra disposizione numerosi animali da esperimento e abbiamo potuto controllare che la dose minima letale è variabile nella stessa specie animale secondo le diverse vie di inoculazione (endomuscolare, endoperitoneale, endovenosa, endocerebrale) e proporzionale sopratutto al peso dell'animale stesso.

Come è conosciuto da molto tempo, (è sufficiente ricordare gli studi iniziali di Amantea[20]) il curaro provoca, se inoculato nel cervello degli animali, uno stato convulsivo generalizzato, seguìto dalla morte più o meno rapida, secondo la dose iniettata.

Abbiamo usato come animali di scelta topini bianchi maschi del peso oscillante sui 20 grammi e conigli bianchi del peso medio di due chili. I risultati più costanti sono stati ottenuti inoculando i topini nei muscoli della coscia con diluizioni di curaro in soluzione fisiologica. (Gruppi di 5 topini almeno ogni diluizione). Per le prove sui conigli abbiamo trovato più conveniente usare la via endovenosa. (Due conigli ogni diluizione).

(20) G. Amantea, *Sull'azione del curaro applicato direttamente sui centri nervosi.* «Archiv. di Farmacol. sper. e Sc. affini», *14*: 1–35, 1912 (Estratto).

a) *Curaro makù controllo.*

Abbiamo considerato come curaro makù controllo il curaro da noi raccolto già pronto, come abbiamo detto, in 5 località della zona.

Il colore di questi cinque campioni era quasi nero. Se secco, il curaro presentava frattura brillante, se lievemente inumidito diveniva appiccicoso, simile a pece o miele molto spesso. L'attività curarizzante, differente tra un campione e l'altro a seconda della provenienza, ma costante per ogni campione in prove successive, ha oscillato, per ogni grammo di sostanza secca, tra 2.000 e 10.000 dosi minime mortali per i topini inoculati endomuscolarmente e 150–500 dosi minime mortali per i conigli inoculati per via venosa (diluizioni in 0,5 cm_3 di sol. fisiologica). La morte si produceva, in tutti i casi, per curarismo tipico, dentro un'ora al massimo dall'iniezione. Tutti i 5 campioni di curaro, inoculati nel cervello dei topini, (diluizione in 0,05 cm_3 di sol. fis.) hanno determinato le classiche convulsioni: la dose minima mortale è stata 10–20 volte minore di quella che provocava la morte per curarismo in seguito a iniezione endomuscolare.

b) *Curaro preparato dagli Indi Makù in nostra presenza.*

Il curaro, alla cui preparazione abbiamo assistito, aveva un colore cioccolato molto più chiaro di quello dei 5 controlli e, se inumidito, era molto meno denso e appiccicoso.

L'attività biologica era molto inferiore a quella presentata dai vari campioni raccolti nella stessa regione.

Per ottenere la morte dei topini è stato necessario inoculare 8 mg per via muscolare. La sintomatologia provocata era ben diversa da quella determinata dai campioni di curaro controllo. Gli animali cominciavano a presentare i primi sintomi, solo dopo 15–20 minuti dall'iniezione: avevano tremori diffusi e appoggiavano la testa nel suolo. Se eccitati artificialmente, facevano alcuni passi corti, accompagnati da tremori generalizzati. La morte si produceva dopo alcune ore di uno stato agonico in cui i topini, distesi e nell'impossibilità di spostarsi, avevano contrazioni e movimenti convulsivi specialmente degli arti posteriori.

La inoculazione, però, di questo curaro imperfetto nel cervello dei topini provocava convulsioni che non ci è stato possibile differenziare da quelle provocate dai campioni di curaro controllo. La dose minima mortale per via cerebrale era relativamente piccola e corrispondeva a due decimi di milligrammo di sostanza, diluita in 0,05 cm^3 di sol. fisiologica.

Conclusioni. – Da quanto abbiamo esposto ci sembra poter concludere:

1° che il metodo di preparazione del curaro usato dagli Indi Makù, non differisce fondamentalmente da quello descritto da altri ricercatori in regioni diverse e a volte molto lontane. Esso consiste essenzialmente nella ebollizione lenta di infusi di radici e cortecce di piante differenti. Il curaro è considerato pronto da parte degli Indi quando assume un colore quasi nero e un aspetto denso e pastoso, come di miele molto spesso;

2° che nella regione da noi esaminata, gli Indi Makù usano, per preparare il curaro, piante appartenenti a specie completamente distinte: considerano come molto importanti, però, una *Strychnos*, e due *Menispermaceae*;

3° che il curaro preparato di fronte ai nostri occhi presenta caratteri fisici alquanto differenti dai campioni di curaro controllo da noi raccolti nella stessa zona: è di colore più chiaro e meno denso dei controlli. Dal punto di vista biologico determina una intossicazione differenziabile dalla curarica tipica, perchè provoca un prolungato stato agonico degli animali, accompagnato da tremori diffusi e lievi attacchi convulsivi.

(Nelle prossime Note mostreremo come sia stato possibile ottenere la trasformazione, in laboratorio, di questo curaro imperfetto in curaro altissimamente attivo).

Biochimica. — *Sulla modificazione dell'attività diabetogena dell'allossana addizionata ad aminoacidi in vivo ed in vitro* [*]. Nota di S. Bocchiotti e M. Orunesu, presentata [**] dal Corrisp. U. Lombroso.

Da qualche anno è stata introdotta una nuova tecnica per ottenere una forma di diabete che corrisponde in modo singolare a quella che si osserva nella clinica o dopo l'estirpazione del pancreas nel cane.

Questa tecnica è rappresentata dall'iniezione di una sostanza, la allossana, che appartiene alle basi pirimidiniche e potrebbe rappresentare un termine di passaggio nel metabolismo dell'acido urico, della caffeina, della teobromina e quindi di tutti i derivati della xantina.

Il meccanismo d'azione dell'allossana si attribuisce ad un'azione elettiva sulle cellule β delle insule del Langerhans, delle quali provocherebbe la distruzione.

Alla ipoglicemia iniziale segue ben presto la iperglicemia e quindi un diabete costante, uniforme che permette una sopravvivenza di qualche mese nell'animale di adozione, il coniglio, sul quale si sono praticate per ora le ricerche più numerose.

Attualmente anche sul cane si sono ottenuti buoni risultati con prolungata sopravvivenza. I ratti e le cavie presentano pure il diabete allossanico, ma per lo più muoiono precocemente e servono a ricerche di breve durata.

Il diabete allossanico si differenzia da quello per estirpazione del pancreas e dal diabete per iniezione di florizina, perchè non è associato a disturbi dell'assorbimento alimentare. Lombroso e Galamini [1] sperimentando anche su conigli privati del secreto pancreatico nel tubo digerente per legatura e recisione del dotto di Wirsung (nei quali dopo un certo lasso di tempo si era

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia dell'Università di Genova.

(**) Nella seduta del 12 aprile 1947.

(1) Lombroso, *Lezioni di Fisiologia*, p. 176. Bozzi ed., 1946, Genova.

ristabilito pressochè normale l'assorbimento lipidico), osservarono che l'insorgere del diabete allossanico non provocava modificazione alcuna dell'assorbimento dei grassi. Il mantenersi in elevata misura l'assorbimento dei grassi in questi animali rappresentava un dato interessante, in quanto permetteva di meglio interpretare un risultato molto discusso in rapporto all'assorbimento dei grassi che il Lombroso aveva osservato mantenersi discreto nel cane avente nell'organismo un segmento residuo di pancreas separato però dall'intestino; in confronto alla profonda stearrea provocata dall'estirpazione di tale segmento e che da qualche autore si voleva attribuire all'insorgere dell'iperglicemia conseguente a quest'ultima operazione. Si diversifica pure il diabete allossanico da quello florizinico, perchè associato alla iperglicemia ed esente da turbe dell'assorbimento. Recenti indagini nel nostro Istituto [2] hanno confermato i disturbi nell'assorbimento dei lipidi e dei glucidi che si osservano durante l'intossicazione florizinica, già prima notati dal Verzar e dal Sarzana [3][4]. È interessante in proposito ricordare che da queste ultime indagini è risultato come l'insulina non riesca a sospendere il diabete florizinico o a ridurlo sensibilmente, e non determini miglioramento sull'assorbimento. Iniezioni di cortina hanno invece normalizzato perfettamente l'assorbimento e profondamente ridotto la glicosuria [2].

Ma non ci tratteniamo su queste divergenze tra il diabete da allossana e da altre origini, perchè in questa Nota ci limitiamo al preciso compito di analizzare i processi chimici che si ottengono facendo agire l'allossana su alcuni aminoacidi, per poter in seguito meglio valutare le reazioni per le quali si modifica pure profondamente l'azione biologica di tale sostanza. I primi dati in proposito si trovano in un lavoro di Strecker [5] che per primo osservò le modificazioni subìte dalla allossana in reazione con la glicocolla, l'alanina e la leucina.

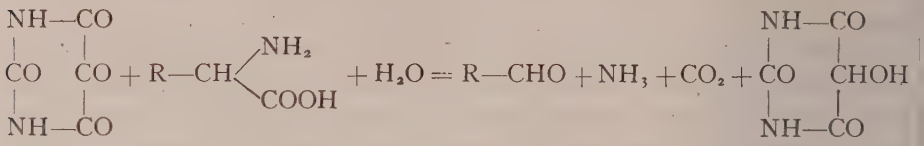
Questi aminoacidi provocavano una colorazione rossa, e l'aminoacido stesso, in questa reazione, veniva trasformato in aldeide con un atomo di carbonio in meno.

Piloty [6] notò che la glicocolla reagiva con l'allossana fino alla formazione di acido purpurico.

Hurtley e Wotton [7] descrissero una identica reazione colorata tra l'allossana ed il peptone di Witte e la gelatina, constatando che la caseina non dà reazione alcuna.

Wieland e Bengel [8] constatarono l'azione dell'allossana come accettore di idrogeno, azione esaltata dalla presenza di nero palladio, tipico catalizzatore delle deidrogenazioni. La reazione avverrebbe come segue:

(2) Esperienze eseguite dal dott. Ardy. In corso di pubblicazione.
(3) Verzar, *Absorption from the intestin*, 1936, Longmans, New York.
(4) Sarzana, « Gazz. Intern. Medicina e Chirurgia », *3*, 145 (1934).
(5) Strecker, « Lieb. Ann. », *123*, 363 (1862).
(6) Piloty, « Lieb. Ann. », *333*, 22 (1917).
(7) Hurtley e Wotton, « J. Ch. Soc. », *99*, 288 (1911).
(8) Wieland e Bengel, « Lieb. Ann », *439*, 196 (1924).



L'allossana, cioè, funzionerebbe da accettore di idrogeno trasformandosi in acido dialurico, mentre l'aminoacido verrebbe trasformato in un composto aldeidico con un atomo di carbonio in meno.

Labes e Freisburger [9] descrissero la formazione di composti allossano simili prodotti dall'allossana sull'organismo di animali viventi.

Lieben ed Edel [10] notarono che la colorazione tra allossana ed aminoacidi si fa più intensa quando l'aminoacido è solforato. Affermarono che la sarcosina e la betaina non reagiscono con l'allossana e che perchè tale reazione avvenga è indispensabile la presenza dell'aminogruppo libero.

I dipeptidi danno una leggerissima colorazione, mentre non reagiscono affatto le amine biogene. (Colamina, metilamina, tiramina).

Cerecedo [11] notò che dopo somministrazione di allossana sui ratti, questi urinavano rosso, senza però precisare a quale composto fosse dovuta questa colorazione.

Queste osservazioni sull'affinità chimica dell'allossana per gli aminaocidi ci suggerivano di ricercare se venisse modificata l'azione diabetogena dell'allossana in base a recenti esperienze sull'azione diabetogena dei composti allossano simili, quali l'acido dialurico.

Abbiamo perciò voluto controllare in vivo le affermazioni di Wieland secondo il quale l'allossana, reagendo con gli aminoacidi, si trasformerebbe in acido dialurico, affermazioni queste che se esatte, si dovevano manifestare con un'azione diabetogena dell'acido dialurico secondo le esperienze di Rossi–Fanelli e Siliprandi [12].

Le nostre esperienze sono state eseguite nel seguente modo:

A – Sono state iniettate a ratti albini mescolanze di allossana ed aminoacidi, in soluzioni riscaldate a bagnomaria per 5 minuti.

B – Sono state provate le variazioni *in vivo* iniettando a ratti albini prima l'aminoacido fenilalanina in soluzione, seguìto da una iniezione di soluzione di allossana con un intervallo di 10 minuti.

Dati sperimentali.

Gli animali da esperimento, ratti albini, sono stati divisi in quattro lotti di quattro unità ciascuno.

(9) Labes e Freisburger, « Arch. Pharm. Pathol. », *156*, 26 (1930).
(10) Lieben ed Edel, « B. Z. », *224*, 404 (1931).
(11) Cerecedo, « J. B. Ch. », *93*, 283, (1931).
(12) Rossi–Fanelli e Siliprandi, « Il Farmaco », giugno, 240 (1946).

Primo lotto: Usato come testo. Ai ratti fu iniettata per via endoperitoneale una dose di allossana corrispondente a 300 mgr. pro kg. in soluzione al 15 %.

Secondo lotto: Ai ratti fu iniettata una soluzione di allossana più fenilalanina. Soluzione di allossana al 15 % in ragione di 300 mgr. pro kg. più una soluzione di fenilalanina al 20 % in ragione di 300 mgr. pro kg.; le due soluzioni, unite, furono riscaldate a bagnomaria e, raffreddate, iniettate ad un pH. variante da 6,5 a 6,8.

Terzo lotto: Subì lo stesso trattamento del secondo; venne però adoperato come aminoacido l'istidina. Condizioni sperimentali identiche.

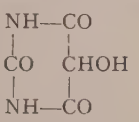
Quarto lotto: Dopo un'iniezione pari a 600 mgr. pro kg. di fenilalanina, venivano iniettati, con un intervallo di 10 minuti, 300 mgr. pro kg. di allossana.

I dati raccolti sono esposti nella tabella riassuntiva. (Vedi appresso).

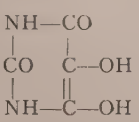
Conclusioni. – Da queste esperienze risulterebbe che: l'associazione in vitro dell'allossana con gli aminoacidi istidina e fenilalanina, conduce ad una modificazione strutturale della sostanza, per la quale essa riesce innocua e non diabetogena. L'allossana, pur agendo come accettore di idrogeno, non si convertirebbe, in vivo, in acido dialurico, il quale è diabetogeno, ma in altro composto non diabetogeno[13]. Gli animali in generale sono molto sensibili all'azione dell'allossana, ed in particolare i ratti, che per lo più sopravvivono appena qualche giorno ad un'iniezione pari a 300 mgr. pro kg.; quando l'allossana è modificata dalla reazione chimica che avviene in presenza di aminoacidi, i ratti possono invece sopravvivere senza accusare disturbi.

La suddetta azione modificativa dell'allossana da parte di aminoacidi è pure manifesta nelle esperienze in cui l'aminoacido è presente nell'organismo vivente per iniezione che precede di pochi minuti l'iniezione di allossana.

(13) Riteniamo probabile che invece di acido dialurico riferendoci alla ipotesi di Wieland:



si abbia la formazione di acido isodialurico:



da noi esperimentato e rivelatosi non diabetogeno, la cui genesi è molto facile nelle condizioni in cui sono state effettuate le nostre esperienze, in vivo.

I° Lotto (Allossana 300 mgr. pro Kg.)

	Ratto N° 1 peso; gr. 140		Ratto N° 2 peso 130 gr.		Ratto N° 3 peso gr. 150		Ratto N° 4 peso gr. 115	
	glicem.	glicos.	glicem.	glicos.	glicem.	glicos.	glicem.	glicos.
Partenza	1,10	neg.	0,97	neg.	1,07	neg.	0,97	neg.
I° giorno	2,05	24 ‰	1,70	21 ‰	1,98	29 ‰	2,03	17 ‰
II° »	2,30	28 ‰	1,95	32 ‰	2,07	25 ‰	2,17	23 ‰
III° »		25 ‰	2,04	30 ‰	2,10	27 ‰	2,15	21 ‰
IV° »		27 ‰	2,05	»	2,14	30 ‰		25 ‰
V° »		27 ‰		28 ‰	2,14	30 ‰		25 ‰
	il ratto muore nel VI° giorno		il ratto muore nell'VIII° giorno		seguìto fino al X° giorno: diabetico.		seguìto fino al X° giorno: diabetico.	

II° Lotto (Allossana e Fenilalanina: ana 300 mgr. pro Kg.)

	Ratto N° 1 peso: gr. 150		Ratto N° 2 peso gr. 150		Ratto N° 3 peso: gr. 145		Ratto N° 4 peso: gr. 140	
	glicem.	glicos.	glicem.	glicos.	glicem.	glicos.	glicem.	glicos.
Partenza	1,26	neg.	1,15	neg.	1,08	neg.	1,10	neg.
I° giorno	1,29	legg. rid.	1,09	legg. rid.	1,20	legg. rid.	1,15	legg. rid.
II° »		neg.		» »		» »	1,18	»
III° »		neg.		neg.		» »		neg.
IV° »		neg.		neg.	1,17	neg.		neg.
V° »		neg.	1,20	neg.	1,15	neg.	1,20	neg.

muore al VII° giorno. I ratti N° 2–3–4 seguìti per 15 giorni: normali.

III° Lotto (Allossana e Istidina: ana 300 mgr. pro Kg.)

	Ratto N° 1 peso: gr. 125		Ratto N° 2 peso: gr. 120		Ratto N° 3 peso: gr. 160		Ratto N° 4 peso: gr. 150	
	glicem.	glicos.	glicem.	glicos.	glicem.	glicos.	glicem.	glicos.
Partenza	1,15	neg.	1,22	neg.	1,30	neg.	1,18	neg.
I° giorno	1,34	1,4 ‰	1,18	neg.	1,25	neg.	1,20	neg.
II° »		neg.	1,25	legg. rid.		neg.		neg.
III° »		neg.	1,25	neg.		neg.		legg. rid.
IV° »		neg.	1,21	neg.				» »
V° »	1,20	neg.	1,20	neg.	1,25	neg.	1,15	neg.

tutti i ratti furono seguìti per 15 giorni: condizioni normali.

IV° Lotto (Fenilalanina 600 mgr. pro Kg.–Allossana 300 mgr. pro Kg.)

	Ratto N° 1 peso: gr. 130		Ratto N° 2 peso: gr. 140		Ratto N° 3 peso: gr. 130		Ratto N° 4 peso: gr. 140	
	glicem.	glicos.	glicem.	glicos.	glicem.	glicos.	glicem.	glicos.
Partenza	1,08	neg.	1,15	neg.	1,22	neg.	1,05	neg.
I° giorno	1,15	4,1 ‰	1,20	4 ‰	1,27	legg. rid.	1,17	legg. rid.
II° »		legg. rid.		legg. rid.		» »	1,23	» »
III° »		» »		» »		» »		» »
IV° »		neg.		» »		» »		» »
V° »	1,15	neg.	1,13	neg.	1,25	neg.	1,18	neg.

tutti i ratti furono seguìti per 15 giorni: condizioni normali.

Biologia (Biochimica). — *Il metabolismo batterico del glicerolo e dei suoi derivati.* – I. *Importanza del numero e della posizione delle funzioni alcooliche* (*). Nota di E. Bonetti e M. Aloisi, presentata (**) dal Socio G. Vernoni.

I. Non è il caso di ricordare per esteso come fin dai primi tempi degli studi batteriologici sia stato usato il glicerolo nella composizione dei terreni colturali e come a seconda delle varie specie batteriche sia stato seguito il destino di questo alcool trivalente sia nella sua fase demolitiva sia per ciò che riguarda la sua utilizzazione nelle sintesi batteriche. Dalla vasta letteratura risulta che moltissime specie batteriche, patogene e non patogene, utilizzano in qualche modo il glicerolo, come pure fanno saccaromiceti e altri funghi.

Per quanto riguarda gli esteri fosforici del glicerolo si hanno invece dati assai scarsi; Quastel e Wooldridge (1927, I e II) hanno studiato la riduzione del bleu di metilene in anaerobiosi prodotta da *E. coli* in presenza di numerosissimi substrati fra i quali il glicerolo, l'α– e il β–glicerofosfato e il glicol etilenico. Nelle loro condizioni sperimentali l'α–glicerofosfato è il più attivo donatore di idrogeno; meno lo è il β–glicerofosfato, ancora meno o affatto il glicerolo non esterificato. La capacità deidrogenante di *E. coli* nei confronti dell'α–glicerofosfato è notevolmente più resistente a condizioni non ottimali di temperatura e di pH e di fronte a vari inibitori. Riguardo al glicolo, secondo le ricerche citate, esso può essere un buon donatore di H alla temperatura ottimale di 37° C.

Tikka (1935), pure lavorando su *E. coli*, ha visto che dal glicerolo e dall'α–glicerofosfato si può ottenere alcool etilico, ac. formico, CO_2 e H_2. Non altrettanto avviene col β–glicerofosfato.

Wood, Wiggert e Werkmann (1938) hanno studiato la capacità differenziale del *Propionibacterium pentosaceum* di utilizzare il glicerolo e il suo α–estere fosforico. In ricerche aerobiotiche, Quastel e Webley (1941), lavorando con *Bact. ac. propionici* constatarono che il glicerolo è meglio utilizzato che non l'α–glicerofosfato e che in ogni caso il consumo di O_2 è incrementato dalla presenza di tiamina.

Ricerche recentissime di Tosic (1946) su un *Acetobacter* dimostrano che questo germe è capace di ossidare fortemente il glicerolo e non i suoi esteri α e β.

Per quanto riguarda altri derivati del glicerolo le notizie sono assai scarse e di queste sarà fatto cenno nel corso della presente Nota.

In una nostra precedente comunicazione (1946) abbiamo confermato su una serie di germi una loro diversa capacità di utilizzare in aerobiosi il glicerolo, l'α– e il β–glicerofosfato. Da queste ricerche preliminari risultava infatti che quasi tutti i germi da noi usati (e la cui serie viene ulteriormente

(*) Ricerche eseguite presso il Centro di Studi per la Fisiopatologia del C. N. R. in Roma.
(**) Nella seduta del 10 maggio 1947.

estesa nella presente ricerca) utilizzano assai bene in via ossidativa il glicerolo e l'α–glicerofosfato, mentre attaccano assai scarsamente nelle condizioni da noi poste (germi in fase « resting », pH 7,4, temp. 38° C) il β–glicerofosfato.

Quantitativamente il consumo di O_2 in presenza di glicerolo arriva al doppio di quello utilizzato per l'ossidazione dell'α–glicerofosfato, il che può peraltro portare a concludere che in ambo i casi si consumi una mole di O_2 per ogni mole di substrato, tenendo conto del fatto che dei due stereoisomeri dell'α–glicerofosfato sintetico solo uno (che risulta anche essere levogiro) venga biologicamente attivato secondo quanto avviene per i tessuti animali (Cfr. Elliott, 1941). Va tenuto presente che le nostre ricerche erano condotte in presenza di fosfati (tampone) e che quindi l'ossidazione della glicerina poteva verosimilmente compiersi previa fosforilazione, cioè con il passaggio attraverso un α–glicerofosfato biologicamente attivo.

Appariva perciò da queste ricerche assodato che, comunque, l'ossidazione della molecola del glicerolo, fosforilata o meno, poteva compiersi solo quando rimanessero vicinali due funzioni alcooliche. Infatti già dai dati esistenti nella letteratura risulta che quando è presente un solo ossidrile, per esempio nella molecola del propano, se si tratta di un ossidrile primario viene ossidato da diverse specie batteriche formandosi ac. propionico, mentre nel caso di un ossidrile secondario (alcool isopropilico) solo alcune specie riuscirebbero ad attaccarlo e se mai il gruppo degli acetobacter (Bernhauer, 1940).

Del resto prima di iniziare le presenti ricerche abbiamo voluto constatare se nelle nostre condizioni sperimentali (germi in fase « resting ») si avesse un analogo comportamento nei confronti di alcool monovalenti del propano (propilico ed isopropilico) di germi quali l'*E. coli*, la *Ps. aeruginosa* e il *B. vulgare* (X 19).

Tabella I.

Specie batterica	Alcool propilico Q_{O_2}/N	Alcool isopropilico Q_{O_2}/N	Glicerolo Q_{O_2}/N	α–glicerofosfato Q_{O_2}/N
E. coli	30,9	—	846	444
Ps. aeruginosa	829	—	690	227
B. vulgare	171	—	694	497

Le condizioni di esperimento erano quelle stesse che riportiamo per le prove col glicerolo e derivati. I risultati, come mostra la tabella I, indicano che l'alcool monovalente a 3 atomi di C è attaccato solo se il gruppo alcoolico è primario. Ma evidentemente dalla nostra precedente Nota risulta che questa capacità di attaccare il gruppo alcoolico primario si perde passando all'alcool trivalente quale il glicerolo o il suo prodotto di esterificazione in cui permangano due gruppi alcoolici primari agli estremi della catena (β-glicerofosfato)

o il prodotto di addizione con l'acetone (acetonglicerina) che lascia libero un solo gruppo alcoolico primario.

Estendendo queste ricerche ci siamo proposti di vedere se altri monoderivati del glicerolo si comportassero analogamente alle forme α e β del glicerofosfato; il che voleva essere un controllo se per l'ossidazione in parola bastasse la presenza di due « oli » vicinali o si richiedesse invece anche la presenza del radicale fosforico.

II. Parte sperimentale. – A questo scopo abbiamo preparato gli eteri metilici α e β del glicerolo in forma pura secondo uno schema tratto dalle varie tecniche esistenti (Cfr. Aloisi e Bonetti, 1947). A titolo di controllo abbiamo scelto anche altri substrati che avessero, come il glicol etilenico, due semplici oli vicinali, l'etere metilico del glicolo (un solo ossidrile) e l'acetonglicerina (un solo ossidrile libero). L'etere metilico del glicolo etilenico è stato preparato secondo Cretcher e Pittinger (1924) passando attraverso la cloridrina etilenica; l'acetonglicerina secondo Fischer e Pfähler (1920). Sia gli eteri metilici che gli esteri fosforici del glicerolo, come pure i corrispondenti del glicolo, erano saggiati con la reazione all'HIO_4 per controllarne la purezza. L'α–glicerofosfato conteneva l'88 % di puro isomero α.

Specie batteriche esaminate:

Bact. paradysenteriae (Flexner), *Bact. vulgare* (X 19), *Diplococcus pneumoniae*, *Eberthella typhosa*, *Escherichia coli*, *Pseudomonas aeruginosa*, *Serratia marcescens*, *Staph. albus*, *Acetobacter xylinum* (Brown, Bergey et al.), *Acetobacter sp.* (1).

Meno che per queste due ultime specie si è controllato a quale fase appartenessero i ceppi: tutti avevano netta prevalenza di fase S per l'agglutinazione alla tripaflavina e per i caratteri morfologici delle colonie.

I germi erano coltivati su piastra di agar comune a 37°C per 18–24 ore; l'*Acetobacter xylinum* (B. B.) in agar malto, l'*Acetobacter sp.* in agar vino per 36–48 ore a 25° C. La patina batterica veniva lavata due volte in soluzione fisiologica dove finalmente si sospendeva ad una concentrazione che corrispondesse a circa mg 0,25 di N per cc (Kjeldahl più volte ripetuto).

Le prove venivano condotte in respirometri di Warburg per la durata di 2–4 ore con tampone di fosfati a pH 7,4 nelle condizioni sotto esposte che consentivano il metabolismo del germe in fase « resting ».

Allo scopo di valutare il significato delle differenze tra la respirazione di base e quella in presenza di substrati si è voluto stabilire con una certa approssimazione l'ampiezza degli scarti accidentali inerenti alle condizioni di esperimento. Questo si è ottenuto notando gli scarti del Q_{O_2} basale di una medesima sospensione di germi in gruppi di 11 prove per ogni germe. I valori corrispondenti allo scarto di 3 σ, che comprendono il 99 % degli errori possibili, vengono riportati nella seguente tabella riassuntiva dei risultati.

(1) I ceppi di *Acetobacter* ci sono stati gentilmente forniti dal prof. C. Arnaudi, Direttore dell'Istituto di Microbiologia agraria dell'Università di Milano, che qui sentitamente ringraziamo.

Tabella II.

Q_{O_2}/N (*Consumo in mm³ di* O_2 *per mg di* N *della sospensione batterica per 1 ora*) *delle varie specie batteriche, dovuto alla utilizzazione del substrato* (*extra consumo di* O_2 *rispetto alla respirazione di base*).

Condizioni degli esperimenti: sospensione batterica (circa 0,25 mg N/cc) cc 1; tampone PO_4 M/15 pH 7,4 cc 1; substrato M 25 cc 0,30; soluzione fisiologica fino a volume totale di 3 cc; NaOH 10 % cc 0,20 (in pozzetto centrale). Gas = aria; temperatura = 38°. Gli esperimenti erano protratti dalle 2 alle 4 ore. Nella penultima colonna a destra sono riportati i valori corrispondenti a 3 σ calcolati dalle prove di controllo, cioè quelli relativi agli scarti che comprendono il 99 % degli errori possibili con una stessa sospensione.

Specie batterica	*Glicerolo*	Na, α *glicerofosfato*	Na, β-*glicerofosfato*	α-*metilglicerolo*	β-*metilglicerolo*	*glicol etilenico*	*metilglicolo*	*acetonglicerina*	*Respirazione di base*	3 σ	*Durata dell'esperimento in ore*
	—OH —OH —OH	—OH —OH —**P**	—OH —**P** —OH	—OH —OH —**M**	—OH —**M** —OH	—OH —OH	OH —**M**	—OH >**A**			
B. paradysenteriae (Flexner)	155,5	119,5	17,4	16,4	19,6	7,6	7,1	21,2	54	6,8	2,30
B. vulgare (X 19)	863,–	461,–	28,5	69,2	20,3	5,3	1,–	17,3	55,2	6,7	2,—
D. pneumoniae	4,2	2,8	—	7,2	—	—	1,1	4,9	18	5,6	2,—
E. typhosa	335,–	197,6	29,5	41,5	17,3	5,3	6,–	15,4	44,2	17,4	4,—
E. coli	596,–	269,5	30,7	29,3	20,3	22,1	9,8	19,3	52,7	9,2	2,—
Ps. aeruginosa	728,5	149,5	15,–	48,9	22,5	—	18,8	38,3	107,–	11,8	2,—
S. marcescens	901,–	386,–	21,5	27,4	31,7	1,1	3,4	25,8	131,–	7,3	2,—
St. albus	406,–	185,–	6,4	10,3	—	—	10,6	18,–	56,–	9,–	2,—
Ac. xylinum (B. B.)	37,–	29,9	3,–	8,4	—	—	—	10,2	6,3	—	2,—
Acetobacter sp.	1,8	6	8,3	39,2	3,9	9	9,2	10,2	11,4	—	2,—

III. Commento. – Anzitutto per la valutazione dei dati esposti ci atteniamo a considerare risultati significativi quelli espressi da valori di Q_{O_2}/N superiori a 3 σ. Da questi risultati viene in primo luogo confermato ed esteso quanto abbiamo già avuto occasione di render noto e che cioè per la maggior parte delle specie esaminate si osserva una spiccata utilizzazione ossidativa del glicerolo e dell'α–glicerofosfato. I valori maggiori si sono ottenuti in *Bact. paradysenteriae*, *Bact. vulgare*. *E. typhosa*, *E. coli*, *Ps. aeruginosa* e *Serratia marcescens*. Si è pure confermato che quasi sempre il consumo di O_2 in presenza di glicerolo non esterificato è maggiore di quello dovuto all'α–glicerofosfato.

Il β–glicerofosfato ha dato costantemente un valore di ossidazione notevolmente inferiore a quello relativo all'isomero α, fino a raggiungere in qualche caso i valori limiti rappresentati dagli errori possibili.

Interessanti sono, in paragone a questi relativi agli esteri fosforici del glicerolo, i valori di Q_{O_2}/N ottenuti con i due isomeri dell'etere metilico dello stesso alcool. Infatti in linea generale si sono avuti valori bassi, ma non affatto insignificanti, e quasi costantemente valori più alti con l'α–metiletere che col corrispondente β–isomero, confermandosi con ciò, sia pure in scala ridotta, l'importanza della presenza dei due *ossidrili vicini* per l'attacco ossidativo di queste molecole da parte dei germi.

Ma quello che più conta mettere in evidenza è che di fronte al forte consumo di O_2 verificabile in presenza di α–estere del glicerolo abbiamo una bassa o nulla utilizzazione dell'α–etere. Il che dimostra che se l'utilizzazione della molecola del glicerolo è condizionata dalla presenza di ossidrili vicinali, non è d'altra parte indifferente alla natura del radicale che lega uno degli ossidrili [2], non potendo in alcun modo il radicale metilico dare gli stessi risultati che si ottengono in presenza del radicale fosforico.

Ciò porta ad avvalorare l'ipotesi che la molecola del glicerolo venga, nelle condizioni esposte, utilizzata previa fosforilazione; ipotesi che è oggetto di ulteriori nostre ricerche in corso.

Avvalorano queste considerazioni il risultato avuto con gli altri composti presi in esame e che presentano solo ossidrili primari liberi e precisamente il glicol etilenico, l'etere metilico del medesimo e l'aceton-glicerina. Il glicol etilenico ha due ossidrili vicinali, ma, come si vede, non può essere sensibilmente ossidato (eccezion fatta per l'*E. coli* che riesce ad utilizzarlo in scarsa misura), verosimilmente poichè la vicinalità degli ossidrili non è integrata dalla fosforilazione, e, quando questa abbia luogo, porterebbe alla perdita di quella prima condizione necessaria all'ossidazione. L'etere metilico del glicolo (α–ossi, β–metossietano) si comporta analogamente al composto non eterificato, e ciò rientra nel suddetto schema interpretativo. L'acetonglicerina, che ha un solo ossidrile libero, non smentisce in linea generale i

(2) È vero che in questo caso si era in presenza di due composti appartenenti a due categorie chimiche diverse; ma quanto sappiamo sui prodotti di ossidazione ci autorizza a ritenere che il legame estereo o quello etereo non incide sul tipo dell'ossidazione stessa che porterebbe in ogni caso a derivati del diossiacetone (Cfr. I. St. Neuberg).

risultati precedenti, sebbene si possa notare una tendenza a dare valori più alti di Q_{O_2} rispetto al gruppo del glicolo, specie con *Ps. aeruginosa*, mai superiori però a quelli riscontrati con l'α–metilglicerolo. In ogni modo non è improbabile che in questo caso abbia luogo una minima scissione del composto durante l'esperimento, nè d'altra parte è da trascurarsi la configurazione molto diversa di questa molecola rispetto ai semplici esteri ed eteri già considerati.

Queste le considerazioni generali sui nostri esperimenti. Per quanto riguarda il comportamento comparativo delle singole specie è evidente che vi sono scarti notevolissimi anche con i substrati meglio utilizzati a seconda della particolare *esigenza* del germe. Così di fronte alla vivace respirazione di germi poco esigenti (*B. vulgare*, *E. coli*, *Ps. aeruginosa*, *S. marcescens*) si passa a germi particolarmente esigenti quali il *Diplococcus pneumoniae* e lo *Staph. albus* che dànno i minori valori (il pneumococco, nelle nostre condizioni, dimostra di non attaccare alcuno dei substrati usati) i quali si sono avuti anche con le due specie di *Acetobacter* che dimostrano in genere una assai scarsa attività respiratoria la quale si mantiene tale anche in ricerche allestite ad un pH più idoneo per queste specie (pH 6). Riguardo al pneumococco i risultati praticamente nulli ottenuti con i nostri substrati confermano quanto già è stato osservato con questo germe anche in ricerche anaerobiche e con altri substrati (Jörg, 1939). Per ciò che concerne l'*Acetobacter* è degno di nota il rilievo che con una delle specie usate si è avuta una sensibile ossidazione dell'α–metiletere del glicerolo e nessuna utilizzazione di tutti gli altri substrati. L'*Acet. xylinum* invece utilizzava in misura pressochè uguale solo la glicerina e l'α–glicerofosfato. Nella letteratura troviamo i dati di I. St. Neuberg (1932) che dimostrano infatti la possibilità di trasformare con *Acet. suboxydans* l'α–metiletere del glicerolo nel monometiletere del diossiacetone; all'opposto non troviamo concordanti con i nostri i dati già ricordati di Tosic che, sempre con *Acetobacter* (*sp.*?), ha visto ossidare il glicerolo e non l'α– e il β–glicerofosfato. Vero è che si attende ancora una precisa sistematica degli *Acetobacter*.

Riferimenti bibliografici.

J. H. Quastel e W. R., Wooldridge, « Biochem. J. », *21*, 148 (1927).
J. H. Quastel e W. R. Wooldridge, Ibid., *21*, 1224 (1927).
J. Tikka, « Biochem. Zeitschr. », *279*, 264 (1935).
H. G., Wood, W. P. Wiggert e C. H. Werkman, « Enzymologia », *2*, 373 (1938).
J. Tosic, « Biochem. J. », *40*, 209 (1946).
E. Bonetti e M. Aloisi, « Boll. Soc. Ital. Biol. Sper. », *22*, fasc. 7 (1946).
K. A. C. Elliott, *Biological Oxidation–Reduction Catalysts*, in Schwab, *Handbuch der Katalyse*, III, Biokatalyse, p. 420; Vienna, Springer, 1941.
K. Bernhauer, *Oxydative Gärungen*, in F. F. Nord e R. Weidenhagen, *Handbuch der Enzymologie*, Ak. Verl. G., Lipsia, 1940.
M. Aloisi e E. Bonetti, « La Ricerca Scientifica », *17*, 181 (1947).
L. H. Cretcher e W. H. Pittinger, « J. Am. Chem. Soc. », *46*, 1503 (1924).
E. Fischer e E. Pfähler, « Ber. Deut. Chem. Ges. », *53*, 1606 (1920).
H. Jörg, « Zbl. Bakter. », I, Orig., *145*, 314 (1940).
I. St. Neuberg, « Biochem. Zeitschr. », *238*, 459 (1931); *255*, 1 (1932).

Antropologia. — *La statura degli italiani ventenni nati dal 1854 al 1920*[*]. Nota riassuntiva di A. COSTANZO, presentata[**] dal Corrisp. S. SERGI.

Il materiale antropometrico militare che si è venuto accumulando nel nostro Paese in occasione delle operazioni di leva permette ormai di indagare intorno alle variazioni verificatesi nella statura media della popolazione maschile ventenne attraverso un periodo di tempo sufficientemente lungo, e tale comunque che i risultati della ricerca possono rivestire un notevole interesse dal punto di vista della scienza antropologica.

È appunto in vista di questo interesse che abbiamo ritenuto opportuno elaborare il materiale di cui trattasi. Rimandando per più ampi ragguagli alla Memoria originale[1] in corso di pubblicazione per cura dell'Istituto Centrale di Statistica, ci limiteremo ad esporre quì in forma schematica taluni dei principali risultati cui siamo pervenuti.

1. Onde avere dei dati comparabili nel tempo, occorre anzitutto eliminare gli effetti, sulla statura, della diversa età media al momento della visita militare, che è variata entro limiti piuttosto ampi durante il lungo periodo considerato. Mentre, infatti, i nati nel 1900 vennero visitati all'età di 18 anni meno qualche mese, quelli nati nel primo ventennio circa del periodo in esame lo furono ad un'età di qualche mese superiore ai vent'anni. Questi ultimi presentavano dunque al momento della visita militare un'età media di circa due anni e mezzo maggiore di quella dei primi, in una fase dello sviluppo in cui la statura non ha raggiunto il suo assetto definitivo.

Abbiamo cercato di eliminare empiricamente l'azione perturbatrice di questa circostanza riportando la statura media effettiva all'età precisa di venti anni in base alle seguenti ipotesi: *a*) che gli inscritti di leva nati in un determinato anno si distribuiscano uniformemente, secondo la data di nascita, durante l'anno; *b*) che essi siano stati visitati, in media, alla metà precisa dell'intervallo compreso fra la data di apertura e quella di chiusura della sessione di leva, e comunque non oltre il 60° giorno dall'apertura della stessa; *c*) che gli incrementi di statura, tra i 18 e i 24 anni, dei maschi italiani siano stati uguali a quelli indicati nel prospetto seguente, osservati dal Mackeprang su un gruppo di maschi danesi[2]:

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Centrale di Statistica, Roma.

(**) Nella seduta del 12 aprile 1947.

(1) A. COSTANZO, *La statura degli italiani ventenni nati dal 1854 al 1920*, in « Annali di Statistica », serie VIII, vol. II, Roma 1947.

(2) E. PH. MACKEPRANG, *Height of the Danish Conscripts*, in « Meddelelser om Danmarks Antropologi », I Bind, Köbenhavn, 1907–1911.

Età (anni)	Incremento medio annuo della statura (cm.)
18 19	1,03
19-20	0,80
20–21	0,47
21–22	0,20
22–23	0,07
23–24	0,03

Occorre inoltre avvertire che per le classi di leva dal 1854 al 1873 non viene fatta, nelle Relazioni sulle leve, alcuna distinzione fra i nati in un determinato anno e quelli rimandati dalle leve precedenti, mentre per quelle sui nati dal 1874 al 1910 sono fornite le due distribuzioni delle stature, comprendendo ed escludendo i rimandati dalle leve precedenti, e a cominciare dalla leva sui nati nel 1911 nessuna indicazione viene più fornita circa la statura di questi ultimi.

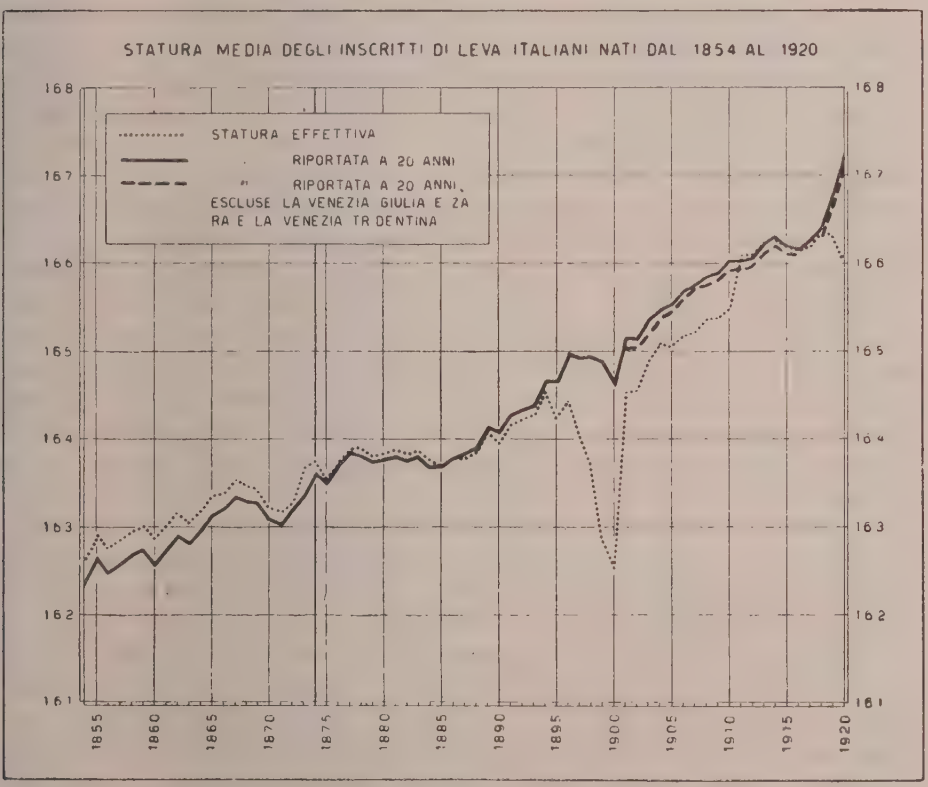
Per calcolare la presumibile intensità media della statura a vent'anni di tutti gli inscritti di leva delle classi dal 1854 al 1873 abbiamo seguìto lo stesso procedimento dianzi indicato, con l'avvertenza però che in tale caso l'età media alla visita militare è stata calcolata ammettendo, in via di larga approssimazione, che i rimandati dalle leve precedenti avessero esattamente uno o due anni in più degli altri, a seconda che erano rivedibili per la prima o per la seconda volta. Evidentemente con tale accorgimento non si sono potute eliminare le conseguenze derivanti dal fatto che i rimandati, oltre ad avere una età maggiore, rappresentano anche un gruppo fisicamente selezionato, nel quale tra l'altro mancano quasi del tutto le stature bassissime ed è probabile che si riscontri invece una frequenza relativamente più elevata di stature prossime al valore minimo richiesto per l'idoneità militare. Comunque, appare fondata la persuasione che questa causa di errore abbia carattere quasi sistematico e che non alteri sensibilmente le conclusioni cui si arriva sulla scorta dei dati di cui trattasi.

2. Nella Tabella I – estratta da quella più ampia contenuta nella Memoria originale – sono esposti i risultati cui siamo pervenuti seguendo il criterio ora accennato. I dati contenuti in detta tabella sono illustrati nel grafico.

Senza scendere in dettagli, rileveremo semplicemente che: *a*) la statura media dei *nati* nel 1920 (pari a cm. 167,21) superava di cm. 4,82 quella degli *inscritti di leva* della classe 1854 (pari a cm. 162,39); *b*) questa differenza è, sia pure lievemente, maggiore di quella effettiva. Occorre, infatti, diminuirla della differenza esistente tra la statura media a vent'anni dei soli nati nell'anno e quella di tutti gli inscritti di leva, compresi quelli rimandati dalle leve precedenti. Poichè questa differenza è risultata, per le classi dal 1874 al 1883, uguale a cm. 0,10–0,12, *si può ritenere che nel giro di 67 anni la statura media a vent'anni dei maschi italiani sia aumentata di cm. 4,70 circa;* *c*) l'aumento è stato continuo attraverso il tempo. Esso non è stato però uniforme. Di fronte ad un aumento di cm. 3,12 realizzato dai nati nel 1920

rispetto a quelli nati nel 1890 sta, infatti, un aumento di soli cm. 1,70 realizzato da questi ultimi rispetto agli *inscritti di leva* della classe 1854 e quindi, tenuto conto di quanto esposto sub *b*), un aumento presumibile di soli cm. 1,60 circa rispetto ai *nati* nel 1854.

3. I dati relativi ai nati dal 1901 in poi non sono rigorosamente confrontabili con quelli relativi ai nati negli anni precedenti, comprendendo essi anche gli inscritti di leva della Venezia Giulia e Zara e della Venezia Tridentina, prima esclusi e notoriamente dotati di più alta statura media.



Onde eliminare gli effetti di questa circostanza perturbatrice abbiamo calcolato la statura media a vent'anni della popolazione maschile italiana escludendo gli inscritti di leva delle due indicate Regioni. Come risulta dal grafico, le nuove medie si mantengono costantemente, ma solo leggermente, inferiori a quelle prima calcolate, senza che per altro nulla muti nella tendenza all'aumento della statura media che abbiamo dianzi osservata.

4. Potrebbe sospettarsi che l'aumento messo in evidenza sia, in tutto o in parte, apparente e dovuto ad un eventuale aumento attraverso il tempo dell'importanza relativa del numero degli inscritti di leva delle Regioni la cui popolazione è caratterizzata da più alta statura media. Abbiamo cercato

di valutare la rispondenza o meno alla realtà di detta ipotesi mediante il metodo della popolazione tipo, calcolando cioè quale sarebbe stata la statura media effettiva degli inscritti di leva nati nel 1918 (visitati all'età di circa 20 anni), qualora la distribuzione percentuale degli stessi secondo la Regione di appartenenza fosse rimasta identica a quella avutasi per i nati nel 1874, pure visitati all'età di circa venti anni. Ne è risultato un valore teorico di cm. 166,27, praticamente uguale a quello di cm. 166,24 dianzi trovato per i nati nel 1918 escludendo gli inscritti di leva della Venezia Giulia e Zara e della Venezia Tridentina.

5. L'aumento della statura dei maschi italiani all'età di venti anni appare, dunque, effettivo. Esso non è stato uguale in tutte le Regioni. Gli incrementi osservati in ciascuna di queste tra il 1874 e il 1918 (il confronto è stato eseguito fra i *nati* in detti anni giacchè, trattandosi di soggetti misurati all'età di venti anni, tale scelta ci ha dispensati dalla necessità di correggere le stature effettive sulla base dei criteri dianzi esposti, la cui applicazione nel caso delle Regioni singole sarebbe apparsa meno giustificata) variano sensibilmente, e da valori abbastanza bassi per le Puglie (cm. 1,28) e le Marche (cm. 1,72) si passa a valori relativamente elevati per la Toscana (cm. 3,17), il Piemonte (cm. 3,56) e la Liguria (cm. 3,68). L'aumento inoltre non è stato maggiore nelle Regioni che avevano inizialmente una statura media minore. Sembra piuttosto che si sia verificata una tendenza, per quanto non molto pronunciata, in senso opposto, tanto che le Regioni stesse si sono ulteriormente differenziate secondo l'intensità di questo carattere. Risulta infatti $\Delta = 2{,}39$ per i nati nel 1874 e $\Delta = 2{,}71$ per i nati nel 1918.

6. Può affermarsi che l'aumento – effettivo – della statura a vent'anni sia specchio e misura di un analogo aumento verificatosi nella statura della popolazione maschile italiana nell'età in cui la statura stessa ha raggiunto il suo assetto definitivo?

Come è noto, i pareri sono discordi ed è stato da taluno sostenuto che il progressivo miglioramento delle condizioni ambientali ha avuto semplicemente l'effetto di accelerare l'accrescimento della statura in funzione dell'età anzichè quello di provocare un aumento definitivo della stessa all'età adulta.

Non si hanno dati che permettano di risolvere in modo sicuro la questione. Gli elementi di cui si dispone inducono tuttavia a ritenere che un aumento della statura media all'età adulta attraverso il tempo ci deve essere indubbiamente stato. Non si potrebbero infatti ragionevolmente spiegare in base a detta ipotesi – e trattasi appunto di semplice ipotesi non convalidata da fatti sicuri – aumenti così sensibili quali sono quelli che si sono talora riscontrati per talune popolazioni. Ad esempio per i maschi ventenni di Casale Monferrato (Piemonte), come abbiamo in altra Memoria dimostrato, l'aumento della statura ha raggiunto i cm. 9 e mezzo nel giro di 130 anni, e questo aumento, benchè in misura leggermente minore, si è verificato anche per i ventenni appartenenti alle condizioni sociali più elevate.

Tabella I.

Statura media degli inscritti di leva nati dal 1854 al 1920.

Anno di nascita	Statura media		Anno di nascita	Statura media	
	al momento della visita militare	riportata a 20 anni		al momento della visita militare	riportata a 20 anni
	Compresi i rimandati dalle leve precedenti		1886	163,79	163,79
1854	162,64	162,39	1887	163,78	163,83
1855	162,90	162,66	1888	163,85	163,90
1856	162,74	162,48	1889	164,08	164,13
1857	162,85	162,58	1890	163,98	164,09
1858	162,94	162,68	1891	164,17	164,28
1859	163,01	162,74	1892	164,22	164,33
1860	162,85	162,58	1893	164,27	164,38
1861	163,01	162,75	1894	164,55	164,66
1862	163,19	162,90	1895	164,24	164,66
1863	163,07	162,82	1896	164,44	164,98
1864	163,20	162,98	1897	164,08	164,93
1865	163,36	163,13	1898	163,73	164,94
1866	163,39	163,21	1899	162,88	164,89
1867	163,54	163,34	1900	162,53	164,66
1868	163,48	163,31	1901	164,54	165,15
1869	163,43	163,29	1902	164,56	165,14
1870	163,23	163,10	1903	164,89	165,36
1871	163,19	163,04	1904	165,08	165,49
1872	163,30	163,21	1905	165,05	165,54
1873	163,68	163,36	1906	165,18	165,69
			1907	165,22	165,76
	Esclusi i rimandati dalle leve precedenti		1908	165,37	165,85
1874	163,75	163,61	1909	165,39	165,90
1875	163,57	163,52	1910	165,50	166,03
1876	163,74	163,72	1911	166,10	166,04
1877	163,89	163,84	1912	166,12	166,07
1878	163,91	163,82	1913	166,23	166,23
1879	163,82	163,76	1914	166,27	166,31
1880	163,84	163,76	1915	166,19	166,20
1881	163,88	163,80	1916	166,15	166,16
1882	163,84	163,76	1917	166,20	166,26
1883	163,88	163,80	1918	166,34	166,40
1884	163,77	163,69	1919	166,34	166,80
1885	163,70	163,70	1920	166,04	167,21

Riteniamo pertanto, anche sulla base di elementi che per brevità non possiamo qui richiamare, che l'aumento della statura osservato attraverso le successive generazioni nei maschi italiani ventenni dia una misura non molto errata per eccesso dell'aumento verificatosi nella statura media della popolazione maschile all'età del raggiunto completo sviluppo in altezza.

7. Quali le cause di questo fenomeno caratteristico, che trova riscontro in misura maggiore o minore presso tutte le popolazioni per le quali i dati disponibili hanno permesso di tentare un calcolo analogo a quello fatto per l'Italia ?

È noto che svariati fattori, e sopratutto il miglioramento delle condizioni ambientali, l'ibridismo e la selezione sessuale, sono stati chiamati in causa. È probabile che ognuno di questi abbia il suo peso nello spiegare l'aumento della statura degli italiani. Vogliamo soltanto accennare alla possibilità, oramai facilmente ammissibile dopo le conclusioni cui hanno portato gli studi di carattere costituzionalistico, che il progressivo miglioramento delle condizioni ambientali, la cui azione è probabilmente di gran lunga prevalente su quella degli altri fattori testè ricordati, abbia agito non solo direttamente, influendo sulla struttura scheletrica della popolazione, ma anche indirettamente. Dell'accennato miglioramento avrebbero, infatti, beneficiato tutti quanti i soggetti, ma particolarmente quelli più deboli, che secondo i costituzionalisti sarebbero appunto, almeno intorno ai vent'anni, quelli più alti: la selezione mortuaria avrebbe quindi risparmiato una frazione via via crescente di costoro, col risultato di concorrere anche per questa via ad accrescere la statura media della popolazione maschile ventenne.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note e Memorie per la pubblicazione negli Atti accademici i Soci: Vernoni, Cantelli, Rolla, Cotronei, Signorini, Picone, Carrelli, Checchia-Rispoli, Bompiani, Puntoni, Armellini.

L'Accademico Segretario legge l'elenco delle Note inviate.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

Checchia-Rispoli G., « Sull'esistenza del Maestrichtiano nella Migiurtinia ».

Sacco F., « L'età del "Macigno" ».

Silva G., « Moto dei satelliti attorno al Sole. Parte III. Pianeta e satellite con orbite circolari su piani comunque inclinati ».

Zagar F., « Sulla variabilità del nucleo della nebulosa della Lira ».

Aloisi M. e Buffa P., « Il comportamento batterico in presenza delle etanolamine e della colina » (pres. dal Corrisp. G. Vernoni).

Bianchi G., « Comportamento anodico dello stagno in soluzioni alcaline ». Nota IV (pres. dal Socio N. L. Lombardi).

Biocca E. e Ippolito M., « Ricerche chimico-biologiche sulla composizione del curaro Makù. Nota II (pres. dal Corrisp. V. Puntoni).

Capetti A., « Considerazioni sulle turbine a gas a ciclo semichiuso » (pres. dal Socio M. Panetti).

Cinquini Cibrario M., « Una proprietà delle superficie integrali delle equazioni non lineari di ordine *n* di tipo iperbolico » (pres. dal Socio E. Bompiani).

Codegone C., « Sul funzionamento degli eiettori » (pres. dal Socio M. Panetti).

Dallaporta N., « Teoria semiclassica dei processi multipli » (pres. dal Corrisp. E. Persico).

Faedo S., « Sulla stabilità delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari ». Nota II (pres. dal Socio M. Picone).

Faedo S., « Sulla stabilità delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari ». Nota III (pres. dal Socio M. Picone).

Fumi F., « Sugli operatori matriciali di simmetria macroscopica » (pres. dal Corrisp. C. Perrier).

Gerola F. M., « Escreti fungini e mitosi cellulari ». Nota III (pres. dal Socio G. Gola).

Giacomini A., « Sulla misura delle lunghezze d'onda ultrasonore mediante due fasci di onde progressive » (pres. dal Socio L. Lombardi).

Ippolito F., « Intorno ai criteri di ricerca per energia geotermica » (pres. dal Corrisp. G. D'Erasmo).

Lombardo Radice L., « Il difetto di regolarità di un gruppo finito rispetto a un divisore primo del suo ordine » (pres. dal Socio E. Bompiani).

Marcus F., « Sopra una classe di congruenze di rette proiettivamente applicabili » (pres. dal Socio E. Bompiani).

Montanaro Gallitelli E., « Argillificazione del diabase e genesi di alcune argille scagliose rosse appenniniche » (pres. dal Corrisp. G. Checchia-Rispoli).

Monterosso B., « Note araneologiche. – XXVI. Del modo con cui i Ragni dei gen. *Scytoydes* e *Loxoscelles* catturano la preda » (pres. dal Socio A. Russo).

Olivelli G., « Sulle frange di interferenza di Selény » (pres. dal Socio U. Panichi).

Ottaviani G., « Su una equazione integrale della Statistica Matematica » (pres. dal Corrisp. F. P. Cantelli).

Penso G. e Scanga F., « Studi sul meccanismo d'azione della Streptomicina. I. Alterazioni dell'Escheriochia coli, in fase biotica e trattata colla Streptomicina, osservate al microscopio elettronico » (pres. dal Corrisp. V. Puntoni).

Schreiber G., « Le grandezze nucleari nella spermatogenesi e la "Sesquifase" nella intercinesi spermatogoniale » (pres. dal Socio G. Gola).

Supino G., Su l'analisi dimensionale e la teoria dei modelli ». Nota I (pres. dal Socio A. Signorini).

SUPINO G., « Su l'analisi dimensionale e la teoria dei modelli ». Nota II (pres. dal Socio A. SIGNORINI).

TARANTA M. P., « L'assunzione di ossigeno durante lo sviluppo larvale e la metamorfosi di *Bufo vulgaris* » (pres. dal Corrisp. G. COTRONEI).

TORALDO DI FRANCIA G., « Il teorema di Malus–Dupin generalizzato e la trasformazione dell'interferenza inversa » (pres. dal Socio G. ABETTI).

TORTONESE E., « Ricerche zoologiche nel canale di Suez e dintorni I. Echinodermi » (pres. dal Socio F. SACCO).

VIGHI L., « Sul metamorfismo di due lenti carbonatiche delle valli del Busento e dello Jassa (Cosenza) » (pres. dal Socio R. FABIANI).

VINACCIA G., « Sull'insolazione intertropicale delle superfici poliedriche » (pres. dal Socio G. ARMELLINI).

ZWIRNER G., « Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali. Alcune applicazioni al problema di Niccoletti per le equazioni differenziali a derivate parziali di tipo iperbolico » (pres. dal Socio M. PICONE).

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 10 maggio 1947

BOSELLI F. B. — *Osservazioni biologiche sul «Dociostaurus Maroccanus» Thnb. in Sardegna.* I.–Correlazione fra periodicità delle infestazioni di «Dociostaurus Maroccanus» Thnb. e precipitazioni atmosferiche. Sassari, Tip. Gallizzi, 1946. Pp. 32, in-8°, con tavv.

GIACOMELLI Raffaele. — *Bomba atomica e distruzione in massa.* Roma, Editoriale Aeronautico, 1947. Pp. 55, in-8°.

— *Il terrorismo aereo nella teoria e nella realtà.* Roma, Ass. It. d'Aerotecnica, 1945. Pp. X–155, in–4°.

— *La bomba atomica e le sue conseguenze.* Aggiunta al volume «Il terrorismo aereo nella teoria e nella realtà». Estr. da «L'Aerotecnica», vol. XXV, 1945, n. 2.

IMBRIGHI Gastone. — *Osservazioni sul carsismo del monte Sant'Elia presso Riofreddo (Lazio).* Tip. poliglotta Vaticana, 1947. Pp. 6, in–8°.

SHNEIDEROV Anatol James. – *Earthquakes on the expanding earth.* Estr. da «Transactions of the American Geophysical Union», 1944.

— *Nuclear fission bomb as initiator of earthquakes.* Estr. da «Science», vol. CIII, 1946, n. 2683.

— *Some reflections on the cause of heat and cold.* Estr. da «Science», vol. CIII, 1946, n. 2677.

— *The exponential law of gravitation and its effects on seismological and tectonic phenomena: a preliminary exposition.* Estr. da «Transactions of the American Geophysical Union», 1943.

— *Transactions, American Geophysical Union. New Service of Geodetic Survey.* Estr. da «Transactions of the American Geophysical Union», 1944.

TERRACINI Alejandro. — *Algunas observaciones elementales sobre la realidad de las raíces de una ecuación algebraica.* Estr. da «Mathematicale notae», a. IV, fasc. 3.

TERRACINI Alejandro. — *Aportes al estudio geométrico de la ecuación diferencial* $y''' = F(x, y, y') + G(x, y, y')\, y'' + H(x, y, y')\, y''^2$. Estr. da «Revista de la Universidad Nacional de Tucuman», vol. III, 1942, n. 1.

— *El invariante de Mehmke–Segre y los sistemas lineales.* Estr. da «Anales de la Sociedad Científica Argentina», t. CXXIX, 1940.

— *Guido Fubini* (1879–1943). Estr. da «Revista de la Unión matemàtica Argentina», vol. X, 1944, n. 1.

— *Las variedades de Grassmann y las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden en el caso de mas variables independientes.* Estr. da «Revista de la Universidad Nacional de Tucumán», vol. IV, 1944, n. 1–2.

— *Los* S_3 *osculadores a las curvas de una variedad y nueva caracterización de una clase de variedades.* Estr. da «Revista de la Universidad Nacional de Tucuman», volume, III, 1942, n. 2.

— *Nuevos puntos de vista geométricos vinculados con los elementos superficiales y las ecuaciones en derivadas parciales de 2° orden.* Estr. da «Revista de la Universidad Nacional de Tucuman», vol. IV, 1944, n. 1–2.

— *Propuesta de institución de un Comité central para informaciones bibliográficas matemáticas.* Estr. da «Revista de la Universidad Nacional de Tucuman», vol. III, 1942, n. 2.

— *Sobre algunos lugares geométricos.* Buenos Aires, 1941. Pp. 11, in–8°. (Union Matemática Argentina. Publicación n. 22.).

— *Sobre algunos sistemas de ecuaciones diferenciales de tercer orden.* Est. da «Anais da Academia Brasileira de Ciencias», t. XVI, 1944, n. 3.

— *Sobre la ecuación diferencial* $y''' = G(x, y, y')\, y'' + H(x, y, y')\, y''$. Estr. da «Revista de la Universidad Nacional de Tucumán», vol. II, 1941, n. 1–2.

Terracini Alejandro. — *Sobre la existencia de superficies cuyas líneas principales son dadas*. Buenos Aires, 1940. Pp. 22, in-8°. (Union Matemática Argentina. Publicación n. 16).

Sobre las ecuaciones diferenciales de Monge-Ampère. Estr. da « Publicaciones del Instituto de Matemática de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional del Litoral », vol. V, 1943.

— *Tangentes a la curva de contacto de una superficie dada y de una superficie reglada con dos directrices rectilíneas*. Estr. da « Revista de la Unión Matemática Argentina », vol. IX, 1943.

— *Un primer aporte a la geometría de los polinomios monodífricos*. Estr. da « Actas de la Academia Nacional de Ciencias, Exactas, Físicas y Naturales de Lima », volume VIII, a. VIII, 1945, fasc. 4.

— *Un procedimento para la resolución numérica de los sistemas de ecuaciones lineales*. Estr. da « Revista electrotécnica », 1941, novembre.

U. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta dell'11 giugno 1947.

Presidenza del Socio G. CASTELNUOVO

NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sulla traduzione in equazione integrale lineare di prima specie dei problemi al contorno concernenti i sistemi di equazioni lineari a derivate parziali* (*). Nota (**) del Socio M. PICONE.

Questa Nota completa le due precedenti, dallo stesso titolo, apparse nei fascicoli di aprile e di maggio di questi « Rendiconti », delle quali prosegue la numerazione degli articoli, dei teoremi, delle formole e delle note a pie' di pagina.

5. SUL SISTEMA DELL'EQUILIBRIO DEI CORPI ELASTICI. – Sia D il dominio regolare dello spazio $S_{(3)}$, occupato da un corpo elastico, isotropo e omogeneo, quando non sia sollecitato da forze, U lo spostamento subìto dal suo punto $P(x_1, x_2, x_3)$ sotto assegnati vincoli alla frontiera e sollecitazioni, F(P) la contraria della forza, per unità di volume, applicata nel punto P. Lo spostamento U riesce un vettore della classe $\{U\}$ che, in $D - \mathfrak{F}D$ verifica il sistema (autoaggiunto e simmetrico) (5), con

$$E_{hk} \begin{cases} = q\,\partial^2/\partial x_h\,\partial x_k & , \text{ per } h \neq k, \\ = p\Delta + q\,\partial^2/\partial x_k^2 & , \text{ per } h = k, \end{cases}$$

ove $\Delta = \operatorname{div}\operatorname{grad}$ e p e q sono costanti positive. Il teorema di reciprocità del Betti fornisce, per ogni vettore V di $\{U\}$.

$$\int_D U \times E[V]\,dT = \int_D F \times V\,dT + \int_{\mathfrak{F}D} (V \times L[U] - U \times L[V])\,d\sigma,$$

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto nazionale per le applicazioni del calcolo.

(**) Presentata nella seduta dell'8 marzo 1947.

ove, detto N il vettore unitario che, in ogni punto regolare di $\mathfrak{F}D$, ha la direzione e il verso dell'asse normale ivi alla $\mathfrak{F}D$, penetrante nell'interno di D, L [U] è un vettore che ha le componenti

$$L_h[U]=p\frac{du_h}{dN}+\frac{q}{2}\left(\operatorname{div} U\cos(x_h,N)+\frac{\partial U}{\partial x_h}\times N\right)=\sum_{k=1}^{3}L_{hk}[u_k],\quad (h=1,2,3),$$

con

$$L_{hk}[u_k]\begin{cases}=p\dfrac{du_h}{dN}+q\dfrac{\partial u_h}{\partial x_h}\cos(x_h,N)\,, & \text{per } k=h,\\[2ex] =\dfrac{q}{2}\left[\dfrac{\partial u_k}{\partial x_k}\cos(x_h,N)+\dfrac{\partial u_k}{\partial x_h}\cos(x_k,N)\right], & \text{per } k\neq h.\end{cases}$$

Posto $\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2=\delta^2$, $p+q=s$, risulta $a=sp^2\delta^6$,

$$a_{hk}\begin{cases}=p\delta^2+q\xi_h^2 & ,\\ =q\xi_h\xi_k & ,\end{cases}\qquad a'_{hk}\begin{cases}=p\delta^2(s\delta^2-q\xi_h^2), & \text{per } h=k,\\ =-pq\delta^2\xi_h\xi_k & , \text{per } h\neq k,\end{cases}$$

e per una matrice fondamentale, assunta come unità di misura delle lunghezze la semidimensione di un cubo, a lati paralleli agli assi coordinati, contenente D,

$$g_{lk}(P,P')\sim\frac{1}{8ps\pi^2}\left(v_{lk}(P')+\sum_{\lambda_1}^{-\infty,+\infty}\sum_{\lambda_2\lambda_3}^{(0)}A_{lk}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\,e^{\pi i\sum\lambda_s(x_s-x'_s)}\right),$$

ove

$$v_{lk}(P')\begin{cases}=sp\dfrac{\pi^2}{2}x'^2_l & ,\\ =0 & ,\end{cases}\qquad A_{lk}\begin{cases}=\dfrac{q\lambda_l^2-s(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)}{(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)^2}, & \text{per } l=k,\\[2ex] =\dfrac{q\lambda_l\lambda_k}{(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)^2} & , \text{per } l\neq k.\end{cases}$$

Già, da ben sessant'anni, Somigliana ha dato, per il sistema dell'elasticità, e in termini finiti, una semplicissima matrice fondamentale, del tutto sufficiente per la teoria. Quella qui ora data ha ragion d'essere per le necessità del calcolo numerico.

Poichè a'_{hk} e a possiedono il fattore comune $p\delta^2$, posto $a''_{hk}=a'_{hk}/p\delta^2$, detto V_l il vettore che ha per componenti

$$(33)\qquad v_{lh}=a''_{lh}e^{\sum\xi_s x_s},\qquad (l,h=1,2,3)$$

la (23), postovi $-\xi_s$ in luogo di ξ_s, fornisce

$$(34)\qquad E_k[V_l]\begin{cases}=sp(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)^2e^{\sum\xi_s x_s}, & \text{per } k=l,\\ =0 & , \text{per } k\neq l,\end{cases}$$

e la (29) la divisibilità della trascendente intera

$$(35)\quad \Phi_l(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\int_D F\times V_l\,dT+\int_{\mathfrak{F}D}(V_l\times L[U]-U\times L[V_l])\,d\sigma,\quad (l=1,2,3),$$

per il polinomio δ^t. Ora, evidentemente, condizione necessaria e sufficiente affinchè sussista tale divisibilità è che si abbia

$$(36) \qquad \left[\frac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\Phi_l}{\partial\xi_1^{\lambda_1}\partial\xi_2^{\lambda_2}\partial\xi_3^{\lambda_3}}\right]_0 = 0, \quad \text{per} \quad \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \leqq 3,$$

e che, per ogni numero naturale $\nu \geqq 2$, esistano $\nu(\nu-1)/2$ costanti $c_{\mu_1\mu_2\mu_3}$ $(\mu_1 \geqq 0, \mu_2 \geqq 0, \mu_3 \geqq 0, \mu_1+\mu_2+\mu_3 = \nu-2)$ per le quali risulti

$$\sum_{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\nu+2}\left[\frac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\Phi_l}{\partial\xi_1^{\lambda_1}\partial\xi_2^{\lambda_2}\partial\xi_3^{\lambda_3}}\right]_0 \frac{\xi_1^{\lambda_1}}{\lambda_1!}\frac{\xi_2^{\lambda_2}}{\lambda_2!}\frac{\xi_3^{\lambda_3}}{\lambda_3!} = (\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)^2 \sum_{\mu_1+\mu_2+\mu_3=\nu-2} c_{\mu_1\mu_2\mu_3}\,\xi_1^{\mu_1}\xi_2^{\mu_2}\xi_3^{\mu_3}.$$

Perchè abbia luogo quest'ultima identità è necessario e sufficiente che le $(\nu+3)(\nu+4)/2$ derivate d'ordine $\nu+2$ della Φ_l, calcolate per $\xi_1=\xi_2=\xi_3=0$, siano certe combinazioni lineari, con coefficienti interi, delle $c_{\mu_1\mu_2\mu_3}$, ciò che ha di conseguenza il verificarsi di $4\nu+6$ relazioni del tipo

$$(37) \qquad \sum_{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\nu+2} q_{s\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\left[\frac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\Phi_l}{\partial\xi_1^{\lambda_1}\partial\xi_2^{\lambda_2}\partial\xi_3^{\lambda_3}}\right]_0 = 0, \qquad (\nu=2,3,\cdots; s=1,2,\cdots,4\nu+6),$$

con $q_{s\lambda_1\lambda_2\lambda_3}$ determinati numeri interi. Posto

$$\sum_{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\nu+2} q_{s\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\left[\frac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}V_l}{\partial\xi_1^{\lambda_1}\partial\xi_2^{\lambda_2}\partial\xi_3^{\lambda_3}}\right]_0 = V_{l\nu s},$$

la (37) fornisce, in virtù della (35), la relazione

$$\int_D F \times V_{l\nu s}\,dT + \int_{\mathfrak{S}D}(V_{l\nu s} \times L[U] - U \times L[V_{l\nu s}])\,d\sigma = 0,$$

$$(l=1,2,3\ ;\ \nu=2,3,\cdots\ ;\ s=1,2,\cdots,4\nu+6).$$

Ma le (34) esprimono che anche $E_k[V_l]$ è divisibile per δ^t, e se ne deduce che è pure $E_k[V_{l\nu s}]=0$, e cioè che $V_{l\nu s}$ è una soluzione del sistema $E[V]=0$. Dalle (33) si trae subito che tale soluzione è polinomiale, e la diremo *omogenea e di grado* ν, per avere essa tali le sue componenti. Dimostriamo ora il teorema:

V. *Il sistema omogeneo dell'elasticità, ammette, per ogni numero intero* ν, *positivo o nullo, precisamente* $\mu_\nu = 3(2\nu+1)$ *soluzioni polinomiali omogenee di grado* ν, *linearmente indipendenti.*

La dimostrazione del teorema guadagna in semplicità se la deduciamo, come caso particolare, da quella del teorema analogo concernente sistemi più generali, in p funzioni incognite di r variabili indipendenti $x_1, \cdots, x_r$ e di p equazioni lineari, in ciascuna delle quali compaiono derivate parziali dello stesso ordine $1+n$, sono cioè, come diremo, di *equiordine* $1+n$, e possa il sistema mettersi sotto forma risoluta nelle p derivate d'ordine $1+n$, delle p funzioni incognite, fatte rispetto ad una determinata fra le r variabili $x_1, \cdots, x_r$, possa cioè, come diremo, mettersi *sotto forma della Kowalewski rispetto a quella variabile*. Sussiste, in proposito, il teorema:

VI. *Un sistema di p equazioni lineari a derivate parziali, ciascuna di equiordine $1+n$, in p funzioni incognite di r variabili, che possa mettersi nella forma della Kowalewski, possiede precisamente, per $\nu \geqq 1+n$,*

$$p\cdot\mu(\nu,r) = p\binom{r+\nu-1}{r-1} - p\binom{r+\nu-n-2}{r-1}, \tag{38}$$

soluzioni polinomiali omogenee di grado ν, linearmente indipendenti. Per $\nu < 1+n$ *ne possiede, ovviamente,*

$$p\binom{r+\nu-1}{r-1}.$$

Il sistema possa, invero, assumere la seguente forma della Kowalewski rispetto alla variabile x_1,

$$\mathrm{E}_h[\mathrm{U}] \equiv \frac{\partial^{1+n} u_h}{\partial x_1^{1+n}} - \sum_{k=1}^{p} \sum_{i_1 \leqq n} b^{hk}_{i_1 i_2 \cdots i_r} \frac{\partial^{1+n} u_k}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \cdots \partial x_r^{i_r}} = 0, \quad (h = 1, \cdots, p). \tag{39}$$

Supposto U un vettore polinomiale omogeneo di grado $\nu \geqq 1+n$, il vettore E[U] risulta polinomiale omogeneo di grado $\nu - 1 - n$ e identicamente nullo allora e allora soltanto che si abbia

$$\left[\frac{\partial^s}{\partial x_1^s} \mathrm{E}_h[\mathrm{U}]\right]_{x_1=0} = 0, \qquad (h = 1, \cdots, p \; ; \; s = 0, 1, \cdots, \nu - 1 - n). \tag{40}$$

Posto $\left[\partial^s u_k / \partial x_1^s\right]_{x_1=0} = u_k^{(s)}$, le (40) si scrivono

$$u_h^{(1+n+s)} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_r=1+n \\ i_1 \leqq n_1}} b^{hk}_{i_1 i_2 \cdots i_r} \frac{\partial^{i_2+\cdots+i_r} u_k^{(i_1+s)}}{\partial x_2^{i_2} \cdots \partial x_r^{i_r}}, \tag{41}$$

ed è perciò ben evidente che esse determinano le $u_h^{(1+n+s)}$ (per $s = 0, 1, \cdots, \nu - 1 - n$) non appena, nel modo più arbitrario, si siano prescritte le $u_k^{(s)}$, per $k = 1, \cdots, p$ e $s = 0, 1, \cdots, n$, risultando $\mathrm{U} \equiv 0$ quando e solo quando sia $u_k^{(s)} \equiv 0$ (per $k = 1, \cdots, p \; ; \; s = 0, 1, \cdots, n$). Ora $u_k^{(s)}$ è un polinomio omogeneo nelle $r-1$ variabili $x_2, \cdots, x_r$, di grado $\nu - s$ e pertanto esso è una combinazione lineare di

$$\mu(\nu, r, s) = \binom{r+\nu-s-2}{r-2}$$

monomi a due a due non simili, onde segue che la soluzione U polinomiale omogenea di grado $\nu \geqq 1+n$, del sistema (39), per la quale si ha appunto

$$u_h = u_h^{(0)} + \frac{x_1}{1!} u_h^{(1)} + \cdots + \frac{x_1^n}{n!} u_h^{(n)} + \frac{x_1^{n+1}}{(n+1)!} u_h^{(n+1)} + \cdots + \frac{x_1^\nu}{\nu!} u_h^{(\nu)}, \tag{42}$$

è una combinazione lineare (a coefficienti costanti) di cotali soluzioni, linearmente indipendenti, il cui numero è dato, precisamente, da p volte

$$\mu(\nu, r) = \sum_{s=0}^{n} \mu(\nu, r, s) = \binom{r+\nu-1}{r-1} - \binom{r+\nu-n-2}{r-1}.$$

La dimostrazione, così conseguita, fornisce anche un metodo per l'ottenimento di un sistema di $p\mu(\nu, r)$ soluzioni di $E[U] = 0$ polinomiali omogenee di grado $\nu \geqq 1 + n$, linearmente indipendenti, cioè, come diremo, di *un sistema fondamentale di soluzioni polinomiali omogenee di grado* ν. Si assegni una numerazione a tutti i monomi che compaiono in tutte le $u_k^{(s)} (k = 1, 2, \cdots, p; s = 0, 1, \cdots, n)$ e siano M_t $(t = 1, 2, \cdots, p\mu(\nu, r))$, tali monomi, così numerati, indi si calcoli, mediante le (41) e (42), la soluzione U_t, polimoniale omogenea di grado ν, ponendo, nelle $u_k^{(s)} (k = 1, 2, \cdots, p; s = 0, 1, \cdots, n)$ nulli tutti i coefficienti dei loro monomi all'infuori di quello di M_t, al quale si darà il valore 1.

Ritornando al sistema omogeneo dell'elasticità, indicheremo con

$$V_{\nu 1}, V_{\nu 2}, \cdots, V_{\nu, \mu_\nu} \qquad [\mu_\nu = 3(2\nu + 1)],$$

i vettori di un fissato sistema fondamentale di soluzioni polinomiali omogenee di grado ν e li chiameremo; i *vettori polinomiali dell'elasticità, omogenei e di grado* ν, mentre che un vettore del tipo

$$\sum_{\nu=0}^{N} \sum_{t=1}^{\mu_\nu} c_{\nu t} V_{\nu t},$$

sarà detto *polinomiale dell'elasticità, di grado* N. Le competenti di un vettore polinomiale dell'elasticità si diranno *polinomi dell'elasticità*. Dopo quanto precede possiamo enunciare il teorema:

VII. *Se* U *è una soluzione del sistema dell'elasticità, fra i vettori* F, U, L[U] *devono verificarsi* (teor. II) *le infinite eguaglianze*

$$(43) \qquad \int_D F \times V_{\nu t}\, dT + \int_{\mathfrak{F} D} (V_{\nu t} \times L[U] - U \times L[V_{\nu t}])\, d\sigma = 0$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \cdots; \; t = 1, 2, \cdots, \mu_\nu),$$

soddisfatte le quali la trascendente intera Φ_t, *data dalla* (35), *riesce divisibile per* $(\xi_2^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)^2$.

Posto $r = \overline{PP'}$, $\alpha = q/s$, la matrice fondamentale del Somigliana è così definita

$$(44) \quad r_{ik}(P, P') \begin{cases} = -\dfrac{\alpha}{8\pi p} \dfrac{\partial^2 r}{\partial x_l \partial x_k} = -\dfrac{\alpha}{8\pi p} \dfrac{\partial}{\partial x_l'} \dfrac{x_k' - x_k}{r}, & \text{per } l \neq k \\ = -\dfrac{\alpha}{8\pi p} \dfrac{\partial^2 r}{\partial x_l^2} + \dfrac{1}{4\pi p r} = -\dfrac{\alpha}{8\pi p} \dfrac{\partial}{\partial x_l'} \dfrac{x_l' - x_l}{r} + \dfrac{1}{4\pi p r}, & \text{per } l = k. \end{cases}$$

Introdotto un sistema di coordinate polari, col polo in un punto P_0 dello spazio, denoteremo con ρ, θ, φ, le coordinate di P, con ρ', θ', φ' quelle di P'. Fissato, comunque, un numero positivo $\varepsilon < 1$, si ha

$$\frac{1}{r} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{2\nu+1} \omega_{\nu s}(P') \frac{Y_{\nu s}(\theta, \varphi)}{\rho^{\nu+1}},$$

ove con $\omega_{\nu s}(P')$ $(s = 1, 2, \cdots, 2\nu + 1)$ designamo un sistema fondamentale di polinomi armonici omogenei di grado ν, $Y_{\nu s}(\theta, \varphi)$ un sistema fondamentale

di funzioni sferiche d'ordine ν, la serie riuscendo, per $\rho'/\rho \leqq \varepsilon$, assolutamente ed uniformemente convergente, con tutte quelle che da esse si deducono derivandole parzialmente, quante volte si vuole, termine a termine, tanto rispetto alle coordinate di P, quanto rispetto a quelle di P' Si deduce dalle (44), per il vettore $R_l(P, P')$, di componenti r_{lk} (P P'),

$$R_l(P, P') = \sum_{\nu=0}^{\infty} W_{l\nu}(P', \theta, \varphi) \frac{1}{\rho^{\nu+1}}$$

designando $W_{l\nu}(P', \theta, \varphi)$, un vettore polinomiale omogeneo di grado ν, con coefficienti determinate funzioni di θ e di φ. Fissato, comunque, P, con $\rho \geqq \rho'/\varepsilon$, operiamo con la matrice E dell'elasticità sul vettore $R_l(P, P')$, concepito come funzione di P', si ha

$$E[R_l(P, P')] = \sum_{\nu=0}^{\infty} E[W_{l\nu}(P', \theta, \varphi)] \frac{1}{\rho^{\nu+1}} = 0,$$

onde segue che $W_{l\nu}$ è un vettore polinomiale dell'elasticità e pertanto

$$W_{l\nu}(P', \theta, \varphi) = \sum_{t=1}^{\mu_\nu} c_{lt}(\theta, \varphi) V_{\nu t}(P'),$$

ove le $c_{lt}(\theta, \varphi)$ sono determinate funzioni di θ e di φ. Si ha dunque, per $\rho'/\rho \leqq \varepsilon$,

$$R_l(P, P') = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^{\nu+1}} \sum_{t=1}^{\mu_\nu} c_{lt}(\theta, \varphi) V_{\nu t}(P'). \tag{45}$$

Per il dominio D, denoteremo con $\mathcal{C}D$ l'insieme aperto suo complementare con $\mathcal{C}_\infty D$ quella parte connessa di $\mathcal{C}D$ che contiene i punti esterni ad ogni sfera contenente D. Si ha $\mathcal{C}_\infty D = \mathcal{C}D$ quando e solo quando $\mathcal{F}D$ è un continuo. Sussiste il teorema:

VIII. *Se per i vettori* Φ, Ψ *e* F *risultano soddisfatte le infinite eguaglianze*

$$\int_D F \times V_{\nu t}\, dT + \int_{\mathcal{F}D} (\Psi \times V_{\nu t} - \Phi \times L[V_{\nu t}])\, d\sigma = 0, \tag{46}$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \cdots ; t = 1, 2, \cdots, \mu_\nu),$$

si ha pure per ogni punto P *di* $\mathcal{C}_\infty D$ *e per* $l = 1, 2, 3,$

$$\int_D F(P') \times R_l(P, P')\, dT(P') + \int_{\mathcal{F}D} (\Psi(P') \times R_l(P, P') - \Phi(P') \times L[R_l(P, P')])\, d\sigma(P') = 0. \tag{47}$$

Data l'analiticità, in $\mathcal{C}_\infty D$, del primo membro di questa eguaglianza, basta dimostrarne la validità all'esterno di una sfera Σ, di centro in un punto P_0, contenente D nel suo interno. Assunto un sistema di coordinate polari, col polo in P_0, sussiste in $\mathcal{C}\Sigma$ la (45), con convergenza uniforme, al variare di P' in D, della serie e di quella che da essa si deducono per derivazione parziale, termine a termine, rispetto alle coordinate di P', donde la tesi.

Fichera, nella Nota citata, ha dimostrato che se si verifica la (47) per P in $\mathfrak{C}D$, posto, per P in $D - \mathfrak{F}D$ e per $l = 1, 2, 3$,

$$(48) \qquad u_l(P) = \int_D F(P') \times R_l(P, P')\, dT(P') + \int_{\mathfrak{F}D} (\Psi(P') \times R_l(P, P') - \Phi(P') \times L[R_l(P, P')])\, d\sigma(P'),$$

si ottengono le componenti di una soluzione U del sistema dell'elasticità, per la quale riesce, su $\mathfrak{F}D$, in un senso ben precisato, secondo Amerio, $U = \Phi$, $L[U] = \Psi$. Del teor. VIII è dunque corollario il seguente:

IX. *Se* $\mathfrak{F}D$ *è un continuo e se si verificano le* (46), *le* (48) *forniscono le componenti di una soluzione* U *del sistema dell'elasticità, per la quale riesce, su* $\mathfrak{F}D$, *nel senso di Amerio,* $U = \Phi$, $L[U] = \Psi$.

Si constata, con ciò, l'importanza dei vettori polinomiali dell'elasticità, alla quale arreca un ulteriore cospicuo apporto il teorema:

X. *Un vettore* U(P), *soluzione, in un dominio* D, *del sistema omogeneo dell'elasticità, è, in una sfera* Σ *interna a* D, *sviluppabile in serie uniformemente convergente di vettori polinomiali dell'elasticità e, se* $\mathfrak{F}D$ *è un continuo, si può costruire una serie procedente per tali vettori, convergente uniformemente verso* U, *in ogni dominio interno a* D.

La dimostrazione della prima parte del teorema segue dalla

$$u_l(P) = \int_{\mathfrak{F}D} (\Psi(P') \times R_l(P, P') - \Phi(P') \times L[R_l(P, P')])\, d\sigma(P') = \int_{\mathfrak{F}D} \sum_{k=1}^{3} \left(\psi_k(P')\, r_{kl}(P, P') - \varphi_k(P') \sum_{h=1}^{3} L_{kh}[r_{hl}(P, P')] \right) d\sigma(P')$$

e dall'osservare che, assunto il centro P_0 della sfera Σ come polo di un sistema di coordinate polari, esiste un numero positivo $\varepsilon < 1$, per cui riesce $\rho/\rho' \leqq \varepsilon$, quando sia P' su $\mathfrak{F}D$ e P in Σ, donde

$$R_k(P, P') = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\mu_\nu} \frac{c_{kl}(\varphi', \theta')}{\rho'^{\nu+1}} V_{\nu l}(P),$$

con convergenza uniforme della serie e delle dedotte per derivazione parziale termine e termine, al variare di P in Σ e di P' su $\mathfrak{F}D$. Se ne deduce, con la convergenza uniforme in Σ, asserita del teorema,

$$U(P) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\mu_\nu} \gamma_{\nu l} V_{\nu l}(P),$$

essendo

$$\gamma_{\nu l} = \int_{\mathfrak{F}D} \sum_{k=1}^{3} \left(\psi_k(P') \frac{c_{kl}(\varphi', \theta')}{\rho'^{\nu+1}} - \varphi_k(P') \sum_{h=1}^{3} L_{kh} \left[\frac{c_{hl}(\varphi', \theta')}{\rho'^{\nu+1}} \right] \right) d\sigma(P').$$

Più lunga è la dimostrazione della seconda parte del teorema, per la quale si presta un'estensione del classico procedimento seguito da Runge nella dimostrazione del teorema analogo per le funzioni olomorfe di una variabile complessa. Devo quì astenermi dallo svilupparla.

Poichè una qualsivoglia soluzione del sistema omogeneo dell'elasticità verifica l'equazione $\Delta\Delta U = 0$, per ogni serie del tipo $\Sigma\gamma_n U_n$, con U_n soluzioni di detto sistema, convergente uniformemente in ogni dominio interno a D, sussiste [11] tale convergenza per tutte quelle da essa dedotte per derivazione parziale termine a termine e dopo questa osservazione e le precedenti io ritengo provata l'importanza che io annetto al felice esito delle ricerche che vado a proporre per la risoluzione del seguente PROBLEMA PRINCIPALE DELL'ELASTICITÀ, nell'ipotesi che $\mathfrak{F}D$ sia un continuo.

Assegnati il vettore $E[U] = F$ *in* $D - \mathfrak{F}D$, *nella parte* $\mathfrak{F}_1 D$ *di* $\mathfrak{F}D$ *il vettore* $U = \Phi_1$ *e nella complementare* $\mathfrak{F}_2 D = \mathfrak{F}D - \mathfrak{F}_1 D$ *il vettore* $L[U] = \Psi_2$, *calcolare, nell'interno* di D, *il vettore* U *e le sue derivate parziali*, U *su* $\mathfrak{F}_2 D$ *e* $L[U]$ *su* $\mathfrak{F}_1 D$.

Le (46) forniscono le infinite equazioni integrali nei vettori $\Phi = U$ su $\mathfrak{F}_2 D$ e $\Psi = L[U]$ su $\mathfrak{F}_1 D$, per $\nu = 0, 1, 2, \cdots; t = 1, 2, \cdots, \mu_\nu$,

$$(49) \qquad \int_{\mathfrak{F}_1 D} V_{\nu t} \times \Psi \, d\sigma - \int_{\mathfrak{F}_2 D} L[V_{\nu t}] \times \Phi \, d\sigma =$$

$$\int_{\mathfrak{F}_1 D} L[V_{\nu t}] \times \Phi_1 \, d\sigma - \int_{\mathfrak{F}_2 D} V_{\nu t} \times \Psi_2 \, d\sigma - \int_D F \times V_{\nu t} \, dT,$$

e si pone pertanto la ricerca: *a) Dimostrare la completezza hilbertiana del sistema* $\{\Omega_{\nu t}\}$ *di vettori con le seguenti componenti*

$$\omega_{\nu t 1} = v_{\nu t 1}, \cdots, \omega_{\nu t 3} = v_{\nu t 3}, \quad \text{su} \quad \mathfrak{F}_1 D;$$

$$\omega_{\nu t 4} = -L_1[V_{\nu t}], \cdots, \omega_{\nu t 6} = -L_3[V_{\nu t}], \quad \text{su} \quad \mathfrak{F}_2 D,$$

dimostrare cioè che se per una soluzione U *del sistema omogeneo dell'elasticità si hà, nel senso di Amerio,* $U = 0$, *su* $\mathfrak{F}_1 D$, $L[U] = 0$, *su* $\mathfrak{F}_2 D$, *risulta* $U \equiv 0$ *in* D.

Dimostrata la detta completezza, dalle (49), supposte compatibili, si deduce il calcolo di Ψ su $\mathfrak{F}_1 D$ e di Φ su $\mathfrak{F}_2 D$, donde, noti Φ e Ψ su tutto $\mathfrak{F}D$, con l'impiego di un'opportuna matrice fondamentale, il calcolo di U e delle sue derivate nell'interno di D. Nell'ipotesi, nella quale intendiamo rimanere sino alla fine, che si conosca una soluzione particolare dell'equazione $E[U] = F$, potremo limitarci a considerare il problema nel caso $F = 0$. Supposta risolta affermativamente la questione *a*), si abbia, nella metrica hilbertiana,

(11) Cfr. NICOLESCO, *Les fonctions polyharmoniques* [«Actualités scientifiques et industrielles», 333, Paris, Hermann (1936). PICONE, *Sulla convergenza delle successioni di funzioni iperarmoniche* [«Bulletin mathématique de la Société roumaine des sciences», tome XXVIII (1936)].

$$(50)\qquad \begin{cases} \Phi_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{n} \sum\limits_{t=1}^{\mu_\nu} \gamma_{\nu t}^{(n)} V_{\nu t}, & \text{su } \mathcal{F}_1 D; \\ \Psi_2 = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{n} \sum\limits_{t=1}^{\mu_\nu} \gamma_{\nu t}^{(n)} L[V_{\nu t}], & \text{su } \mathcal{F}_2 D, \end{cases}$$

le $\gamma_{\nu t}^{(n)}$ designando costanti. Detti $V^{(n)}$ il vettore polinomiale dell'elasticità a destra del segno di limite al secondo membro della prima delle (50), $\Omega^{(n)}$ il vettore di componenti $\omega_1^{(n)} = v_1^{(n)}$ su $\mathcal{F}_1 D, \cdots, \omega_6^{(n)} = L_3[V^{(n)}]$, su $\mathcal{F}_2 D$, si pone la ricerca: b) *Dalla convergenza in media del vettore* $\Omega^{(n)}$, *segue la convergenza puntuale ed uniforme del vettore* $V^{(n)}$, *nell'interno di* D, *verso la soluzione* U *del problema?*

Risolute affermativamente le questioni *a*) e *b*), ecco un metodo diretto di calcolo, nell'interno di D, del vettore U e delle sue derivate parziali. Si risolva il seguente sistema di $3(n+1)^2$ equazioni lineari algebriche nelle altrettante incognite $\gamma_{\nu t}$ $[\nu = 0, 1, \cdots, n; t = 1, 2, \cdots, 3(2\mu+1)]$:

$$(51)\qquad \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{t=1}^{\mu_\nu} \left(\int_{\mathcal{F}_1 D} V_{ms} \times V_{\nu t}\, d\sigma + \int_{\mathcal{F}_2 D} L[V_{ms}] \times L[V_{\nu t}]\, d\sigma \right) \gamma_{\nu t} =$$

$$\int_{\mathcal{F}_1 D} V_{ms} \times \Phi_1\, d\sigma + \int_{\mathcal{F}_2 D} L[V_{ms}] \times \Psi_2\, d\sigma,$$

$$[m = 0, 1, \cdots, n \quad ; \quad s = 1, 2, \cdots, 3(2\nu+1)],$$

e sia $\gamma_{\nu t}^{(n)}$ la componente d'indice νt della soluzione, si ha, uniformemente nell'interno di D,

$$U(P) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{t=1}^{\mu_\nu} \gamma_{\nu t}^{(n)} V_{\nu t}(P) \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial x_1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{t=1}^{\mu_\nu} \gamma_{\nu t}^{(n)} \frac{\partial V_{\nu t}}{\partial x_1}, \cdots.$$

Il numero $3(n+1)^2$ delle equazioni e delle incognite del sistema lineare algebrico (51) aumenta rapidamente al crescere del grado n del vettore polinomiale col quale si vogliono approssimare le quantità incognite. Per esempio, assumendolo di quarto grado, quel numero diventa 75 e l'Italia non possiede oggi mezzi per calcolare la soluzione di un tal sistema!

Ho vaghe notizie di grandiosi progressi, conseguiti in America, nella costruzione di potenti macchine, con le quali sarebbe possibile, anzi facile, compiere quei calcoli. Ho tentato di ottenere che collaboratori del nostro Istituto per le Applicazioni del Calcolo fossero ammessi a sperimentare quelle macchine, ma invano. A quando, in nome della civiltà, l'abbattimento delle barriere che dividono, in questo agitato mondo, anche i cultori di Scienza?

Astronomia. — *Moto dei satelliti attorno al Sole.* – Parte III. *Pianeta e satellite con orbite circolari su piani comunque inclinati.* Nota (*) del Socio G. Silva.

8. Considero qui il caso particolare in cui il pianeta ed il satellite hanno orbite circolari su piani comunque inclinati fra loro e dimostro che in tale caso le equazioni (11), (12), (14), (15) sono soddisfatte esclusivamente nelle circostanze descritte in § 4, § 5, § 7, § 8 della Memoria I, sicchè le diseguaglianze (2), (1), (4); (3), che direttamente derivano dalle considerazioni svolte rispettivamente in quei paragrafi, devono ritenersi non soltanto condizioni necessarie, ma anche sufficienti perchè la traiettoria percorsa dal satellite relativamente al Sole sia sempre o non sia mai di un determinato tipo. Ciò vale per la forma, naturalmente semplificata, che le dette diseguaglianze assumono nel caso particolare considerato e sotto la quale si presentano quando vengono ottenute con il procedimento rigoroso fondato sulle dette equazioni (11) a (15), ma qui dimostrerò (n. 10) che ciò varrà anche per la loro forma generale, finchè le eccentricità e, ε sono sufficientemente piccole.

La soluzione completa del problema richiederebbe quindi di delimitare il campo di variabilità per e ed ε, entro il quale le dette condizioni, che sono necessarie sempre, finchè $e < 1$, $\varepsilon < 1$, continuino ad essere anche sufficienti; ma essa non si presenta facile. D'altra parte già l'esempio più semplice qui considerato, per il quale riporto soltanto le formole fondamentali, ha richiesto un calcolo algebrico così laborioso, ch'io ritengo di aver dedicato al modesto problema già troppo tempo perchè l'arresto delle mie ricerche a questo punto sia più che giustificato.

9. Per $e = \varepsilon = 0$, le anomalie vere v, φ e le eccentriche u, υ coincidono con le medie e, supponendo di contarle dal nodo ascendente dell'orbita del satellite, potremo scrivere $w = \omega = 0$, $v = n(t - t_0)$, $\varphi = \nu t$. Essendo inoltre $r = a$, $\rho = \alpha$, le (5) dànno

$$(18)\quad \begin{cases} x = \alpha\cos\varphi + a\cos v\,, & y = \alpha\operatorname{sen}\varphi\cos i + a\operatorname{sen} v\,, \\ x' = -\alpha\nu\operatorname{sen}\varphi + an\operatorname{sen} v\,, & y' = \alpha\nu\cos\varphi\cos i + an\cos v\,, \end{cases}$$

e la (10) assume la forma

$$(19)\quad G = a^2 n + \alpha^2\nu\cos i + a\alpha[(n + \nu\cos i)\cos v\cos\varphi + (n\cos i + \nu)\operatorname{sen} v\operatorname{sen}\varphi].$$

Le (11) si riducono alle prime due e la loro somma e la loro differenza dànno le due equivalenti equazioni

$$\frac{\partial G}{\partial v} + \frac{\partial G}{\partial\varphi} = a\alpha(\nu - n)(1 - \cos i)\operatorname{sen}(v + \varphi) = 0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial\varphi} = -a\alpha(\nu + n)(1 + \cos i)\operatorname{sen}(v - \varphi) = 0.$$

(*) Presentata nella seduta del 10 maggio 1947.

Escludendo le orbite complanari, di più facile trattazione, queste due equazioni esigono che si abbia contemporaneamente $\operatorname{sen}(v+\varphi)=0$, $\operatorname{sen}(v-\varphi)=0$, od anche

$$\operatorname{sen} v\cos\varphi = 0 \quad , \quad \operatorname{sen}\varphi\cos v = 0 . \tag{20}$$

Tenuto conto della (19), la diseguaglianza (12) diviene

$$\frac{d^2G}{dt^2} = a\alpha(\nu^2-n^2)\left[(n-\nu\cos i)\cos v\cos\varphi+(n\cos i-\nu)\operatorname{sen} v\operatorname{sen}\varphi\right]>0 . \tag{21}$$

Le (20) e (21) sono soddisfatte soltanto nei casi seguenti:

1° per $v=0$, $\varphi=0$, oppure per $v=180°$, $\varphi=180°$, quando è

$$90-\operatorname{arc\,sen}(n/\nu)<i<180 ;$$

2° per $v=0$, $\varphi=180$, oppure per $v=180$, $\varphi=0$, quando è

$$0<i<90-\operatorname{arc\,sen}(n/\nu)$$

3° per $v=90$, $\varphi=270$, oppure per $v=270$, $\varphi=90$, qualunque sia i.

I corrispondenti valori minimi di G sono

$$G_1=(a+\alpha)(an+\alpha\nu\cos i) \quad , \quad G_2=(a-\alpha)(an-\alpha\nu\cos i) ,$$
$$G_3=(a-\alpha\cos i)(an-\alpha\nu)$$

e poichè $G_1>G_3$, $G_2>G_3$, così G_1 o G_2, a seconda dei valori di i, rappresentano il massimo $G_{m.M}$ dei minimi G_m della G, e G_3 è il minimo $G_{m.m}$ dei detti minimi. La (1′) e la (2′) del n. 3 dànno quindi, a seconda dei casi,

$$an<-\alpha\nu\cos i \quad , \quad an<\alpha\nu\cos i \quad , \quad an>\alpha\nu . \tag{22}$$

Per $e=\varepsilon=0$, la (1) coincide con la prima delle precedenti diseguaglianze quando $i>90$ e con la seconda quando $i<90$, mentre la (2) coincide con la terza. Un divario fra la (1) e la prima delle (22) si presenta tuttavia nel segno quando i è minore di 90 e maggiore di $90-\operatorname{arc\,sen}(n/\nu)$, perchè entro questo intervallo diviene evidentemente impossibile soddisfare alla prima delle (22), mentre nessuna riserva è stata fatta finora per la (1). Ma si riconosce subito che quando l'inclinazione i è compresa nel detto intervallo e in quello simmetrico del secondo quadrante, diviene pure impossibile soddisfare alla (1) e alla seconda delle (22) a meno di non supporre $\alpha>a$, ciò che si è escluso fin dall'inizio. Il divario fra la prima delle (22) e la (1) si spiega quindi con il fatto che nel dedurre la (1) si è tenuto conto di questa limitazione, la quale esige che, ad ogni congiunzione, il satellite Q, o più esattamente la sua proiezione Q_1 sul piano dell'orbita del pianeta, passi fra il Sole e il pianeta, mentre la prima delle (22) di ciò non tiene conto.

10. Per lo scopo indicato al numero precedente, più che la coincidenza con le (22) delle (1) e (2) quando $e=\varepsilon=0$, è da mettere in rilievo che i casi 1° e 2° corrispondono ad un allineamento del Sole, del pianeta e del satellite al momento del passaggio di questi due ultimi astri ai nodi, essendo

il satellite in congiunzione se ha moto diretto (caso 2°) e in opposizione se ha moto retrogrado (caso 1°); che il caso 3° corrisponde ad analoghe congiunzione ed opposizione al momento in cui il pianeta e il satellite sono a 90° dai nodi; cioè che tali configurazioni sono appunto quelle, rispettivamente indicate nel § 5 e nel § 4 della Memoria I, che conducono alle (1) e (2). Ragioni di continuità permettono allora di concludere che, se le eccentricità e ed ε sono diverse da zero e sufficientemente piccole, le (1) e (2) rimangono condizioni non soltanto necessarie, ma anche sufficienti per assicurare che la traiettora del satellite relativa al Sole è sempre, o rispettivamente, non è mai del tipo [c].

Supponiamo infatti che, per e ed ε non nulle, ma comunque vicine allo zero, il procedimento generale del n. 3 conduca a minimi G_m relativi a valori di v, φ, $w + v$, $\omega + \varphi$ diversi da quelli che corrispondono alle circostanze indicate nei suddetti paragrafi della Memoria I, nel qual caso soltanto possono cambiare $G_{m,M}$, $G_{m,m}$ e quindi le (1) e (2). Al tendere di $e \operatorname{sen} w$, $e \cos w$, $\varepsilon \operatorname{sen} \omega$, $\varepsilon \cos \omega$ a zero, i suddetti valori di $w + v$, $\omega + \varphi$ devono tendere a quelli di v, φ, relativi alle circostanze indicate nei casi 1°, 2°, 3°, sopra considerati, che dànno origine a tutti i minimi G_m, possibili quando $e = \varepsilon = 0$. Dalla prima proposizione segue che dG/dt dovrebbe essere nulla sia ai tempi t_1 relativi a quelle diverse circostanze, in causa della presunta esistenza dei nuovi minimi G_m, sia ai tempi t delle circostanze precisate nella Memoria 1, in causa della simmetria del moto rispetto all'istante t, per effetto della quale l'incremento di G deve rimanere identico, in valore e segno, quando si dànno incrementi eguali e di segno contrario al tempo t. Dalla seconda proposizione si deduce che, al tendere di e e di ε allo zero, dovrebbe esistere almeno una coppia di configurazioni dei tre astri destinate a confondersi l'una con l'altra e per la quale dG/dt rimarrebbe nulla in tempi t e t_1, la cui differenza tenderebbe a zero e se ne conclude che corrispondentemente, per $e = \varepsilon = 0$, dovrebbe essere $d^2G/dt^2 = 0$, contrariamente a quanto risulta in tutti e tre i casi possibili. Resta quindi dimostrato l'asserto.

11. Assumiamo per H l'espressione data dall'ultimo membro della (13_4) e per lo studio di essa completiamo le (18) con le

$$(23)\quad \begin{cases} x'' = -\alpha\nu^2 \cos\varphi - an^2 \cos v \quad , \quad y'' = -\alpha\nu^2 \operatorname{sen}\varphi \cos i - an^2 \operatorname{sen} v, \\ z = \alpha \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} i \quad , \quad z' = \alpha\nu \cos\varphi \operatorname{sen} i \quad , \quad z'' = -\alpha\nu^2 \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} i. \end{cases}$$

Con opportuni artifici di calcolo si può dare ad H l'espressione

$$(24)\quad H = (a^2 n^2 + \alpha^2 \nu^2)^2 + 2a^2\alpha^2 n\nu(\nu^2 + n^2)\cos i +$$

$$+ \frac{1}{4} a^2\alpha^2 n\nu[(\nu - n)^2 (1 - \cos i)^2 \operatorname{sen}^2(v+\varphi) - (\nu+n)^2 (1+\cos i)^2 \operatorname{sen}^2(v-\varphi)] -$$

$$+ \frac{1}{2} a\alpha (a^2 n^2 + \alpha^2 \nu^2)[(\nu - n)^2 (1 - \cos i)\cos(v+\varphi) + (\nu+n)^2 (1+\cos i)\cos(v-\varphi)]$$

Anche le (14), come le (11), si riducono alle prime due e possono venire sostituite dalle due equazioni equivalenti

$$\frac{\partial H}{\partial v}+\frac{\partial H}{\partial \varphi}=-a\alpha(\nu-n)^2(1-\cos i)\operatorname{sen}(v+\varphi)[a^2n^2+\alpha^2\nu^2-$$
$$-a\alpha n\nu(1-\cos i)\cos(v+\varphi)]=0$$
$$\frac{\partial H}{\partial v}-\frac{\partial H}{\partial \varphi}=-a\alpha(\nu+n)^2(1+\cos i)\operatorname{sen}(v-\varphi)[a^2n^2+\alpha^2\nu^2+$$
$$+a\alpha n\nu(1+\cos i)\cos(v-\varphi)]=0.$$

Escludendo le orbite complanari, i soli fattori che possono annullarsi nelle espressioni a primo membro di queste equazioni sono $\operatorname{sen}(v+\varphi)$ e $\operatorname{sen}(v-\varphi)$, sicchè anche le dette equazioni equivalgono in definitiva alle (20).

Tenuto conto della (24), la diseguaglianza (15) diviene

$$(25)\quad \frac{1}{2}a\alpha(\nu^2-n^2)^2\{a\alpha n\nu[(1-\cos i)^2\cos 2(v+\varphi)-(1+\cos i)^2\cos 2(v-\varphi)]-$$
$$-(a^2n^2+\alpha^2\nu^2)[(1-\cos i)\cos(v+\varphi)+(1+\cos i)\cos(v-\varphi)]\}>0.$$

Le (20) e la (25) sono soddisfatte soltanto nei casi seguenti:

1° per $v=0$, $\varphi=180$, oppure per $v=180$, $\varphi=0$, qualunque sia i;

2° per $v=90$, $\varphi=270$, oppure per $v=270$, $\varphi=90$, se $i<90$;

3° per $v=270$, $\varphi=90$, oppure per $v=90$, $\varphi=270$, se $i>90$.

I corrispondenti valori di H possono mettersi sotto le forme seguenti, nel primo fattore delle quali si riconosce facilmente il quadrato V^2 della velocità e nei successivi o nel successivo il prodotto RK, secondo quanto è richiesto dal primo membro della (13_4):

$$H_1=[(an-\alpha\nu\cos i)^2+\alpha^2\nu^2\operatorname{sen}^2 i](a-\alpha)(an^2-\alpha\nu^2),$$
$$H_2=(an-\alpha\nu)^2[(a-\alpha\cos i)an^2-(a\cos i-\alpha)\alpha\nu^2],$$
$$H_3=(an+\alpha\nu)^2[(a+\alpha\cos i)an^2+(a\cos i+\alpha)\alpha\nu^2].$$

Poichè $H_2>H_1$, $H_3>H_1$, così H_1 è il minimo $H_{m.m}$ dei minimi H_m, e H_2, H_3, a seconda dei valori di i, rappresentano il massimo $H_{m.M}$ dei detti minimi. La (4′) e la (3′) del n. 5 dànno in corrispondenza al primo, e rispettivamente al secondo e al terzo dei casi suddetti,

$$(26)\quad \frac{n^2}{\nu^2}>\frac{\alpha}{a}\quad,\quad \frac{n^2}{\nu^2}<\frac{\alpha}{a}\,\frac{a\cos i-\alpha}{a-\alpha\cos i}\quad,\quad \frac{n^2}{\nu^2}<\frac{\alpha}{a}\,\frac{a(-\cos i)-\alpha}{a-\alpha(-\cos i)}.$$

Per $e=\varepsilon=0$, la (4) coincide con la prima delle (26) e la (3) coincide con la seconda delle stesse (26) quando $i<90$ e con la terza quando $i>90$.

12. Anche in questo caso, più che la coincidenza suddetta, è da mettere in rilievo che tutti e tre i casi corrispondono al momento di una congiunzione del satellite con il Sole, essendo il pianeta e il satellite ai nodi nel 1° caso e a 90° dai nodi nel 2° e nel 3°, e cioè corrispondono a quelle circostanze, considerate nel § 7 e nel § 8 della Memoria I, che conducono rispettivamente alla (4) e alla (3). Con ragionamento analogo a quello del n. 10 segue da ciò che, se le eccentricità e ed ε sono diverse da zero e sufficientemente piccole, la ricerca generale del n. 5, deve condurre soltanto ai minimi corrispondenti alle dette circostanze e che pertanto le (3) e (4) sono condizioni non solo necessarie, ma anche sufficienti per assicurare che la traiettoria del satellite non è mai, o è sempre del tipo $[a]$.

Astrofisica. — *Sulla variabilità del nucleo della nebulosa della Lira.* Nota (*) del Corrisp. F. Zagar.

Dalle prime ricerche dello scrivente sulla interessante questione circa la variabilità del nucleo della nebulosa planetaria della Lira, il materiale necessario per uno studio più decisivo non si è arricchito di molto, nè quello aggiunto corrisponde alle necessarie qualità di omogeneità che ho auspicato per una tale ricerca (1). In tali condizioni, dopo i primi cenni incerti, un esito positivo appariva difficile, ed era mia intenzione di attendere una nuova serie di osservazioni apposite fatte al telescopio di Asiago. Ma qualche difficoltà (per ragioni strumentali e di programma) per ottenere in tempo non troppo lungo tale serie, e d'altra parte qualche segno incoraggiante riscontrato già ad un esame superficiale, faceva ritenere che lo studio esauriente del materiale a disposizione poteva fin d'ora portare ad un risultato di un certo interesse, e perciò fu deciso di procedere alla presente ricerca.

Nel desiderio di conseguire risultati obbiettivi e possibilmente precisi, era mio intento di effettuare i confronti fotometrici del nucleo con varie stelle del campo della nebulosa coll'aiuto del fotometro fotoelettrico stellare di Zeiss in Asiago, ma dopo le prime prove, questo procedimento si dimostrò illusorio. Infatti la nebulosità interna all'anello e che circonda il nucleo, diversa da lastra a lastra, ha una influenza notevole sulla misura del nucleo, e neanche il minimo diaframma del fotometro non può escludere del tutto tale nebulosità, che viene così a modificare grandemente le misure, in modo cioè da far risultare dei dati che non possono essere messi in alcuna relazione con quelli che si vogliono determinare. Altre ragioni tecniche non permisero di effettuare qualche procedimento adatto, oppure questo avrebbe richiesto, un lavoro sproporzionato, per cui decisi di riprendere l'esame diretto delle lastre con semplice microscopio, usando naturalmente un metodo appropriato, che tenesse in qualche modo conto della complicata questione della influenza dell'intorno del nucleo.

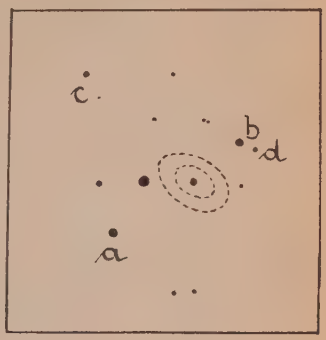
Il materiale disponibile per tale lavoro ammonta a circa un centinaio di lastre, tutte prese al riflettore di Loiano, e dopo lo spoglio di cui diremo subito, si riduce a 44 lastre utilizzabili ai nostri scopi. Le misure a stima sono difficilissime, specialmente appena il fondo diventa sensibile, e furono necessarie molte ripetizioni indipendenti e in tempi diversi; in generale si può dire che ogni misura conclusa è la media di 10 puntate singole, e dall'accordo interno si può sperare che le grandezze apparenti ottenute abbiano un certo grado di attendibilità. Il fondo annerito intorno al nucleo rende necessaria la massima cura nelle condizioni di misura, in particolare occorre che la illu-

(*) Presentata nella seduta del 10 maggio 1947.

(1) F. Zagar, *La nebulosa anulare della Lira.* « Pubbl. Osserv. astron. di Bologna. vol. IV, n. 1 (1944).

minazione delle lastre (per trasparenza) sia il più possibile costante, e quindi almeno le lastre delle singole serie siano esaminate senza interruzione e in condizioni ottime dell'occhio.

I confronti furono eseguiti tra il nucleo e 4 stelle di riferimento, segnate nella figura qui accanto con *a*, *b*, *c*, *d* [2], le cui grandezze fotografiche furono assunte come segue



a	*b*	*c*	*d*
$14^m.0$	$15^m.0$	$16^m.0$	$17^m.0$.

La questione più delicata in tutto il problema fu la considerazione della influenza del fondo interno all'anello e intorno al nucleo, influenza che fin dalle prime prove si era palesata nettamente con un effetto di indebolimento del nucleo, tanto più forte, quanto più forte era il grado di annerimento dell'intorno del nucleo.

A tale scopo, eliminate dapprima le lastre imperfette o inadatte, e dopo un primo esame tutte quelle col fondo intorno al nucleo troppo annerito, poichè non permettono di dedurre risultati attendibili, le lastre utilizzabili furono classificate in una scala convenzionale da 0 a 5 secondo l'annerimento dell'intorno del nucleo, assegnando alla classe zero tutte le lastre nelle quali l'interno dell'anello non differisce dal resto del fondo della lastra, alla classe 2 quelle nelle quali l'interno dell'anello è leggermente più oscuro del resto della lastra, nella classe 4 le lastre col predetto interno sensibilmente più oscuro del resto ed infine nella classe 6 le lastre coll'interno dell'anello intensamente oscurato; le classi 1, 3 e 5 sono intermedie, dato che fu necessario ampliare la scala, mentre la ultima fu poi esclusa per il motivo sopradetto. Ordinate, con reciproci confronti, le lastre in questi 6 gruppi, si può supporre che l'influenza del fondo sul nucleo sia sensibilmente la stessa per le lastre di uno stesso gruppo, cosicchè le oscillazioni riscontrate nella grandezza apparente del nucleo entro un dato gruppo si possono considerare reali; si hanno per i 6 gruppi di lastre le escursioni (differenze massime) riportate nella quarta colonna della tabella I, escursioni che arrivano a 2.1 grandezze della scala prefissata.

Prima di commentare questo risultato, è opportuno rendere omogenei e confrontabili i dati delle diverse classi, introducendo una correzione che tenga appunto conto del grado di annerimento dell'intorno del nucleo. Questa correzione potrebbe essere facilmente ottenuta confrontando alcune lastre fatte successivamente a brevissimo intervallo di tempo in una stessa notte, e a fondo interno diverso, se si potesse supporre il nucleo in esame costante durante il tempo relativo, ed una prima riduzione fu effettivamente ottenuta su tale base. Ad esempio le quattro osservazioni dell'8 settembre 1939, ripor-

(2) Si tratta delle stelle Num. 9, 17, 7, e 18 della cartina della regione pubblicata nella Nota citata.

tate nell'elenco finale, rispettivamente del grado di annerimento 0, 2, 3, 5 e grandezze del nucleo 14.2, 15.4, 15.9 e 16.9 indicano nella detta ipotesi una correzione di $-0^m.5$ per grado di annerimento, come risulta subito da una rappresentazione grafica dei dati ora ricordati. Ma la scarsità di tali serate multiple (tutte le altre sono a due sole lastre) e sopratutto il fatto che dalle prime riduzioni risultavano come molto probabili delle variazioni rapide del nucleo, mi indusse a cercare la correzione dalle grandezze medie di ogni gruppo; se infatti il nucleo fosse costante, e in conseguenza le differenze fra le singole osservazioni di uno stesso gruppo imputabili ai soli errori di osservazione, le medie predette dovrebbero variare per il solo effetto del fondo intorno al nucleo. Altrettanto si può asserire per le medie dedotte da un grande numero di lastre per ciascun gruppo, quando il nucleo è variabile (con periodo più breve del tempo che abbraccia le osservazioni), poichè allora è probabile che tutte le grandezze assunte dalla variabile sono considerate nella media. Nel caso presente le osservazioni per ogni gruppo sono esigue e il ragionamento non potrebbe applicarsi; tuttavia sembra l'unico metodo da tentare, e tanto l'andamento delle medie, riportate nella terza colonna della tabella I, quanto i risultati finali giustificano il procedimento ad onta dello scarso materiale.

TABELLA I.

Annerimento	Numero	Media	Escursione	Correzione
0	4	$14^m.4$	$1^m.3$	$+0^m.6$
1	10	14 .64	2 .1	+0 .3
2	10	15 .05	1 .6	0 .0
3	8	15 .7	2 .1	−0 .3
4	7	15 .6	1 .4	−0 .6
5	5	15 .7	1 .7	−0 .9

Sebbene le ultime medie sembrino indicare un andamento diverso dalle prime, conviene supporre la correzione proporzionale al grado di annerimento, ed allora da una rappresentazione grafica risulta facilmente un effetto di $+0^m.3$ sulle grandezze stellari osservate per ogni grado dell'annerimento, e quindi la correzione di $-0^m.3$ per grado. Nella tabella II lo zero di correzione si è però assegnato al grado 2, che corrisponde a quella posa, e quindi a quella intensità di annerimento, che dovrebbe considerarsi come normale (posa di 8 minuti su lastra normale e in condizioni normali, nella quale l'anello della nebulosa risulta nè troppo debole nè troppo annerito, coi maggiori dettagli possibile); risultano perciò per i diversi gradi di annerimento dell'intorno del nucleo rispettivamente le correzioni date nella quinta colonna della tabella I.

TABELLA II.

Lastra numero	Data	Tipo di lastra	Condizioni della lastra	Interno anello	Nucleo			Medie annuali
					grand. stimata	correz. p. fondo	grand. conclusa	
Z 1936	1939 Agos. 17.033	A	*o*	1	$14^m.3$	$+0^m.3$	$14^m.3$	
Z 1450	» Sett. 8.920	C	*b*	0	14 .2	+0 .6	14 .8	
Z 1451	» » 8.929	C	*o*	2	15 .4	0 .0	15 .4	$15^m.4$
Z 1452	» » 8.939	C	*b*	3	15 .9	−0 .3	15 .6	1939.7
R 1454	» » 8.969	C	*b*	5	16 .9	−0 .9	16 .0	
Z 1494	» » 17.000	A	*m*	2	15 .8	0 .0	15 .8	
Z 1896	1940 Lugl. 22.944	A	*b*	0	15 .3	+0 .6	15 .9	
Z 1898	» » 25.965	A	*b*	3	16 .7	−0 .3	16 .4	
Z 1903	» » 26.926	A	*m*	2	15 .5	0 .0	15 .5	
Z 1923	» Agos. 4.931	A	*b*	3	15 .5	−0 .3	15 .2	
Z 1934	» » 11.958	A	*m*	2	15 .9	0 .0	15 .9	$15^m.7$
Z 1971	» » 23.915	A	*o*	2	15 .1	0 .0	15 .1	1940.6
G 2003	» » 28.912	A	*o*	1	14 .7	+0 .3	15 .0	
G 2073	» Sett. 9.888	A	*b*	3	15 .9	−0 .3	15 .6	
T 2120	» » 23.000	A	*b*	1	16 .1	+0 .3	16 .4	
G 2157	» Ott. 3.940	A	*o*	3	16 .1	−0 .3	15 .8	
R 2397	1941 Lugl. 25.034	A	*m*	4	15 .5	−0 .6	14 .9	
R 2398	» » 25.051	A	*b*	2	14 .4	0 .0	14 .4	$14^m.7$
R 2401	» » 25.992	A	*m*	5	15 .9	−0 .9	15 .0	1941.6
T 2448	» Sett. 23.979	A	*b*	1	14 .2	+0 .3	14 .5	
R 2525	1942 Lug. 5.031	A	*b*	4	16 .4	−0 .6	15 .8	
R 2533	» » 6.104	A	*o*	3	16 .1	−0 .3	15 .8	
R 2537	» » 8.045	A	*m*	4	15 .6	−0 .6	15 .0	
R 2540	» » 9.979	A	*b*	4	16 .4	−0 .6	15 .8	$15^m.1$
R 2541	» » 9.990	A	*m*	4	15 .4	−0 .6	14 .8	1942.6
R 2624	» Agos. 16.110	A	*o*	1	14 .1	+0 .3	14 .4	
R 2625	» » 16.130	A	*o*	2	15 .1	0 .0	15 .1	
R 2630	» » 17.044	A	*o*	3	14 .6	−0 .3	14 .3	

Segue: TABELLA II.

Lastra numero	Data	Tipo di lastra	Condizioni della lastra	Interno anello	Nucleo			Medie annuali
					grand. stimata	correz. p. fondo	grand. conclusa	
R 2818	1943 Giug. 24.076	A	*o*	2	14 .7	0 .0	$14^m.7$	
R 2819	» » 24.953	A	*o*	3	14 .7	— 0 .3	14 .4	
R 2821	» » 24.967	A	*o*	1	14 .7	+ 0 .3	15 .0	
R 2827	» » 26.050	A	*o*	4	15 .0	— 0 .6	14 .4	
R 2828	» » 26.038	A	*b*	1	14 .0	+ 0 .3	14 .3	$14^m.7$
R 2836	» » 29.085	A	*o*	1	15 .5	+ 0 .3	15 .8	1943.5
R 2837	» » 29.102	A	*o*	1	14 .2	+ 0 .3	14 .5	
R 2848	» Lugl. 6.078	A	*b*	5	15 .4	— 0 .9	14 .5	
R 2849	» » 6.094	A	*o*	2	14 .3	0 .0	14 .3	
R 2859	» Agos. 6.089	A	*b*	5	15 .3	— 0 .9	14 .4	
M 3095	1946 Lugl. 3.026	C	*b*	0	14 .2	+ 0 .6	14 .8	
$R\ 3098_1$	» » 4.006	C	*b*	0	14 .0	+ 0 .6	14 .6	
$R\ 3098_2$	» » 4.009	C	*b*	1	14 .6	+ 0 .3	14 .9	$14^m.5$
R 3109	» » 6.087	C	*b*	4	15 .0	— 0 .6	14 .4	1946.6
R 3307	» Ott. 28.983	C	*m*	2	14 .2	0 .0	14 .2	
R 3311	» » 29.938	C	*b*	5	15 .2	— 0 .9	14 .3	

La tabella II riassume i risultati; le lastre sono prese dagli osservatori F. Zagar (Z), L. Rosino (R), G. Mannino (M), P. Tempesti (T) e G. Galazzi (G), le date si intendono in tempo universale, il tipo di lastra è per la massima parte Agfa Isochrom (A) e per una piccola parte Cappelli viola (C), infine nella colonna delle condizioni della lastra *o* significa *ottima*, *b* significa *buona* ed *m mediocre*. La penultima colonna riporta le grandezze risultanti, che oscillano dalla $14^m.3$ alla $16^m.4$, abbracciando 2.1 classi di grandezze della scala convenzionale assunta, intervallo che non può imputarsi agli errori di stima, i quali difficilmente possono superare $0^m.5$. Ogni dubbio sulla variabilità del nucleo viene del resto eliminato quando si considerino i risultati ottenuti entro ciascun grado di annerimento. Le escursioni entro ogni grado sono tutte superiori ad una grandezza, per i due gruppi più numerosi 1 e 2 sono rispettivamente $2^m.1$ ed $1^m.6$, e se si tiene presente che queste sono le escursioni minime in ogni grado, perchè altre osservazioni potrebbero scostarsi di più da quelle presenti, si vede che

le differenze risultanti devono essere reali. Il fenomeno risulta più marcato se in ogni gruppo si prendono le due lastre nelle quali il nucleo è maggiormente differente; tali sono ad esempio le coppie di lastre 1896 e 3098_1; 2120 e 2828; 1494 e 2849; 1898 e 2630; 1454 e 3311.

Un risultato saliente che emerge subito dalla tabella è il graduale aumento della grandezza media nel periodo delle osservazioni. Le medie annuali riportate nella ultima colonna della tabella II, se si eccettua quella del 1941 basata su sole 4 lastre di cui 2 nella stessa sera, indicano appunto tale lento innalzamento. In relazione a questo andamento è da tenere presente che lo specchio parabolico del telescopio, che ha fornito queste lastre, fu alluminato nella primavera del 1942, e cioè tra la media del 1941 e quella del 1942, e che un possibile effetto del passaggio dall'argentatura alla alluminatura sulla grandezza del nucleo rispetto alle altre stelle, dato che il primo è ricco di luce ultravioletta [3], renderebbe necessaria la considerazione separata dei due periodi 1939–41 e 1942–46. Tuttavia, il fatto che entro i due periodi l'andamento è sensibilmente lo stesso, ed il fatto che anche entro ciascuno di questi periodi minori le escursioni sono dell'ordine di quelle predette, e cioè $2^m.0$ per il primo e $1^m.6$ per il secondo periodo, lasciano a tutto l'andamento una certa base reale e aggiungono a questi risultati un altro elemento di fiducia.

In conclusione, si può ritenere accertata, da quanto precede, la variabilità apparente del nucleo. Se questa dipende da una variabilità intrinseca del nucleo, stesso oppure è causata da fenomeni in seno alla nebulosa, per esempio variazioni di chiarore delle parti che avvolgono il nucleo oppure spostamenti di masse gassose, potrà essere chiarito quando con materiale più abbondante e sopratutto più omogeneo si potranno ottenere le caratteristiche di queste variazioni. Tuttavia, l'evidenza di variazioni rapide dalla tabella II, come la diminuzione graduale di splendore da $14^m.8$ a $16^m.0$ nelle 4 pose successive dell'8 settembre 1939, il salto da $14^m.4$ a $15^m.1$ nella sera del 15 agosto 1942 e quello da $15^m.8$ a $14^m.5$ nella sera del 28 giugno 1943, fanno ritenere che si tratti piuttosto di variazioni effettive del nucleo. Una nuova serie di osservazioni più estesa e continua, specialmente con filtri opportuni di luce, dovrebbe portare un contributo notevole in questo problema.

(3) G. ABETTI e M. G. FRACASTORO, *L'alluminatura degli specchi astronomici.* « La Ricerca scientifica », A. 12, n. 5 (1941).

Fisica. — *Un'esperienza sulla teoria della relatività.* Nota(*) del Corrisp. A. Amerio.

In una Nota precedente (« Rend. Lincei », vol. II, 1947, p. 238) ho esposto un metodo atto a misurare la velocità della luce. Questo metodo differisce da tutti i metodi finora seguìti nelle determinazioni fisiche di questa velocità, in quanto la determinazione viene fatta sul tempo che impiega la luce ad andare da una stazione ad un'altra, mentre in tutti i metodi precedenti si misura la durata di una andata e di un ritorno. Questa differenza fa sì che il metodo si presti ad una esperienza che ritengo di notevole importanza, perchè i risultati che si possono prevedere secondo la teoria della relatività o secondo la teoria classica sono nettamente distinti.

Due stazioni A e B, lontane, sono perfettamente simmetriche rispetto ad un piano ideale e in ognuna di esse sono allineati sulla retta che le congiunge: un nicol, una cellula di Kerr, un altro nicol incrociato col primo, mentre un intenso fascio di onde elettriche è diretto da A a B; queste onde opportunamente raccolte vanno ad attivare periodicamente le due cellule di Kerr. I nicol corrispondenti delle due stazioni sono paralleli.

Con onde lunghe si possono prevedere vari valori delle loro lunghezze per i quali mentre la luce che passando attraverso alla cellula di A giunge sempre in B, quella che proviene da B, non attraversa il sistema cellula–nicol che si trova in A.

Supponiamo che le due stazioni A e B siano disposte secondo un parallelo terrestre e che al momento dell'esperienza il moto della Terra nella sua rivoluzione intorno al Sole sia diretto da A verso B, cioè nel senso stesso in cui si propagano le radio onde.

Vediamo ora quanto si può prevedere tanto nella teoria classica quanto secondo la teoria della relatività, allorchè le onde siano di lunghezza *dello stesso ordine dello spazio percorso dalla Terra mentre la luce va da una stazione all'altra.*

Supponiamo che il moto della Terra sia diretto da A verso B, che c sia la velocità della Luce, v quella della Terra e d la distanza A B.

Secondo la teoria della relatività, la luce impiega lo stesso tempo ad andare da A a B come da B ad A.

Secondo la teoria classica la luce per andare dalla stazione A alla B, cioè nello stesso senso, in cui si muove la Terra, impiega il tempo $t_1 = \frac{d}{c - v}$ durante il quale la Terra si sposta da A verso B di:

$$s_1 = v \frac{d}{c - v}.$$

(*) Presentata nella seduta dell'11 giugno 1947.

Per andare invece da B ad A la luce impiega il tempo $t_2 = \frac{d}{c+v}$ durante il quale la Terra si sposta di:

$$s_2 = v\frac{d}{c+v}.$$

Se supponiamo, AB $= d =$ 10.000 m. si ha:

$$s_1 = 30.000\,\frac{10000}{299970} = 1{,}00010\ldots \text{ m.}$$

$$s_2 = 30.000\,\frac{10000}{300030} = 0{,}99990\ldots \text{ m.}$$

Si può quindi anche in questa teoria trascurare la differenza fra s_1 ed s_2 che è di soli due decimi di mm. ed ammettere che la Terra si sposti di 1 m. mentre la luce percorre i 10 km. in un senso o nell'altro.

Stabiliamo ora che la lunghezza delle radio onde sia quadrupla del cammino che percorre la Terra mentre la luce va da A a B. In queste condizioni mentre la luce percorre uno spazio eguale ad AB, le onde compiono 2.500 oscillazioni e il tratto percorso dalla Terra nello stesso tempo è uguale a $^1/_4$ della lunghezza di dette onde. Nel caso particolare ora considerato le radioonde sono lunghe 4 m. perciò mentre la Terra percorre il metro che abbiamo calcolato, le radioonde compiono un quarto della loro vibrazione.

Ne segue:

TEORIA CLASSICA. – Mentre la luce è diretta da A verso B passa da A in fase massima, *si accompagna* con le radio onde, giunge in B in fase massima e passa. Il cammino si è allungato di un metro e le onde hanno compiuto 2.500 oscillazioni più $^1/_4$.

La luce che da B va verso A, impiega un tempo minore e trova il cammino accorciato di un metro, per cui durante il tragitto le onde in A compiono 2.500 vibrazioni meno $^1/_4$. Se nel tratto AB sono comprese esattamente 2.500 onde, le stazioni B ed A sono sempre in fase concorde e la luce da A va a B con quella fase massima con la quale è passata in A e passa attraverso B, ma la luce che da B va verso A non troverà le stesse condizioni perchè durante il suo tragitto, la stazione A si è avvicinata alla B di un metro, cioè di $^1/_4$ d'onda; perciò la luce che è entrata per B in fase massima giunge in A quando le onde vi hanno compiuto 2.500 oscillazioni meno $^1/_4$ e pertanto sono in fase minima; perciò la luce *non passa*.

Lo stesso avverrebbe anche se nel tratto AB non fossero contenute esattamente 2.500 onde, ma, ad esempio 2.500 più $^1/_4$ d'onda, perchè, in tal caso, mentre B è in fase massima, A è in fase minima, ma quando la luce giunge da B ad A essendosi il cammino accorciato di $^1/_4$ d'onda, in A le onde avranno compiute esattamente 2.500 oscillazioni e perciò saranno di nuovo in fase minima e la luce *non passerà*. Lo stesso avverrebbe se vi fossero 2.499 onde più 3/4, perchè allora in A si compirebbero durante il tragitto della luce 2.499

oscillazioni più $^1/_2$; perciò la stazione A sarà ancora in fase minima e la luce *non passerà*.

In complesso, quindi, quando la lunghezza d'onda sarà quadrupla del percorso della Terra o molto prossima a questo valore, la luce passerà da A a B ma non da B ad A.

Se quanto sopra è detto avviene a mezzogiorno, mentre cioè la Terra si sposta nel senso da A verso B, alle 18 o alle 6 del mattino la componente della velocità di traslazione della Terra nella direzione AB è nulla; quindi il cammino della luce che va da A a B si è accorciato di 1 m. mentre il suo cammino da B ad A si è allungato di altrettanto; essi perciò sono diventati uguali e le trasmissioni della luce devono avvenire ugualmente nei due sensi.

Invece alla mezzanotte il moto della Terra intorno al Sole avverrà nella direzione da B ad A e se si trasmettessero le onde pure da B verso A gli effetti che sono stati descritti per il mezzogiorno si invertirebbero, cioè la luce passerebbe sempre da B ad A e mai da A a B.

Ma se si lascia ferma la stazione trasmittente delle onde elettriche la luce passerà sempre da A a B, il percorso del tragitto AB sarà accorciato di 2 metri, rispetto a quello del mezzodì e quello da B ad A si sarà allungato altrettanto, cioè di mezza onda, e perciò *le cose si presenteranno come a mezzogiorno*.

Teoria della Relatività. – Il tempo che impiega la luce ad andare da A a B è quello stesso che impiega per andare da B ad A.

In conseguenza, immaginiamo che A e B siano contemporaneamente in fase massima. Poichè la luce che parte da A, mentre A e B sono in fase massima, giunge in B in fase massima, vuol dire che in quel tempo le radioonde hanno compiuto un numero pari di quarti di vibrazioni e perciò anche la luce che parte da B in fase massima troverà in fase massima A e *passerà*.

Se invece la luce in quel tempo compie un numero dispari di quarti d'onda, la luce parte da A mentre in B c'è un minimo, ma in B trova un massimo; e anche la luce che da B è diretta verso A, passa per B, in fase massima, mentre in A c'è un minimo, ma quando vi arriverà troverà un massimo e *passerà*.

Pertanto la luce *passerà* sempre in entrambi i sensi.

Quanto precede costituisce quindi una specie di *experimentum crucis* tra le due teorie.

Non dico che la teoria della relatività abbia ormai bisogno di questo nuovo apporto per la sua conferma. Ma anche la teoria di Huyghens al tempo di Foucault aveva già avuto fin dal 1801 per opera di Young e sopratutto nel 1815 per opera di Fresnel le prove più belle con tutte le esperienze delle interferenze e della diffrazione e tuttavia ebbe ed ha importanza grande l'esperienza di Foucault che misurando, nel 1862, direttamente la velocità della luce nell'acqua, vide che era minore che nel vuoto, come vuole la teoria di Huyghens e contrariamente alla teoria di Newton.

Ora l'esperimento proposto dà un risultato secondo una teoria e l'opposto secondo l'altra, perciò permetterebbe una conferma più sicura di tante altre della teoria della relatività.

Inoltre, ed è questa la ragione più importante che mi ha indotto a pubblicare questa proposta, l'esperienza è fondata sul paragone del comportamento di un raggio di luce che si propaga in un senso con quello di un raggio che si propaga in senso contrario, perciò ha il vantaggio di esser legata alla misura della prima potenza del rapporto $\frac{v}{c}$ che è lo stesso rapporto che si ha fra 1/4 di lunghezza delle radio onde adoperate, (spazio percorso dalla Terra in un certo tempo) e 2500 onde (spazio percorso dalla luce nello stesso tempo). Esso è dell'ordine di 10^{-4} e quindi comodamente accessibile, mentre le esperienze di Michelson e Morley, fondate sul paragone di raggi che hanno percorso due cammini ortogonali nel loro comportamento globale di un'andata e di un ritorno, dànno, come è ben noto, il rapporto $\frac{v^2}{c^2}$ che è dell'ordine di 10^{-8}, quindi è al limite delle misure eccezionali di altissima precisione.

Geologia. — *L'età del « Macigno »*. Nota (*) del Socio F. SACCO.

Negli studi geologici vi sono formazioni o terreni che, sin dal primo momento della loro individualizzazione, furono collocati nella loro precisa posizione nella serie stratigrafica e sempre vi rimasero senza discussione. Altri invece subirono svariate, anche straordinarie, interpretazioni cronologiche diverse secondo i tempi, i luoghi, nonchè i geologi che li studiarono. Fatto che dipende essenzialmente, più che non da fenomeni tettonici (che possono rovesciare o comunque alterare l'originaria posizione stratigrafica dei terreni, o da trasgressioni, lacune o simili) dalla mancanza o scarsità di fossili-guida, ciò che sempre più dimostra l'importanza della Paleontologia negli studi geologici.

Di tali casi abbiamo tipici esempi sia nelle Alpi, sia nell'Appennino. Così, la ben nota *formazione micafillitica delle Pietre Verdi* nelle Alpi fu riferita ai più diversi orizzonti geologici, dall'Arcaico all'Eocene, come esposi in recenti Note sui *Problemi delle formazioni ofiolitifere delle Alpi e dell'Appennino* (« Boll. Uff. geol. », vol. LIX, 1934) e sopra *L'età delle formazioni con Pietre Verdi* (« Rend. Acc. Naz. Lincei », vol. II, fas. 1, 1947), finchè il rinvenimento di qualche raro fossile la fece collocare nel Mesozoico (specialmente Lias) metamorfico.

Qualcosa di simile si verificò per l'analoga formazione ofiolitifera delle cosidette *Argille scagliose* o dei *Galestri* dell'Appennino, in cui si credette di segnalare fossili delle più diverse età, dai Bactrilli del Trias ai Molluschi

(*) Presentata nella seduta del 10 maggio 1947.

del Miocene, dando così origine alle più diverse interpretazioni cronologiche, mentre che in realtà i fossili, rari ma caratteristici, che vi si rinvengono, indicano trattarsi certamente di Cretaceo (str. s.).

Un altro caso d'incertezza cronologica e stratigrafica credo opportuno di esaminare, quello cioè della formazione arenacea, tanto estesa e potente nell'Appennino, nota col nome volgare toscano di *Macigno* (Brocchi 1814, Beudant 1824) e scientifico di *Etrurio* del Pilla (1845).

Questa formazione arenaceo–marnosa, di tipo neritico–littoraneo, studiata già da Targioni Tozzetti, Brocchi, Pareto, Guidoni, De la Beche, Savi, Hoffmann, Pilla, ecc. fu dapprima considerata come *terreno di transizione* tra Cretaceo ed Eocene, riferendola alcuni al primo (Cretaceo), altri al secondo (Eocene) piano geologico. A. Sismonda la collocò (1846) nell'Eocene riconoscendo la sua sovrapposizione al Nummulitico, ciò che fu confermato dal Murchison nel suo classico lavoro *Sulla struttura geologica delle Alpi e degli Appennini* (1851).

In seguito, il *Macigno* fu generalmente riferito all'Eocene inferiore perchè lo si vedeva spesso soggiacere alla formazione ofiolitifera delle « Argille scagliose » e degli « Schisti galestrini » che erano ritenuti terreni dell'Eocene superiore.

Quando, sessantatre anni fa, incontrai per la prima volta la formazione del *Macigno* nelle Alpi Marittime e precisamente nel gruppo dell'Enchnstraye (dove tocca i 2955 m.) lo riferii all'Eocene superiore [1], vedendovi molto sviluppati, al disotto di esso, i terreni marnoso–arenacei ed infine i calcari nummulitiferi.

Ma quando nel 1890 iniziai gli studi geologici dell'Appennino [2], influenzato dall'opinione generale allora dominante e dal vedere il *Macigno* ora sovrapposto ed ora sottoposto alle « Argille scagliose » (che già ritenevo cretacee per i fossili rinvenutivi), credetti dover separare un *Macigno* inferiore riferibile all'Infracretaceo ed uno superiore riferito all'Eocene.

Però proseguendo il rilevamento potei tosto (nelle Aggiunte e Correzioni alla fine, p. 227, di detto lavoro del 1891) correggere tale errore d'interpretazione, riconoscendo che era dovuto al fatto tettonico del frequente rovesciamento degli argilloscisti ofiolitiferi sul *Macigno*, e che in posizione regolare esso passa in basso ai calcari nummulitiferi del Niceano di Pareto (1869); tale interpretazione del *Macigno*, complessivamente unico, facies arenacea dell'Eocene superiore, sviluppai sempre, anche graficamente nella Carta geologica dell'Appennino settentrionale e centrale (1913). Ma l'idea dei due *Macigni*, uno inferiore e l'altro superiore, giovane, rimase sempre in alcuni geologi, come specialmente nel Lotti, complicandone le carte e le sezioni geologiche.

Intanto il rinvenimento di fossili pseudomiocenici, specialmente nel famoso *Macigno di Porretta*, faceva prendere a molti geologi un altro indirizzo,

(1) F. Sacco, *Massima elevazione dell'Eocene nelle Alpi Occidentali italiane.* (« Boll. C. A. I. », n. 52, 1885).

(2) F. Sacco, *L'Appennino settentrionale.* (« Boll. S. G. I. », vol. X, 1891).

cioè a pensare che tutto il *Macigno* sia miocenico ! Così, dopo Bianconi (1867), vediamo De Stefani (1877–1881), Manzoni: *Della miocenicità del Macigno* (1881), Capellini (1881), Ristori (1886), Gioli (1887), Trabucco (1898), Silvestri (1900), Nelli (1903), e più recentemente Principi (pr. p.) e Lipparini, il quale, sentenziò che « Il Macigno dell'Appennino settentrionale non è eocenico », (« Giornale di Geol. pratica », 1936), abbracciare e sostenere l'idea del *Macigno* miocenico.

Sorse così la *questione eomiocenica*, tuttora parzialmente aperta ed in cui certi fossili, come per esempio le grandi Lucine, furono assunti come fossili–guida miocenici dando loro un valore cronologico che in realtà non hanno, anche perchè sono forme a conchiglia liscia, poco variabile, quindi poco caratteristica, avendo essenzialmente il valore batimetrico ambientale, di mare poco profondo.

Ma nel frattempo un altro ritrovato paleontologico veniva a dare un altro indirizzo cronologico agli studiosi di questo terreno; cioè la scoperta di alcune Orbitoidi (Lepidocicline) che si ritennero tipiche dell'Oligocene; per cui quindi il *Macigno* diventava oligocenico. Questa interpretazione, direi oligocenica, fu iniziata dal Pantanelli che scoprì nella serie marnoso–arenacea del nummulitico dell'Appennino modenese una Orbitoide, la *Lepidocyclina Gumbeli* Segu. (= *L. dilatata Micht.*) riferendosi ad una *Lepidocyclina* trovata dal Seguenza in Calabria (1880), come egli pubblicò nella Nota *Sopra un piano del nummulitico superiore dell'Appennino modenese*, (« Atti Soc. Natur. Modena », vol. XII, 1893).

Seguirono varii studi, di Lotti (1898), De Angelis (1897), Verri–De Angelis (1900), Gentile (1901), Prever (1904–05), Checchia–Rispoli (1905), Silvestri (1905), ecc., che segnalarono in varii punti dell'Appennino settentrionale, centrale e meridionale, nonchè in Sicilia, la presenza delle Lepidocicline insieme a Nummuliti, Ortofragmine, ed Alveoline di tipo eocenico, propendendo però generalmente a riferire la formazione inglobante all'Oligocene per la presenza della Lepidocyclina, secondo l'opinione di Douvillé e Lemoine.

Tale interpretazione fu specialmente seguìta sul terreno dal prof. Principi che segnalò, nella vasta e potente formazione del *Macigno* dell'Appennino tosco–romagnolo, molte lenti o strati calcarei nummulitiferi con Lepidocicline, riferendole all'Oligocene, colle gravi conseguenze sulla interpretazione cronologica e tettonica di tali terreni marnoso–arenacei e di quelli soprastanti.

Nel *Quadro riassuntivo della costituzione geologica dell'Appennino settentrionale e centrale* (1904) non dubitai di segnare, secondo le mie ricerche, le Lepidocicline nel Bartoniano passante al Parisiano, e poi sostenni tale tesi eocenica, anche nella Nota speciale *Sur la valeur stratigraphique des Lepidocyclina et des Miogypsina* (« Bull. Soc. géol. Franc. », 1905) corredata dalla relativa bibliografia; anche nei seguenti lavori sopra *La Puglia* (1911) e *L'Appennino meridionale* (1911) sostenni l'eocenicità di detta mescolanza di Lepidocicline con Nummuliti, Ortofragmine, Alveoline, ecc. Ma prevalse in generale la tesi oligocenica, non solo in Italia ma in varie parti della Terra dove furono segnalate formazioni a Nummuliti e Lepidocicline. Credo anzi che per tal modo di vedere parecchie formazioni geologiche di diverse regioni

della Terra furono collocate nell'Oligocene, mentre sono piuttosto dell'Eocene superiore.

Ricordo per esempio che l'interpretazione, direi, oligocenica, fu abbracciata da diversi eminenti geologi francesi, quali Boussac, M. Bertrand, Haug, ecc. nei loro studi e nelle relative carte geologiche per terreni arenacei, analoghi al *Macigno* appenninico, che si sviluppano nelle Prealpi marittime e sono noti, coi nomi locali di *Grés d'Annot, Grés de Menton, Grés de l'Embrunais*, ecc.; interpretazione cronologica a cui giustamente, a mio parere, si oppose il Franchi con diversi scritti cominciando da quello sopra *Le arenarie di Annot*, ecc. (« Boll. Com. geol. », vol. XLV, 1916) ritenendole invece eoceniche, come credo siano veramente.

Tralasciando per brevità altre citazioni di Note di autori che sostengono l'oligocenità del *Macigno* e formazioni analoghe, ricordo almeno la più recente, quella del prof. C. Migliorini sopra *L'età del Macigno dell'Appennino, ecc.* (« Boll. Soc. Geol. It. », vol. LXIII, 1944) [3] nel cui riassunto, basandosi sulla presenza delle Lepidocicline nei calcari nummulitiferi intercalati e soggiacenti alla formazione del *Macigno* e sui fenomeni di rimaneggiamento, è precisato che il *Macigno non può essere più antico dell'Oligocene*.

Tale importante affermazione, condivisa da gran parte dei geologi e paleontologi moderni, è dunque basata su due considerazioni principali, cioè:

1° la facilità con la quale i macroforaminiferi andrebbero soggetti a rimaneggiamenti, ciò che spiegherebbe la mescolanza di Nummuliti e Ortofragmine tipiche dell'Eocene con Lepidocicline ritenute oligoceniche.

Ora i fenomeni di rimaneggiamento sono ben riconoscibili in alcuni casi; per esempio quello dei Foraminiferi esportati, per azione acquea, dai depositi pliocenici marini della media Val Tiberina, convogliati dalle acque torrenziali e poi deposti più a valle colle fanghiglie fluviali del Tevere. Ma nel caso in esame, di depositi marino-littoranei, spesso un po' irregolari e brecciodi, inglobanti Nummuliti, Ortofragmine, Lepidocicline, Miogipsine ecc., riesce assai più naturale interpretarli come depositi costieri di spiaggia in cui gli organismi littoranei furono talora un po' rimaneggiati specialmente in periodi di mareggiate o simili.

L'ipotesi di un mare oligocenico le cui onde di spiaggia abradano un terreno eocenico in modo da esportarne i fossili e depositarli mescolati agli organismi oligocenici presso tali spiaggie appare poco verosimile. Tante volte ho osservato depositi o accumuli di fossili fra le sabbie del Miocene littoraneo torinese, fra quelle del Pliocene pseudoastiano o astiano subappennino ecc., nonchè di conchiglie recenti sui littorali attuali, specialmente dopo una mareggiata, per rimaneggiamenti di organismi della stessa età, per cui detta origine sembra affatto naturale per i depositi nummulitiferi in questione senza dover ricorrere a rimaneggiamenti complicati di fossili di due età diverse.

(3) Il « Bollettino » è datato dicembre 1944, fu stampato nel 1946 e distribuito ai Soci alla fine di marzo 1947.

2° Rimane però l'altra questione della mescolanza di Nummuliti e Ortofragmine certamente eoceniche con Lepidocicline ritenute oligoceniche. Ma è proprio sicuro che le Lepidocicline siano solo oligoceniche ? Pare di no. Infatti, per esempio, il Renz nel suo studio sopra *Il Terziario umbro-marchigiano* (1933) cita diverse *Lepidocicline* (*L. dilatata*, *L. Sumatrensis*, *L. Tournoueri*, *L. elephantina* e *L. Raulini*) nell'Eocene medio di Preturo. Io ebbi a constatare varie Lepidocicline (specialmente la *L. dilatata* e la *L. Tournoueri*) nella parte superiore della cosidetta *Scaglia cinerea* che è generalmente attribuita all'Eocene superiore (F. Sacco, *Le formazioni eomioceniche dell'Appennino*, « Atti Acc. Sc. Torino », vol. 71, 1935, con Carta geologica in cui l'Eocene arenaceo *Macigno* è distinto da quello marnoso). Ma particolarmente importante è lo studio speciale di A. Senn sopra *Die strat Verbreitung der tert. Orbitoiden* (« Ecl. Geol. Helvet. », 1935) precisante l'apparsa di tali Orbitoidi nell'Eocene medio ed il loro rapido sviluppo nell'Eocene superiore in varie parti della Terra.

È perciò ben naturale che le Lepidocicline si trovino spesso colle Nummuliti e le Ortofragmine nel *Macigno* ed in altre formazioni dell'Eocene medio superiore dell'Appennino (vedi i lavori di Principi, Checchia-Rispoli, Migliorini, Marchesini, Teichmuller ecc.) senza dover ricorrere ad illogici rimaneggiamenti.

Quindi anche la Paleontologia si accorda colla Tettonica (pure con sollevamenti sino al rovesciamento), colla Litologia (compattezza litoide), coll'Altimetria (sino a 2000-3000 m. s. l. m.), colla Orografia (a facies montana), colla distribuzione geografica appenninica (in gran parte assiale), ecc. per distinguere il *Macigno* come eocenico ed anteriore al grande diastrofismo alpino che chiuse l'epoca eocenica.

Geologia. — *Sull'esistenza del Maestrichtiano nella Migiurtinia*[*]. Nota[**] del Corrisp. G. Checchia-Rispoli.

Recentemente la dott.ssa A. M. Maccagno ha pubblicato in questi « Rendiconti » una Nota con la quale viene data comunicazione dell'esistenza del piano Campaniano nella Migiurtinia settentrionale [1]. Il riferimento cronologico è avvenuto in base alla scoperta di numerosi piccoli foraminiferi contenuti nella roccia calcarea ancora aderente al guscio di alcuni esemplari di echinidi (*Somaliaster magniventer* Hawkins), precedentemente illustrati dalla stessa Maccagno [2]. Lo studio di questi echinidi aveva già permesso all'A. di riferire al Cretaceo superiore, senza più precise indicazioni, la formazione

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia e Paleontologia dell'Università di Roma.

(**) Presentata nella seduta del 10 maggio 1947.

(1) A. M. Maccagno, *Sull'esistenza del Campaniano nella Migiurtinia*, in « Rend. Accad. Naz. dei Lincei », ser. VIII, vol. II, 1947.

(2) A. M. Maccagno, *Osservazioni sul genere « Somaliaster Hawkins »*, in « Boll. Soc. Geol. Ital. », vol. LX, 1941.

delle arenarie superiori con calcari intercalati situati alla sommità di quella serie cretacea di varie località, le quali, secondo le indicazioni del prof. Carlo Migliorini, che diresse la Missione geologica dell'AGIP (1935–39), si trovano in corrispondenza della Lat. 11°15′ e della Long. 49°17′ (Ripa ad ovest di Bur Hardàg a nord di Bio Culul; Bender Cassim) e della Lat. 11°15′ e Long. 49°24′ (Ripa di Tisgèh, a circa 13 km. a SE di Jelahò a nord della strada per Tisgèh; pendice a nord dell'Al Medò a circa 10 km. ad est della Miniera di stagno di Magiajan).

I foraminiferi studiati dalla dott.ssa Maccagno appartengono al genere *Monolepidorbis*, stabilito, nel 1927, dall'Astre per alcune piccole forme, già riferite al genere *Linderina*, ma che si devono considerare piuttosto come intermediarie tra *Linderina* ed *Orbitoides* s. str.

Il genere *Monolepidorbis* finora era conosciuto in due sole località europee riferite al Campaniano e comprende due specie: *M. Douvillei* Astre, del calcare campaniano ad *Alveolina* dei dintorni di Belvès (Aquitania) e *M. Sanctae Pelagiae*, dello stesso autore, del Campaniano del versante nord della Sierra di Turp (Pirenei spagnuoli). Sicchè questo genere si può considerare fino a questo momento come esclusivo del Campaniano.

La dott.ssa Maccagno ha rinvenuto entrambe queste specie, che accompagnano, come ho detto, *Somaliaster magniventer* negli stessi giacimenti.

Questa importante constatazione ha duplice interesse, perchè essa permette, da una parte, di precisare la posizione stratigrafica nella serie cretacea di *Somaliaster magniventer*, finora vagamente conosciuta e, dall'altra, di segnalare l'esistenza del piano Campaniano, che viene per la prima volta indicato nel vasto territorio somalo.

La serie cretacea della Migiurtinia non si chiude con gli strati a *Monolepidorbis* e *Somaliaster*. Secondo le informazioni del prof. Migliorini, sul complesso campaniano, ora riconosciuto, seguono in regolare concordanza altre arenarie e calcari intercalati, che contengono un certo numero di fossili del tutto diversi da quelli sottostanti. Infatti nella collezione echinitica raccolta dalla Missione, conservata nel nostro Istituto, si trovano anche vari Echinidi provenienti da alcune delle su indicate località (Bur di Hardàg), tra i quali ho potuto determinare: *Holectypus Nachtigali* Krumbek (*Discoidea*), *Pyrina Mortenseni* Checchia–Rispoli e *Globator Dainellii* Checchia–Rispoli.

Come è noto, queste tre specie sono molto comuni nella estesissima e ben nota formazione maestrichtiana della Tripolitania e sono accompagnate da un notevolissimo numero di altri fossili, cioè foraminiferi, coralli, briozoi, brachiopodi, molluschi, echinidi, ittiodontoliti, ecc., che hanno formato e formano tuttora oggetto di importanti lavori specialmente da parte di studiosi italiani (3).

(3) Un elenco di specie del Maestrichtiano della Tripolitania, per quanto incompleto perchè si arresta al 1940, si trova in un lavoro del dott. Lipparini, *Tettonica e geologia della Tripolitania*, in « Boll. Soc. Geol. Ital », vol. LIX, 1940.

Nel Maestrichtiano della Tripolitania, tra gli altri foraminiferi, il più comune è l'*Omphalocyclus macropora*, che frequentemente si trova anche aderente agli altri fossili. Lo stesso si constata nella Migiurtinia: io ho avuto la fortuna di ritrovare parecchi esemplari di questo foraminifero, facilmente riconoscibile, attaccato al guscio di un esemplare di *Globator Dainellii*, di guisa che non può esistere dubbio alcuno sulla coesistenza dei fossili nominati.

Credo superfluo aggiungere qui che *Omphalocyclus macropora* è specie comunissima nel Maestrichtiano di moltissime località europee, dell'Africa settentrionale, regione indiana, ecc. e che finora non è stato indicato in formazioni più antiche. Perciò si può concludere sulla scorta dei fatti ora esposti, che quel livello elevato della serie cretacea rappresenta il Maestrichtiano, piano che viene ora segnalato nella Migiurtinia.

Botanica. — *Caratteri e fenomeni della riproduzione nel Nocciuolo* («*Corylus Avellana*» L.): *l'impollinazione*. Nota (*) del Corrisp. A. Trotter.

Il Nocciuolo (*Corylus Avellana* L. s. l.), pianta monoica, è classico nella storia della riproduzione. Si trovano ricordati i due tipi di fiori già in Teofrasto, ed in particolare gli amenti maschili o gattini (τυλοι), che egli osservò sorgere, con esattezza, ma ignorandone la funzione, quando il frutto sta già maturando!. Alcuni secoli più tardi, li troviamo ricordati in Plinio, col nome di *juli*, ma egli aggiunge, che questi a nulla possono servire. Trascorsero altri secoli prima che il botanico tedesco Hieronymus Bock (1498–1554), meglio noto col nome latino di *Tragus*, li ricordasse di nuovo, intravedendo la vera funzione dei due tipi di fiori, che per i vecchi naturalisti, anche in tempi più recenti, causa il loro lentissimo ed apparentemente anacronistico sviluppo, avevano costituito un vero mistero.

Comunque, la separazione dei sessi, pur sullo stesso individuo, rende nel Nocciuolo alquanto complicata, come dirò, la biologia fiorale e con essa i fenomeni della riproduzione, che io ho potuti seguire con più anni di osservazioni. Riservando ad altro contributo lo studio della organizzazione dell'apparato femminile e del processo fecondativo, mi occuperò qui precipuamente dei fenomeni preliminari, relativi cioè all'impollinazione.

Durante il mese di luglio, le infiorescenze ♂ sono già presenti in gran numero, ma a fiorellini rudimentali. In questo periodo iniziale, ma anche più oltre, i singoli fiorellini si presentano non solo rudimentali, ma l'androceo è in fase decisamente meristemale. Il fiorellino è esclusivamente rappresentato da una piccola brattea protettiva, e dall'insieme delle numerose brattee la superficie dell'amento si presenta densamente embricata. L'androceo non trae origine dal meristema primitivo che ha originato la brattea, ma da

(*) Presentata nella seduta dell'11 giugno 1947.

un meristema secondario situato alla sua base. Questo si differenzierà, verso l'autunno, in due minute bratteole opposte, le quali si salderanno con la brattea per 2/3 della loro lunghezza. Tali brattee e bratteole, assieme all'asse minutamente pubescente cui si inseriscono, funzioneranno anche quale apparato di assimilazione e di riserva per lo sviluppo e la nutrizione dell'androceo e del polline.

Tra le bratteole, avranno quindi origine i 4 mammelloni meristemali destinati a differenziarsi da ultimo in 4 stami biloculari. Successivamente, in seguito a sdoppiamento dell'antera e ad una parziale partizione ad Y del filamento, si formeranno 8 antere uniloculari, erroneamente ritenute come 8 stami. Trattasi, in conclusione, di 4 filamenti staminali bifidi, terminati da una unica antera, carattere che accomuna il gen. *Corylus*, a *Betula*, *Alnus*, *Ostrya* e *Carpinus* (Fam. Betulacee), ma lo differenzia dalle tipiche Cupulifere, a filamenti staminali sempre indivisi.

I gattini, dapprima eretti, si vanno allungando nell'estate, divenendo, verso l'autunno, decisamente penduli. Nel periodo dell'antesi (novembre–febbraio), raggiungeranno la loro massima lunghezza e si faranno notevolmente flessibili e mobili, mentre i fiorellini, discostandosi gli uni dagli altri, a divergenza 2/5, faciliteranno il discarico del polline. Il loro allungamento, assai considerevole e rapido in questo periodo, è dovuto a fatti ad un tempo istologici e meccanici. Esso facilita, con una certa perdita di umidità, la deiscenza delle antere, la variabile contrazione delle loro pareti e la separazione longitudinale delle due valve, sensibilizzate da qualche minuto ciuffetto apicale di corti peli. Tali fenomeni si possono seguire agevolmente anche in laboratorio, su rametti fioriferi tenuti in acqua sotto campana di vetro. Si potrà anche osservare come il polline, discaricandosi, si raccolga e si ammucchi sulla brattea, sottoposta a guisa di mensola alle antere del fiorellino superiore. Il polline è perciò pronto a diffondersi non appena una lieve brezza agiterà gli amenti. Ove se ne ravvisi l'opportunità (calma atmosferica e fiori femminei in antesi), scuotendo le piante si potrà favorire ed accelerare il discarico e perciò l'impollinazione. I venti lievi asciutti, come pure le correnti ascendenti, mantengono il polline sospeso nell'atmosfera, a guisa del pulviscolo, che poi lentamente si deposita. I venti forti invece, lo disperdono, ostacolandone la deposizione sulle superfici stigmatiche. Anche l'eccessiva prolungata calma può essere di pregiudizio all'impollinazione, specialmente se associata a nebbie od a piogge che ne favoriscono la germinazione *in situ*, come ho potuto ripetutamente osservare, oppure, lo trascinano fatalmente nel terreno.

Il N. è tipica pianta anemofila. L'aveva riconosciuto anche il nostro F. Arena, di Piazza Armerina, centro corilicolo della Sicilia, nella sua celebre Opera del 1771 (t. II, p. 170), la quale gli conferisce posto eminente tra i precursori della Biologia fiorale. Tutta l'organizzazione del N. è coordinata all'agenzia del vento, non esclusa, come già aveva notato Linneo (*Spons. plant.*), la mancanza di foglie durante tutto il periodo dell'antesi, le quali, se presenti, avrebbero ostacolato la diffusione del polline. Qualche impre-

parato tecnico aveva suggerito l'allevamento apistico nei noccioleti per favorire l'impollinazione, il che è assurdo. I vari insetti che accidentalmente possono visitare i fiori durante il periodo invernale, sono piuttosto predatori che pronubi. Io ne ho potuti osservare pascersi persino di stigmi (qualche Imenottero). L'impollinazione viene invece assicurata, per una stessa Varietà colturale, oltre che dall'assenza di foglie, dai seguenti fattori. Dalla abbondante fioritura e perciò dalla grande quantità di granuli pollinici. Ho calcolato, con molta approssimazione, che le 8 antere di ogni singolo fiorellino possono dare 24.000 granuli, e perciò un amento di 200 fiorellini, circa 5 milioni di granuli. La piccolezza dei granuli, 25–30 μ in media, e la loro secchezza, è del pari favorevole all'anemofilia, come avviene per la diffusione delle spore di molti funghi. La conservazione della vitalità, anche se rimanga a lungo sospeso nell'atmosfera, assicura egualmente una efficace impollinazione. Infatti, la capacità germinativa si mantiene, per osservazioni di laboratorio ed a secondo delle Varietà colturali, da 25 a 40 giorni. Il potere germinativo si va piuttosto affievolendo progressivamente, e per talune Varietà, dopo una quindicina di giorni si è ridotto del 50 %, estinguendosi del tutto in capo a 25–30 giorni. Però l'aria più asciutta del laboratorio, accelera la perdita del potere germinativo, mentre l'esterna più umida lo prolunga. Anche la temperatura influisce naturalmente sulla germinazione, con un *optimum* che sta tra i 12° ed i 22° C., con massima percentuale di granuli germinanti, rapidità di sviluppo e di allungamento del tubo pollinico. Copiose germinazioni si possono avere anche con temperature di 5°–11°C., ma in tal caso occorrono circa 24 ore prima che la germinazione si presenti nettamente delineata. Minime temperature di 1° a 4°C. non impediscono la germinazione, solo la rallentano e ne abbassano notevolmente la percentuale. Anche tali caratteristiche appaiono coordinate con l'anemofilia e con il periodo stagionale in cui si produce l'impollinazione. Per Varietà selvagge, prove colturali mi hanno dimostrato una maggiore accelerazione ed una più elevata percentuale di granuli germinanti in confronto di talune coltivate.

L'impollinazione, causa la durata del potere germinativo e l'agenzia del vento, può avvenire teoricamente a notevoli distanze. Secondo lo svedese Joss Ramussen, polline di N. è stato trovato a centinaia di chilometri dal più prossimo luogo di emissione. Anche gli studi sui depositi fossili di polline delle antiche torbiere, hanno rivelato la presenza assai diffusa e copiosa di polline di N., e di altre specie anemofile, in buona parte almeno di provenienza, certo, più o meno lontana. In pratica tuttavia, l'impollinazione è tanto più facile quanto minore è la distanza, e maggiore la massa delle piante. Per quest'ultima evenienza, si deve ritenere che le distanze propizie possano risultare più o meno considerevoli. Altrimenti non si saprebbe spiegare la elevata produzione di talune Varietà notevolmente proterandre, e quasi esclusive in qualche Comune: ad esempio la Var. S. Giovanni, a Sarno.

Il polline asciutto, quale si discarica dall'antera, è leggermente tetraedrico o poliedrico, ma in acqua rapidamente rigonfia divenendo sferoidale od un po' ellissoide, mentre aumenta di volume causa la notevole elasticità

del tegumento. Possiede 3 pori germ. equidistanti, situati al centro di una lieve prominenza dell'esina, in molti granuli sovrapposta ad un tenue vacuolo. I granuli contengono copiose riserve nutritive. Secondo analisi di Planta e di altri: amido 5.26 %, saccarosio 14.7, sostanze proteiche 30.06, basi nucleiniche (ipoxantina e guanina) 0.15, acqua 4.95, sensibili tracce di guanosina (vernina) e di grassi non precisati, inoltre una sostanza colorante, ed acido fosforico non accertato, ma presente in affini generi anemofili dall'1.29 al 3.33 %; nel tegumento del granulo (esina), sostanze azotate 4.83 %, pollenina e cellulosa, rispettivamente 7,3 e 1.1 %. Tutto ciò può mettersi anche in relazione: con il pronto e notevole allungamento del tubo pollinico, anche in semplice goccia pendente senza addizione di sostanze nutritive; con la possibilità vi si costituisca un rigonfiamento apicale tondeggiante, con apparenza di granulo secondario; inoltre con il percorso forse prevalentemente ectotropico del tubo pollinico, e la sua successiva lunga persistenza, entro il pistillo rudimentale sino al momento della fecondazione (circa 4 mesi).

Nelle Varietà coltivate in confronto delle selvagge, si nota una maggiore percentuale di granuli incapaci di germinazione: granuli riconoscibili per la loro notevole piccolezza; per forma persistentemente poliedrica anche in un mezzo liquido; per vacuoli persistenti e non riducibili; per deficente differenziazione dei nuclei; per povertà di riserve idrocarbonate od albuminoidiche, rilevabile con una differente intensità di colorazione di fronte ai loro reattivi, ecc. Fenomeni parassitari possono essere del pari dannosi, compromettendo lo sviluppo degli amenti, o successivamente dei fiori, e pregiudicando perciò l'impollinazione. Come quelli dovuti all'acaro *Eriophyes avellanae*, ma soprattutto al coleotterino *Coeliodes ruber*, che si annida allo stato larvale entro gli amenti.

L'antesi ♂, in un noccioleto costituito da più Varietà, precoci e tardive, può protrarsi, nella Campania, da fine novembre a fine febbraio, ma per ogni singola Varietà o singolo individuo, si riduce a circa un mese, od anche meno se vi sia coincidenza di avversità meteoriche (piogge sciroccali con vento), le quali compromettono l'impollinazione. Molto più che nel N., sia spontaneo che coltivato, si ha di rado una perfetta omogamia, più di frequente proteroginia, ma soprattutto proterandria, o meglio quella che io chiamerei proterogino– o proterandro–omogamia, cioè l'antecipata fioritura femminile o mascolina, ma con qualche ristretto irregolare periodo di omogamia, specialmente precoce, dovuto ad antecipate antesi di un certo numero di fiori ♀, in corrispondenza di schiuse ritardate di fiori ♂; fenomeni che facilmente sfuggono, se non si segue molto da vicino e periodicamente una singola pianta durante l'intera fase della sua fioritura. Ne deriveranno perciò fenomeni di *geitonogamia*, con impollinazioni cioè tra fiori appartenenti ad uno stesso individuo, ma forse prevalentemente di *exogamia* se appartenenti a piante diverse, od anche di *notogamia* se tra individui di differente Varietà.

Per talune Var. coltivate della Campania, ho potuto fissare le seguenti caratteristiche, relative all'impollinazione, ad altro fenomeno correlativo (fogliazione), ed in rapporto alla loro periodicità:

Varietà		Tipo impoll.	Inizio antesi ♂	Inizio antesi ♀	Fogliazione
C. Avellana L. s. l.	Canellina	proterog. – omog.	c. metà II	fine I	c. metà IV
	Pignatella	proterog. – omog.	I^{a} metà II	metà I	c. metà IV
	Bianca	proterandr. – omog.	metà I	fine I	c. primi IV
	Forcinella	proterandr. – omog.	I^{a} metà I	metà I	c. primi IV
	Rossa	proterandr. – omog.	metà I	2^{a} metà I	c. primi IV
	Scritta	proterandr. – omog.	fine XII	metà I	c. primi IV
C. maxima Mill. (= tubulosa Will.)	Barbarella	omogama	fine XII	fine XII	c. metà III
C. Avellana X *maxima* Trott.	Camponica o Tonda napol.	proterandr. – omog.	primi XII	fine XII	metà III
	Mortarella	proterandr. – omog.	fine XII	primi I	metà III
	Riccia	proterandr. – omog.	I^{a} metà XII	fine XII	metà III
	S. Anna	proterandr. – omog.	I^{a} metà XII	primi I	metà III
	S. Giovanni	proterandr. – omog.	fine XI	metà XII	metà II

Rispondono perciò alle esigenze di una buona impollinazione e quindi di una maggiore produzione, gli impianti tradizionali, forse sino dall'epoca romana, specializzati e massicci, cioè a carattere boschivo (tuttavia non troppo fitti), anzichè quelli sparsi o perimetrali, oppure a filari distanziati qualora manchino di un opportuno orientamento in rapporto allo spirare dei venti. Egualmente rispondono gli impianti, tradizionali nella Campania, pur nel loro empirismo, a più Var. consociate, anche con pochissime piante, i quali favoriscono una omogamia funzionale, dovuta alle differenti caratteristiche fenoscopiche delle Var. Si può anche rilevare come la proteroginia sia parzialmente presente in alcune Var. tardive, appartenenti allo stipite *C. Avellana* L., mentre la proterandria si mostra costante nelle Var. precoci, che io ritengo di origine ibrida [1].

Una assoluta proterandria o proteroginia, mi è ignota nel N.; è però ammissibile in Var. selvagge, quale perfezionamento dei fenomeni dicogamici, già insiti del resto nella unisessualità e nella anemofilia.

(1) A. TROTTER, *Osservazioni morfologiche e genetiche sui Corylus*. «Annali R. Ist. Sup. Agrario di Portici», vol. III, 1929, pp. 209–235, con 2 tav. e fig.

Zoologia. — *Nuove notizie sulla Cecidomia delle olive* (« *Prolasioptera berlesiana* » *Paoli*). Nota (*) del Socio F. Silvestri.

La Cecidomia più comune delle olive nell'Italia continentale (*Prolasioptera berlesiana* Paoli) non è un insetto dannoso, come si riteneva fino al momento di una mia recente pubblicazione (1), ma un insetto agrariamente utile, perchè ogni sua larva distrugge un ovo della Mosca delle olive durante la prima e la seconda generazione estive della stessa.

Infatti, dalle mie osservazioni risultò che fin dal mese di giugno, quando la mosca comincia a deporre un ovo in un'oliva immatura, accorre a questa la femmina della detta Cecidomia e depone un ovo accanto all'ovo della mosca attraverso lo stesso foro di deposizione scavato nel mesocarpio dalla mosca. L'ovo di questa è lungo circa mm. 0,85 e largo 0,20, mentre quello della Cecidomia è lungo mm. 0,40 e largo 0,10 e compie lo sviluppo in circa 24 ore, mentre quello del *Dacus* impiega (nella stessa oliva e nella stessa stagione) circa il doppio di tempo, così che la larva neonata della Cecidomia ha tutto l'agio di attaccare l'ovo della Mosca, di succhiarlo, affiosciarlo per modo che in parte il contenuto stravasa dal guscio. Su questo, e sulla superficie vicina della camera dell'ovo della Mosca, si sviluppano a poco a poco (dal 1° giorno di vita della larva della Cecidomia) ife di un fungo (*Phoma*, o *Macrophoma*, *dalmatica* Thum.), il sarcocarpio dell'oliva intorno alla camera dell'ovo diventa a poco a poco gelatinoso e di colore rosso bruno e poi nerastro fino a formare una caratteristica macchia a contorno subcircolare del diametro di mm. 5 circa (o poco maggiore). In tale parte dell'oliva, la larva della Cecidomia completa il suo sviluppo in 8–10 giorni, poi attraverso lo stesso foro di deposizione dell'ovo della Mosca, fuoriesce, cade sul terreno, si nasconde come può in esso, si tesse un bozzolo sericeo pergamenaceo di colore isabellino più o meno scuro, si trasforma in pupa e (in estate) dopo 7 a 9 giorni dà l'adulto.

In oliveti dell'Italia meridionale, come quelli di Pisciotta (Salerno), i primi adulti di tale Cecidomia dalle nuove olive dell'annata si possono avere fin dall'8 luglio (nel 1946) e numerosi si possono avere durante il resto di luglio, in agosto e settembre fino a che le olive non cominciano ad essere invaiate (qualche adulto si può ottenere da olive rimaste verdi in ottobre); in complesso dalla 2ª quindicina di giugno alla 2ª di settembre si possono avere da 3 a 4 generazioni della Cecidomia a danno della Mosca delle olive, della quale distrugge l'ovo; perciò, quantunque l'oliva vada perduta (cadendo in seguito alla deposizione dell'ovo della Mosca, alla utilizzazione di tale ovo da parte della Cecidomia e allo sviluppo del *Phoma*), si ha la distruzione dell'ovo delle prime generazioni della Mosca con grande vantaggio per l'agricoltore.

(*) Presentata nella seduta dell'11 giugno 1947.

(1) « Moniteur international de la protection des plantes », XIX (1945), pp. 73–76 e in « Olivicoltura », I (1946), pp. 3–6.

Fino alla primavera del 1945 non ci era noto null'altro della biologia della *Prolasioptera berlesiana*, perciò io nella Nota sopra ricordata scrivevo:

« Dall'autunno di un anno alla fine della primavera dell'anno seguente è probabile che la *Prolasioptera* viva su altre piante spontanee che si trovano negli oliveti o vicini ad essi, perchè nel laboratorio di Portici non l'abbiamo mai ottenuta da olive bacate raccolte da novembre a maggio. Questo è un punto molto importante che sarà studiato, perchè una volta accertato l'intero ciclo annuale di questa specie, si potrà vedere se è possibile farla comparire al principio di estate negli oliveti in grande numero per distruggere le ova di *Dacus* ».

Nel 1946 cominciai a tenere in osservazione specialmente galle di numerose specie di piante nella speranza di vedere fuoriuscire la *Prolasioptera berlesiana*, ma senza risultato.

Nel settembre dello stesso anno osservando presso un oliveto piante di Lentisco aventi foglie accartocciate dall'acaro *Erdophyes Stephanii* Nalepa e da specie del genere *Rhinocola* vidi volare adulti di Cecidomide di detta *Prolasioptera* e in foglie accartocciate trovai una larvetta riferibile alla specie *P. berlesiana*. Il giorno seguente (29 settembre 1946) feci raccogliere un abbondante materiale di rametti con foglie accartocciate e li portai nel laboratorio a Portici. Quivi il 1° ottobre osservai il 1° bozzolo di *Prolasioptera* formato da larva sviluppatasi sul Lentisco e dal 9 ottobre il 1° adulto.

Da foglie accartocciate di Lentisco raccolte nel comune di Pisciotta il 10 maggio 1947 ebbi i primi adulti di *Prolasioptera* il 23 dello stesso mese; da foglie simili raccolte presso Battipaglia il 15 maggio ebbi i primi adulti il 26; da foglie raccolte a Pisciotta il 25 maggio ebbi gli adulti dall'8 al 15 giugno, da foglie raccolte presso Messina il 29 maggio gli adulti dall'8 al 15 giugno, da foglie raccolte presso Gioia Tauro il 30 maggio gli adulti dall'8 al 15 giugno, da foglie raccolte presso la stazione di Pisciotta l'11 [2] giugno (anno corrente) numerosi adulti dal 20 al 25 dello stesso mese e, nella stessa località di Pisciotta (in vicinanza della ferrovia), il 23 giugno osservai le prime olive punte dalla mosca delle olive, delle quali 4 già contenevano coll'ovo della mosca l'ovo della *Prolasioptera* e una l'ovo maciullato della mosca e una larvetta di *Prolasioptera*.

Con queste osservazioni resta accertato che la *Prolasioptera* oltre che nelle olive immature a spese dell'ovo della mosca e del tessuto gelatinoso del sarcocarpio conseguente all'attacco di *Phoma*, vive anche sul Lentisco nelle foglie accartocciate da un acaro o da specie di Psillidi consociati o non ad eventuali miceti che si stanno studiando.

Ciò non esclude che altre ricerche possano fare scoprire che essa vive anche su altre specie di piante attaccate a loro volta da acari o da specie di insetti e da qualche Eumicete, perciò io coi miei collaboratori sto continuando le ricerche in tale direzione, ma invito ora anche altri entomologi

(2) I dati posteriori all'11 giugno furono aggiunti prima di licenziare per la stampa la presente Nota.

a contribuire nell'accertamento di specie di piante ospitatrici della *Prolasioptera berlesiana*, di un'altra *Prolasioptera* delle olive ancora meno nota e dell'*Asynapta furcifer* Barnes comune almeno in oliveti di alcune località della Sicilia e rara o mancante in quelli del Continente.

Naturalmente queste ricerche daranno un risultato di valore scientifico, ma possono darne uno grande da quello agrario, perchè spero che potranno servire a consigliare di lasciare in vicinanze degli oliveti o tra gli oliveti (nelle parti che l'arboricoltore e l'entomologo potranno indicare) quelle specie di piante dalle quali in giugno le Cecidomie delle olive possono facilmente passare coi propri mezzi (o aiutate in qualche modo dall'agricoltore) sugli olivi alla ricerca dei frutti inquinati dall'ovo della Mosca delle olive.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica (Analisi). — *Sul comportamento asintotico degli integrali dell'equazione* $y''(x) + p(x)\,y'(x) + q(x)\,y(x) = 0$ *quando* $\lim_{x\to+\infty} q(x) = +\infty$ (*). Nota II di T. Manacorda, presentata (**) dal Corrisp. G. Sansone.

4. Condizioni sufficienti perchè i massimi di $y^2(x)$ siano non crescenti e tendano a zero. – Sia $\{\vartheta_n\}$, $\vartheta_n \equiv v_n - u_n$, $u_n < v_n$ una successione di intervalli di $(x_0, +\infty)$ non sovrapposti. Si dice che $\{\vartheta_n\}$ è distribuita in $(x_0, +\infty)$ con densità minore di ε se esiste un n_0 tale che per $n \geq n_0$ sia $\sum_1^n \vartheta_k / v_n < \varepsilon$.

Sia $F(x)$ una funzione continua, positiva e non decrescente per $x \geq x_0$, con $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. Se per ogni ε si può determinare una successione $\{\vartheta_n\}$ distribuita in $(x_0, +\infty)$ con densità minore di ε e tale che l'accrescimento di $F(x)$ nell'insieme complementare di $\{\vartheta_n\}$ è finito, si dice che la funzione $F(x)$ tende all'infinito quasi saltuariamente. Se ciò non accade, $F(x)$ tende all'infinito regolarmente (1).

Ciò premesso, *sia* $p(x)$ *funzione continua, limitata e non negativa,* $q(x)$ *positiva, non decrescente e derivabile con derivata prima continua*

$$0 \leq p(x) \leq 2l, \quad l \text{ costante}, \quad 0 < q(x), \quad \lim_{x\to+\infty} q(x) = +\infty,$$

$$q'(x) \geq 0, \quad x_0 \leq x < +\infty.$$

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Matematico dell'Università di Firenze.

(**) Nella seduta del 12 aprile 1947.

(1) Cfr. G. Armellini, *Sopra una equazione differenziale della dinamica*. « Rend. Lincei », (6), XXI, pp. 111, 116 (1935).

Se la funzione $\log q(x)$ *tende all'infinito regolarmente, i massimi e i minimi di ogni integrale della* (1) *sono in valore assoluto non crescenti e tendono a zero.*

Poniamo [2]

$$y'^2(x) + q(x)\, y^2(x) = q(x)\, \lambda^2(x).$$

Per ogni valore di x è $\lambda^2 > y^2$ salvo che nei punti di massimo di $y^2(x)$ in cui è $\lambda^2 = y^2$.

Derivando e tenuto conto della (1)

$$q(x)\frac{d}{dx}\lambda^2 = -q'(x)\,[\lambda^2(x) - y^2(x)] - 2\,p(x)\,y'^2(x), \tag{16}$$

e quindi la funzione $\lambda^2(x)$, e perciò la successione dei massimi di $y^2(x)$, è non crescente.

Siano, come nel n. 3, x_{2n-1} e x_{2n}, $n = 1, 2, \cdots$ la successione dei punti di zero e di massimo di $y^2(x)$. Moltiplicando la (1) per $2y'$ ed integrando tra x_{2n-1} e x_{2n} [3]

$$-y'^2(x_{2n-1}) + q(x_{2n})\, y^2(x_{2n}) = \int_{x_{2n-1}}^{x_{2n}} q'(t)\, y^2(t)\, dt - 2\int_{x_{2n-1}}^{x_{2n}} p(t)\, y'^2(t)\, dt \leq$$

$$\leq y^2(x_{2n})\,[q(x_{2n}) - q(x_{2n-1})],$$

da cui

$$y^2(x_{2n}) \leq \frac{y'^2(x_{2n-1})}{q(x_{2n-1})}.$$

Integrando invece la (1) moltiplicata per $2y'$ tra x_{2n} e x_{2n+1}:

$$y'^2(x_{2n+1}) - q(x_{2n})\, y^2(x_{2n}) = \int_{x_{2n}}^{x_{2n+1}} q'(t)\, y^2(x)\, dt - 2\int_{x_{2n}}^{x_{2n+1}} p(t)\, y'^2(t)\, dt \leq$$

$$\leq y^2(x_{2n})\,[q(x_{2n+1}) - q(x_{2n})],$$

da cui, tenendo conto della precedente:

$$\frac{y'^2(x_{2n+1})}{q(x_{2n+1})} \leq y^2(x_{2n}) \leq \frac{y'^2(x_{2n-1})}{q(x_{2n-1})}. \tag{17}$$

Questa mostra che anche la successione $\left\{\dfrac{y'^2(x_{2n-1})}{q(x_{2n-1})}\right\}$ è non crescente e si ha:

$$\lim_{n\to\infty} y^2(x_{2n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{y'^2(x_{2n-1})}{q(x_{2n-1})} = a. \tag{18}$$

(2) G. ARMELLINI, loc. cit., p. 113.

(3) Il metodo qui adoperato è analogo a quello classico di A. KNESER. Cfr. G. ASCOLI, *Sul comportamento asintotico degli integrali delle equazioni differenziali del 2° ordine.* « Rend. Lincei » (6), XXII, pp. 234, 243 (1935).

Vogliamo mostrare che $a = 0$. Sia per assurdo $a > 0$. Dalla (16) integrando tra due valori qualsiasi x'' e x' di $x, x'' > x'$:

$$\lambda^2(x') - \lambda^2(x'') = \int_{x'}^{x''} \left\{ 2p(t) \frac{y'^2(t)}{q(t)} + \frac{q'(t)}{q(t)} [\lambda^2(t) \quad y^2(t)] \right\} dt =$$

$$= \int_{x'}^{x''} [\lambda^2(t) - y^2(t)] \left[2p(t) + \frac{q'(t)}{q(t)} \right] dt,$$

per la definizione di $\lambda^2(x)$. La $\lambda^2(x)$ essendo funzione non crescente di x e $\lambda^2(x_{2n}) = y^2(x_{2n})$, si ha $\lim_{x \to +\infty} \lambda^2(x) = \overline{\lim_{x \to +\infty}} y^2(x) = a$, e quindi, fissata comunque una costante positiva σ, esiste un $\bar{x}$ tale che per $x \geq \bar{x}$ è $a \leq \lambda^2 \leq a + \sigma$. Dall'ultima relazione scritta allora, per qualunque x' e $x'' \geq \bar{x}$, $x' < x''$

$$0 < \int_{x'}^{x''} \left[2p(t) + \frac{q'(t)}{q(t)} \right] [\lambda^2(t) - y^2(t)] \, dt < \sigma$$

la quale porta che:

$$(19) \qquad 0 < \int_{x_0}^{+\infty} \left[2p(t) + \frac{q'(t)}{q(t)} \right] [\lambda^2(t) - y^2(t)] \, dt < +\infty.$$

Indichiamo adesso con (t_{2k-1}, t_{2k}), $k = 1, 2, \cdots$ la successione eventualmente esistente di quelli tra gli intervalli (x_{2n-1}, x_{2n}) per i quali si ha $0 < \frac{q(x_{2n-1})}{q(x_{2n}) - l^2} \leq \alpha^2 < 1$, α costante prefissata Per tali intervalli è:

$$\sqrt{\frac{q(x_{2n-1})}{q(x_{2n+1})}} \leq \sqrt{\frac{q(x_{2n-1})}{q(x_{2n}) - l^2}} \leq \alpha < 1,$$

e quindi la serie $\sum_1^\infty \frac{\pi}{2\sqrt{q(x_{2k+1})}}$ è convergente. Ma per le (11) tale risulta anche la serie $\sum_1^\infty (t_{2k} - t_{2k-1})$ di cui indicheremo con B_1 la somma.

Sia ancora (τ_{2k}, τ_{2k+1}), $k = 1, 2, \cdots$ la successione eventualmente esistente di quelli tra gli intervalli (x_{2n}, x_{2n+1}) in cui $\frac{q(x_{2n}) - l^2}{q(x_{2n+1})} \leq \alpha^2 < 1$. Si avrà

$$1 < \frac{1}{\alpha^2} \leq \frac{q(x_{2n+1})}{q(x_{2n}) - l^2} \leq \frac{q(x_{2n+2})}{q(x_{2n}) - l^2}$$

e fissata α può trovarsi un σ tale che $\frac{q(x_{2n+2})}{q(x_{2n}) - l^2} - \sigma \geq \frac{1}{\alpha^2} > 1$, e scelto in tal modo σ, può determinarsi un indice n_0 tale che per $n \geq n_0$ sia $\frac{l^2}{q(x_{2n}) - l^2} < \sigma$. Con tale scelta avremo quindi:

$$\frac{q(x_{2n+2}) - l^2}{q(x_{2n}) - l^2} \geq \frac{q(x_{2n+2})}{q(x_{2n}) - l^2} - \sigma \geq \frac{1}{\alpha^2} - \sigma > 1.$$

Nella serie $\sum_1^\infty \frac{\pi + 2b_k}{2\sqrt{q(x_{2k}) - l^2}}$ relativa agli intervalli (τ_{2k}, τ_{2k+1}) il rapporto tra un termine e il seguente è

$$\frac{\pi + 2b_k}{\pi + 2b_{k+1}} \sqrt{\frac{q(x_{2k+2}) - l^2}{q(x_{2k}) - l^2}}$$

e poichè $b_k = \operatorname{arctg} \frac{l}{\sqrt{q(x_{2k}) - l^2}}$ è funzione non crescente di k, si ha $\frac{\pi + 2b_k}{\pi + 2b_{k+1}} \geqq 1$ mentre per $n \geqq n_0$, $\sqrt{\frac{q(x_{2k+2}) - l^2}{q(x_{2k}) - l^2}} > 1$. La serie è quindi convergente e perciò anche la serie minorante $\sum_1^\infty (\tau_{2k+1} - \tau_{2k})$ la cui somma indicheremo con B_2.

Ciò premesso, nei tratti (x_{2n-1}, x_{2n}) e (x_{2n}, x_{2n+1}) che non coincidono con alcuno dei tratti (t_{2k-1}, t_{2k}) o (τ_{2k}, τ_{2k+1}), poniamo:

$$(20) \qquad \xi_r = x_{2r} - \frac{\pi - 2b_r}{\rho\sqrt{q(x_{2r}) - l^2}}, \qquad \eta_s = x_{2s} + \frac{\pi}{\rho\sqrt{q(x_{2s+1})}},$$
$$r, s = 1, 2, \cdots, \qquad \rho \geqq 2.$$

Per le (11) può determinarsi un n_1 tale che per $r \geqq n_1$, $s \geqq n_1$ si abbia $x_{2r-1} < \xi_r < x_{2r}$, $x_{2s} < \eta_s < x_{2s+1}$. Indichiamo allora con (u_m, v_m) il generico tratto della successione di intervalli formata dagli intervalli (t_{2k-1}, t_{2k}), (τ_{2k}, τ_{2k+1}), (ξ_r, x_{2r}) e (x_{2s}, η_s) inteso di avere ordinato gli intervalli in modo che i loro estremi destri si seguano in valore crescente. Vogliamo mostrare che scelto $\varepsilon > 0$, può determinarsi $\rho \geqq 2$ in modo che la successione (u_m, v_m) sia distribuita in $(x_0, +\infty)$ con densità minore di ε.

Si ha infatti, indicano con m_1, m_2, m_3 e m_4 rispettivamente il numero degli intervalli $(x_{2k} - \xi_k)$, $(\eta_k - x_{2k})$, $(t_{2k} - t_{2k-1})$ e $(\tau_{2k+1} - \tau_{2k})$ che cadono in (x_{2n_1-1}, v_m) (cfr. n. 3)

$$\frac{\sum_1^m (v_k - u_k)}{v_m} = \frac{\sum_1^{m_1} (x_{2k} - \xi_k) + \sum_1^{m_2} (\eta_k - x_{2k})}{v_m} + \frac{\sum_1^{m_3} (t_{2k} - t_{2k-1}) + \sum_1^{m_4} (\tau_{2k+1} - \tau_{2k})}{v_m} \leqq$$

$$\leqq \frac{2}{\rho} \frac{\sum_1^{m_1} \frac{\pi - 2b_k}{2\sqrt{q(x_{2k}) - l^2}} + \sum_1^{m_2} \frac{\pi}{2\sqrt{q(x_{2k+1})}}}{v_m} + \frac{B_1 + B_2}{v_m},$$

e scelto $\sigma > 0$ può trovarsi un n_0 tale che per $n \geqq n_0$ sia $\frac{B_1 + B_2}{v_m} < \sigma$. Si ha d'altra parte:

$$v_m = \sum_1^{m_1} (x_{2k} - x_{2k-1}) + \sum_1^{m_2} (x_{2k+1} - x_{2k}) + \sum_1^{m_3} (t_{2k} - t_{2k-1}) + \sum_1^{m_4} (\tau_{2k+1} - \tau_{2k}) \geqq$$

$$\geqq \sum_1^{m_1} \frac{\pi - 2b_k}{2\sqrt{q(x_{2k}) - l^2}} + \sum_1^{m_2} \frac{\pi}{2\sqrt{q(x_{2k+1})}}$$

e quindi se scegliamo ρ in guisa che $\frac{2}{\rho} + \sigma < \varepsilon$

$$\frac{\sum_{1}^{m} (v_k - u_k)}{v_{1n}} < \varepsilon \qquad \text{c. v. d.}$$

Si è poi visto, al n. 3, che in ogni intervallo (x_{2n-1}, x_{2n}), è

$$y^2(x) \leq \frac{y'^2(x_{2n-1})}{q(x_{2n-1})} \operatorname{sen}^2 \left[\sqrt{q(x_{2n-1})}\,(x - x_{2n-1})\right].$$

In particolare nei punti ξ_r

$$y^2(\xi_r) \leq \frac{y'^2(x_{2r-1})}{q(x_{2r-1})} \operatorname{sen}^2 \left[\sqrt{q(x_{2r-1})}\,(\xi_r - x_{2r-1})\right] \leq$$

$$\leq \frac{y'^2(x_{2r-1})}{q(x_{2r-1})} \operatorname{sen}^2 \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi - 2b_r}{\rho} \sqrt{\frac{q(x_{2r-1})}{q(x_{2r}) - l^2}}\right] \leq \frac{y'^2(x_{2r-1})}{q(x_{2r-1})} \cos^2 \alpha \frac{\pi - 2b_r}{\rho},$$

perchè nell'intervallo considerato è $\sqrt{\frac{q(x_{2r-1})}{q(x_{2r}) - l^2}} \geq \alpha$. Avremo di qui per la (18) del n. 3

$$\lim_{r \to \infty} y^2(\xi_r) = a \cos^2 \alpha \frac{\pi}{\rho},$$

e quindi, fissato σ in modo che $a\left(1 - \cos^2 \alpha \frac{\pi}{\rho}\right) > \sigma > 0$ esiste un n_2 tale che per $n \geq n_2$ è

$$y^2(\xi_r) \leq a \cos^2 \alpha \frac{\pi}{\rho} + \sigma,$$

ed essendo $y^2(x)$ non decrescente in (x_{2r}, ξ_r), tale disuguaglianza vale in ogni punto di cotesto intervallo. Quindi:

$$\lambda^2(x) - y^2(x) \geq a\left[1 - \cos^2 \alpha \frac{\pi}{\rho}\right] - \sigma = c > 0. \tag{21}$$

Sempre per i risultati del n. 3, in un intervallo (x_{2n}, x_{2n+1}), $n \geq n_1$ è $y^2(x) \leq \frac{q(x_{2n})}{q(x_{2n}) - l^2}\, y^2(x_{2n})\, e^{-2l(x - x_{2n})} \cos^2 \left[\sqrt{q(x_{2n}) - l^2}\,(x - x_{2n}) - b_n\right]$ e quindi anche nei punti η_s

$$y^2(\eta_s) \leq \frac{q(x_{2s})}{q(x_{2s}) - l^2}\, y^2(x_{2s})\, e^{-2l \frac{\pi}{\rho \sqrt{q(x_{2s+1})}}} \cos^2 \left[\sqrt{\frac{q(x_{2s}) - l^2}{q(x_{2s+1})}} \frac{\pi}{\rho} - b_s\right] \leq$$

$$\leq \frac{q(x_{2s})}{q(x_{2s}) - l^2} \cos^2 \left[\alpha \frac{\pi}{\rho} - b_s\right].$$

Da qui si ha

$$\lim_{s \to \infty} y^2(\eta_s) \leq a \cos^2 \alpha \frac{\pi}{\rho}.$$

Aumentando al più n_2 può farsi quindi in modo che per $n \geq n_2$ sia:

$$y^2(\eta_s) \leq a \cos^2 \alpha \frac{\pi}{\rho} + \sigma,$$

ed essendo y^2 non crescente in (η_s, x_{2s+1}) in tutto cotesto intervallo

$$\lambda^2(x) - y^2(x) \geq a\left[1 - \cos^2\alpha\,\frac{\pi}{\rho}\right] - \sigma = c > 0. \tag{22}$$

Sia $\bar{x}$ tale che per $x \geq \bar{x}$ valgano le disuguaglianze (11), (21) e (22). Indicando con A l'insieme complementare dei tratti (u_r, v_r) che cadono in $(\bar{x}, +\infty)$, avremo per la (19) del n. 4

$$c\int_A \frac{q'(t)}{q(t)}\,dt \leq \int_A [\lambda^2 - y^2]\left[\frac{q'(t)}{q(t)} + 2p(t)\right]dt \leq$$

$$\leq \int_{x_0}^{+\infty} [\lambda^2(t) - y^2(t)]\left[\frac{q'(t)}{q(t)} + 2p(t)\right]dt < +\infty$$

e perciò l'accrescimento della funzione $\log q(x)$ nell'insieme A è limitato, mentre la successione (u_r, v_r) è distribuita in $(\bar{x}, +\infty)$ con densità minore di ε. La funzione $\log q(x)$ tende quindi all'infinito quasi saltuariamente contro l'ipotesi fatta. Il nostro teorema è così dimostrato.

Matematica. — *Sulla stabilità delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari.* Nota II di S. FAEDO, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

8. TEOREMA VII. – *Se è soddisfatta la condizione* α) *e l'equazione caratteristica* (1) *ha radici tutte distinte una delle quali sia nulla e se è* $b \neq 0$, *allora le equazioni non omogenee* (2) *e* (3) *non hanno integrali stabili.*

Basta evidentemente provare il teorema per l'equazione (2). Supponiamo che la (2) abbia un integrale stabile $\bar{y}(x)$, che per il lemma I si può rappresentare con la (13).

a) Sia $\zeta_1 = 0$ e supponiamo dapprima che ζ_1 sia l'unica ζ_i con $R\zeta_i = 0$.

Per l'osservazione del n. 3 l'espressione $\sum_{i=2}^{n} c_i(x)\cdot y_i(x)$ è limitata e basterà dimostrare che non lo è $c_1(x)\,y_1(x)$.

Infatti è

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\Delta_1(x)}{\Delta(x)} = l \quad \text{con} \quad |l| \neq 0.$$

Se ad esempio è $Rl \neq 0$ si può determinare X in modo che per $x \geq X$ $R\,\frac{\Delta_1(x)}{\Delta(x)}$ abbia il segno di Rl e sia $\left|R\,\frac{\Delta_1(x)}{\Delta(x)}\right| > \frac{1}{2}|Rl|$. Per la (9') per $x > X$ è:

(*) Nella seduta del 10 maggio 1947. La Nota I è inserita in questi « Rendiconti ».

$$|c_1(x)| \geqq \left| b \int_X^x \frac{\Delta_1(x)}{\Delta(x)}\,dx \right| - M_1\left[|b|(X - x_1) + \int_{x_1}^{+\infty} |\varphi(x)|\,dx\right] \geqq$$

$$\geqq \left| b \int_X^x R\,\frac{\Delta_1(x)}{\Delta(x)}\,dx \right| - M_1\left[|b|(X - x_1) + \int_{x_1}^{+\infty} |\varphi(x)|\,dx\right] >$$

$$> \frac{1}{2}|b||Rl|(x - X) - M_1\left[|b|(X - x_1) + \int_{x_1}^{+\infty} |\varphi(x)|\,dx\right],$$

da cui

$$|c_1(x)| > \frac{1}{2}|b||Rl| \cdot x + H,$$

dove ora e nel seguito intenderemo che H rappresenti una costante. Ripetendo lo stesso ragionamento per il coefficiente dell'immaginario di l si trova che per $x \geqq X_1$ è

$$|c_1(x)| > \frac{|b| \cdot |l|}{4} x + H. \tag{14}$$

Da ciò e per le (6) ne segue $\lim_{x \to +\infty} |c_1(x)\, y_1(x)| = +\infty$ e (13) non può essere un integrale stabile, contro l'ipotesi fatta.

b) Passiamo al caso generale. Sia $z_1 = 0$, $Rz_2 = \cdots = Rz_\nu = 0$ $(\nu \leqq n)$ e $Rz_s \neq 0$ per $\nu < s \leqq n$. Posto

$$z_j = i\theta_j, \quad \text{con} \quad \theta_j \neq 0 \quad , \quad \frac{\Delta_j(x)}{\Delta(x)} = \alpha_j(x) + i\beta_j(x) \quad (j = 2, 3, \cdots, \nu\,;\ i = \sqrt{-1}),$$

per la (9') è

$$|c_j(x)| \leqq |b| \left[\left| \int_{x_j}^x \alpha_j \cos\theta_j x\,dx \right| + \left| \int_{x_j}^x \beta_j \operatorname{sen}\theta_j x\,dx \right| + \right. \tag{15}$$

$$\left. + \left| \int_{x_j}^x \alpha_j \operatorname{sen}\theta_j x\,dx \right| + \left| \int_{x_j}^x \beta_j \cos\theta_j x\,dx \right| \right] + M_j \int_{x_j}^{+\infty} |\varphi(x)|\,dx.$$

Supponiamo che sia $\lim_{x \to +\infty} \alpha_j(x) = A_j \neq 0$ e scelto $\sigma > 0$ ad arbitrio si determini X_2 in modo che per $x \geqq X_2$ sia $|\alpha_j(x) - A_j| < \sigma < |A_j|$. Considerato un intero k con $\dfrac{(4k-1)\pi}{2\theta_j} = \bar{x} \geqq X_2$ dimostriamo che, posto $[h] = \bar{x} + \dfrac{\pi}{\theta_j} h$ dove h è un intero col segno di θ_j, è

$$\left| \int_{[2h]}^{[2(h+1)]} \alpha_j(x) \cos\theta_j x\,dx \right| < \frac{4\sigma}{|\theta_j|}. \tag{16}$$

Infatti sia $A_j > 0$ e quindi $\alpha_j(x) > 0$ per $x \geq X_2$. Da

$$\int_{[2h]}^{[2(h+1)]} \alpha_j(x) \cos \theta_j x \, dx > 0 \tag{17}$$

segue che questo integrale è

$$< (A_j + \sigma) \int_{[2h]}^{[2h+1]} \cos \theta_j x \, dx + (A_j - \sigma) \int_{[2h+1]}^{[2(h+1)]} \cos \theta_j x \, dx = \frac{4\sigma}{|\theta_j|},$$

mentre se l'integrale (17) fosse < 0 esso sarebbe

$$> (A_j - \sigma) \int_{[2h]}^{[2h+1]} \cos \theta_j x \, dx + (A_j + \sigma) \int_{[2h+1]}^{[2(h+1)]} \cos \theta_j x \, dx = -\frac{4\sigma}{|\theta_j|}$$

ed è così provata la (16) per $A_j > 0$; analogamente si procede per $A_j < 0$.

Dalla (16), essendo $\alpha_j(x)$ limitata, posto

$$\sigma \leq \varepsilon_j \frac{\pi}{2} \quad \text{con} \quad \varepsilon_j < \frac{|l|}{32 N_j (\nu - 1)},$$

segue che è

$$\left| \int_{x_j}^{x} \alpha_j(x) \cos \theta_j x \, dx \right| \leq \varepsilon_j \cdot x + H. \tag{18}$$

Se poi fosse $\lim_{x \to +\infty} \alpha_j(x) = 0$ la (18) sussiste ovviamente; la stessa disuguaglianza si può pure provare per gli altri integrali in parentesi quadra nella (15) e ne viene

$$|c_j(x)| \leq 4 \varepsilon_j |b| x + H,$$

$$|c_j(x) y_j(x)| \leq 4 N_j |b| \varepsilon_j x + H,$$

$$\sum_{i=2}^{\nu} |c_j(x) y_j(x)| \leq \varepsilon x + H, \quad \text{con} \quad 0 < \varepsilon < \frac{|b|\,|l|}{8}.$$

Ma, per le (14) e (6), è

$$|c_1(x) y_1(x)| > \frac{|b|\,|l|}{8} x + H$$

e quindi

$$\left| \sum_{j=1}^{\nu} c_j(x) y_j(x) \right| > \left| \frac{|b|\,|l|}{8} - \varepsilon \right| \cdot x + H,$$

per x abbastanza grande, la quale prova che l'espressione $\left| \sum_{j=1}^{\nu} c_j(x) y_j(x) \right|$ non è stabile.

Si conclude come in *a*) e il teorema è dimostrato.

9. Dai Teoremi VI e VII segue:

TEOREMA VIII. – *Se è soddisfatta la condizione* α) *e se l'equazione caratteristica* (1) *ha radici tutte distinte, allora se è simultaneamente* $a_n = 0$ *e* $b \neq 0$ *le equazioni non omogenee* (2) *e* (3) *non possiedono integrali stabili, mentre in ogni altro caso esse ne hanno sempre almeno uno.*

10. Dalla (6) del Teorema II segue immediatamente:

TEOREMA IX. – *Se è soddisfatta la condizione* α) *e se l'equazione caratteristica* (1) *ha radici tutte distinte, allora gli spazi lineari* Σ_0 *e* Σ', *che rappresentano tutti gli integrali stabili delle equazioni omogenee*

$$E[a_i, \varphi_i; y] = 0 \quad , \quad E[a_i, 0; y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0,$$

hanno la stessa dimensione.

11. *Dimostrazione del Teorema* I.

Il Teorema I è conseguenza immediata degli ultimi due teoremi dati.

12. *Procedimento per il calcolo degli integrali dell'equazione non omogenea.*

I ragionamenti fatti nel Teorema III e nei successivi trasportano alla equazione non omogenea (2) il procedimento di calcolo sviluppato nella Memoria cit. in (4) Nota I e, per il lemma I, *si caratterizzano immediatamente gli integrali stabili*, quando ve ne siano e cioè non si abbia $a_n = 0$, $b \neq 0$.

PARTE II. – L'EQUAZIONE CARATTERISTICA HA RADICI MULTIPLE ED È $a_n \neq 0$, OPPURE $a_n = b = 0$.

1. *Risultati della Parte II.*

Se le radici dell'equazione caratteristica (1) non sono tutte distinte si presenta la nuova difficoltà della ricerca dei limiti, per $x \to +\infty$ delle funzioni $\Delta(x)$ e $\Delta_i(x)$ (v. Teorema III, Nota I), limiti che ora possono essere infiniti. Si riesce però a valutare l'ordine di tali infiniti e ciò permette, modificando opportunamente il ragionamento fatto nel caso delle radici distinte, di stabilire il

TEOREMA X. – *Se l'equazione caratteristica* (1) *ha le radici distinte* $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_\varrho$ *degli ordini rispettivi di multiplicità* $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_\varrho$, *con* $\sum_{s=1}^{\varrho} \nu_s = n$ *e detto* ν *il massimo fra gli interi* ν_s, *è*

$$\alpha') \quad \int_{x_0}^{+\infty} x^{\nu-1} |\varphi_i(x)| \, dx < +\infty \quad , \quad \int_{x_0}^{+\infty} x^{\nu-1} |\varphi(x)| \, dx < +\infty \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

ed è $a_n \neq 0$, *oppure* $a_n = b = 0$, *allora gli spazi lineari* Σ *e* Σ' [1] *hanno sempre la stessa dimensione* $r \geq 0$, *dove* r *è uguale alla somma delle multiplicità delle*

(1) Ved. Teorema I, Nota I.

radici dell'equazione caratteristica a parte reale negativa più il numero di quelle distinte a parte reale nulla.

Questo teorema, oltre a rispondere al problema che si era posto nella Nota I, permette di completare la seguente proposizione di L. Cesari [2] che estende classici risultati di O. Perron:

Se le funzioni $\varphi_i(x)$ *e* $\varphi(x)$ *sono limitate in* $(x_0, +\infty)$ *ed è*

$$(19)\qquad \int_{x_0}^{+\infty} |\varphi_i(x)|\,dx < +\infty \quad , \quad \int_{x_0}^{+\infty} |\varphi(x)|\,dx < +\infty ,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi_i(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

se le radici z_s *della* (1) *per cui è* $R(z_s) = 0$ *sono semplici ed è* $a_n \neq 0$ *oppure* $a_n = b = 0$, *allora esiste un integrale* $y(x)$ *della* (2) *per cui è*

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = K \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} y'(x) = 0, \cdots, \lim_{x\to+\infty} y^{(n)}(x) = 0,$$

dove è $K = \dfrac{b}{a_n}$ *se è* $a_n \neq 0$ *e* $K = 0$ *se è* $a_n = b = 0$.

In particolare, tale teorema afferma l'esistenza di un integrale stabile. *Cosa si può dire se si hanno delle* z_s, *con* $R(z_s) = 0$, *multiple*? Lo stesso Cesari ha indicato il semplice esempio della equazione differenziale

$$E(y) \equiv y'' - 2iy' - y = e^{ix} \cdot x^{-2}$$

la cui equazione caratteristica ha la radice doppia $z = i$ e che non possiede alcun integrale stabile pur soddisfacendo alle (19); non è però assolutamente integrabile la funzione $e^{ix}x^{-1}$ e il Teorema X afferma l'esistenza di uno, anzi ∞^1 integrali stabili per l'equazione $E(y) = \varphi(x)$ ogni volta che $x\varphi(x)$ riesca assolutamente integrale in $(x_0, +\infty)$. Ciò spiega perchè nel Teorema X si è dovuta introdurre la condizione α') più forte della α), che bastava nel caso delle radici semplici e a cui la α') in tal caso si riduce.

Il Teorema X per $r = n$ $(\nu > 1)$ non si riduce al teorema di Cesari riportato all'inizio della Nota I; mentre il Teorema X contiene la più restrittiva condizione α') esso però permette di trattare il caso delle z_s, con $R(z_s) = 0$, multiple e in tal caso *non si può* sostituire alla α') la α).

Il precedente teorema di L. Cesari viene ulteriormente approfondito dal

TEOREMA XI. – *Se sono soddisfatte le condizioni del Teorema* X, *allora la totalità degli integrali della* (2) *per cui è*

$$(20)\qquad \lim_{x\to+\infty} y(x) = K \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} y'(x) = 0, \cdots, \lim_{x\to+\infty} y^{(n-1)}(x) = 0,$$

$$\text{con} \quad K = \begin{cases} \dfrac{b}{a_n} & \text{se è} \quad a_n \neq 0, \\ 0 & \text{se è} \quad a_n = b = 0, \end{cases}$$

(2) Loc. cit. in (8) Nota I, pp. 188–189.

costituisce uno spazio lineare Σ_r, *di dimensione* $r \geqq 0$, *dove* r *è uguale alla somma delle multipliçità delle radici dell'equazione caratteristica con parte reale negativa. Se inoltre le* $\varphi_i(x)$ $(i = 1, \cdots, n)$ *sono limitate, per le funzioni* $y(x)$ *di* Σ_r *è anche*

$$\lim_{x \to +\infty} [y^{(n)} + K\varphi_n(x) - \varphi(x)] = 0. \tag{21}$$

Sarà opportuno ricordare che se è $r = 0$ gli spazi lineari considerati nei Teoremi X e XI sono costituiti di un solo elemento.

Il Teorema XI apporta i seguenti complementi a quello di L. Cesari: *viene decisa la dimensione di* Σ_r, *si considera anche il caso delle* ζ_s *con* $R(\zeta_s) = 0$ *multiple* (e perciò invece della α) si introduce la α')) e infine *non si suppone che le* $\varphi_i(x)$ *e la* $\varphi(x)$ *siano limitate e che sia* $\lim_{x \to +\infty} \varphi_i(x) = \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$.

Anche nel caso che l'equazione caratteristica abbia radici multiple si può trasportare all'equazione non omogenea (2) il procedimento di calcolo sviluppato nella Memoria citata in (4) Nota I e *che permette di individuare* a priori *gli integrali stabili e quelli per cui vale la* (20).

2. Teorema XII. – *Se, per quel che riguarda le funzioni* $\varphi_i(x)$, *è soddisfatta la condizione* α') *del Teorema* X, *allora l'equazione omogenea* $E[a_i, \varphi_i; y] = 0$ *possiede il sistema fondamentale di integrali*

$$y_{\tau_i+j}(x) = x^{j-1} e^{\zeta_i x} [1 + \lambda_{1,\tau_i+j}(x) + \cdots + \lambda_{m,\tau_i+j}(x) + \cdots] \tag{5'}$$

$$(\tau_i = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_{i-1} \; ; \; \tau_1 = 0 \; ; \; j = 1, 2, \cdots, \nu_i \; ; \; i = 1, 2, \cdots, \rho)$$

dove le serie in parentesi hanno le stesse proprietà di quelle al secondo membro delle (5) (Teorema II, Nota I) *ed è*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y^{(s)}_{\tau_i+j}}{x^{j-1} e^{\zeta_i x}} = \zeta_i^s \qquad (s = 0, 1, 2, \cdots, n-1)\,(3). \tag{6''}$$

3. Lemma II. – *Le funzioni* $y_i(x)$ $(i = 1, \cdots, n)$ *siano definite su uno stesso intervallo e ivi derivabili fino all'ordine* $n - 1$. *Fatto il cambiamento di variabile* $y = e^{\zeta x} Y$, *dove* ζ *è costante, fra il wronskiano* $W(y)$ *delle* $y_i(x)$ *e quello delle loro trasformate* $Y_i(x)$ *sussiste la relazione*

$$W(Y) = e^{-n\zeta x} W(y).$$

Infatti $y_i(x)$ si trasforma in $Y_i(x) = e^{-\zeta x} y_i(x)$ ed è

$$Y_i^{(s)} = e^{-\zeta x} \left[y_i^{(s)} + \sum_{r=0}^{s-1} d_{r,s}(\zeta)\, y_i^{(r)} \right] \qquad (s = 1, \cdots, n-1 \; ; \; y_i^{(0)} \equiv y_i)$$

dove le $d_{r,s}(\zeta)$ sono indipendenti da y_i. Perciò se in $W(Y)$ si mette in evidenza il fattore $e^{-n\zeta x}$ si ottiene un determinante che ha per $(s+1)^{ma}$ riga

(3) Questo teorema traduce, col cambiamento di variabile $x = b\, e^{-t}$, il teorema B dimostrato nella mia Memoria citata in (4) Nota I.

quella di W (y) più una combinazione lineare delle prime s righe di W (y) e che quindi coincide con W (y).

4. LEMMA III. - *Dati* ρ *numeri distinti, reali o complessi,* $z_1, z_2, \cdots, z_\rho$ *e* ρ *interi positivi,* $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_\rho$ *con* $\sum_{i=1}^{\rho} \nu_i = n$ *e considerate le* n *funzioni*

$$x^{j-1} e^{z_i x} \qquad (i = 1, 2, \cdots, \rho \; ; \; j = 1, 2, \cdots, \nu_i), \tag{22}$$

il loro wronskiano W *è dato da*

$$W = K e^{x \sum_{i=1}^{\rho} \nu_i z_i} \qquad (K \neq 0, \text{ costante}), \tag{23}$$

mentre il minore W_{τ_i+j} *di* W *relativo all'ultimo elemento della colonna* $(\tau_i+j)^{ma}$ *è dato da*

$$W_{\tau_i+j} = e^{\left(\sum_{s=1}^{\rho} \nu_s z_s - z_i\right) x} Q_{\tau_i+j}, \qquad (\tau_i = \nu_1 + \cdots + \nu_{i-1} \; ; \; \tau_1 = 0), \tag{24}$$

dove Q_{τ_i+j} *è un pólinomio in* x *di grado effettivo* $\nu_i - j$.

La (23) si dimostra immediatamente. Infatti W non può mai annullarsi perchè le (22) sono un sistema fondamentale di integrali di una equazione differenziale lineare d'ordine n in forma normale; d'altra parte W è il prodotto dell'esponenziale che compare in (23) per un polinomio, che deve pertanto ridursi a una costante non nulla.

Passiamo a dimostrare le (24). Il ragionamento precedente sussiste ancora solo quando sia $j = \nu_i$, perchè altrimenti W_{τ_i+j} è il wronskiano di un sistema fondamentale di integrali di un'equazione differenziale lineare d'ordine $n-1$ che non è riducibile a forma normale, essendo in tale equazione il coefficiente di $y^{(n-1)}$ espresso dalla (24) che ora dimostreremo.

Nel caso generale è intanto evidente che W_{τ_i+j} è il prodotto dell'esponenziale che compare in (24) per un polinomio al più di grado $\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{\rho} \nu_s (\nu_s - 1) - j + 1$ si tratta di provare che in realtà tale grado è esattamente $\nu_i - j$. Possiamo perciò, nel ragionamento che segue, mettere da parte il fattore esponenziale e considerare soltanto Q_{τ_i+j}.

Si faccia il cambiamento di variabile $y = e^{z_1 x} Y$; per il lemma II il wronskiano $W^{(1)}_{\tau_i+j}$ costruito con le funzioni trasformate della prima riga di W_{τ_i+j} ha ancora lo stesso fattore polinomiale Q_{τ_i+j}. La matrice formata con le prime ν_1 colonne di $W^{(1)}_{\tau_i+j}$ ha per prima riga le funzioni x^r $(r = 0, 1, \cdots, \nu_1 - 1)$ e perciò contiene un solo determinante d'ordine ν_1 non nullo (quello formato con le prime ν_1 righe) e che vale $k_1 = \prod_{r=0}^{\nu_1-1} r!$.

Quindi è $Q_{\tau_i+j} = k_1 W^{(2)}_{\tau_i+j}$ dove $W^{(2)}_{\tau_i+j}$ è il determinante d'ordine $n - \nu_1 - 1$ che si ottiene da $W^{(1)}_{\tau_i+j}$ sopprimendo le prime ν_1 righe e colonne. La s^{ma} $(s = 1, 2, \cdots, n - \nu_1 - 1)$ riga di $W^{(2)}_{\tau_i+j}$ è data dalle funzioni

$$e^{(\zeta_1-\zeta_k)x} \frac{d^{\nu_1+s-1} x^{r-1} e^{(\zeta_k-\zeta_1)x}}{dx^{\nu_1+s-1}} \qquad (r = 1, \cdots, \nu_k \; ; \; k = 2, \cdots, \rho)$$

e dove è da ricordare che va soppressa la colonna $r = j$, $k = i$.

Se ora si fa il cambiamento di variabile $y = e^{(\zeta_2-\zeta_1)x} Y$ e si considera il wronskiano $W^{(3)}_{\tau_i+j}$ delle trasformate delle funzioni della prima riga di $W^{(2)}_{\tau_i+j}$, si ha che la matrice delle prime ν_2 colonne di $W^{(3)}_{\tau_i+j}$ ha per prima riga dei polinomi di grado effettivo $r - 1$ $(r = 1, \cdots, \nu_2)$; questa matrice contiene pertanto un solo determinante non nullo (quello delle prime ν_2 righe), che è costante e diverso da zero.

Si può quindi proseguire il ragionamento precedente fino ad ottenere che Q_{τ_i+j} è il prodotto di una costante non nulla per un determinante d'ordine $n - \tau_i - 1$ nel quale mancano gli elementi che corrispondono alle prime τ_i righe e colonne di W_{τ_i+j}; dopo di che si può riapplicare il procedimento a ritroso eliminando via via le ultime ν_ϱ , $\nu_{\varrho-1}$, $\cdots$, ν_{i+1} colonne e si ottiene così che è $Q_{\tau_i+j} = K \cdot T_i$ dove T_i è un wronskiano di ordine $\nu_i - 1$ che ha per prima riga dei polinomi P_s di grado effettivo $s = 0, 1, \cdots, j - 2, j, \cdots, \nu_i - 1$. Perciò T_i è al più di grado $\nu_i - j$. Ma il termine di grado $\nu_i - j$ nello sviluppo di T_i è dato dal wronskiano costruito coi termini di grado massimo di ogni P_s, termini che dànno un sistema di monomi linearmente indipendenti; ne segue quindi che T_i ha effettivamente il grado $\nu_i - j$ e il lemma è dimostrato.

Matematica. — *Sopra una classe di congruenze di rette proiettivamente applicabili.* Nota di F. Marcus, presentata (*) dal Socio E. Bompiani.

La definizione di deformazione proiettiva di Fubini, è stata estesa ai complessi ed alle congruenze di rette. Secondo Cartan (1), una congruenza di rette è in generale proiettivamente indeformabile del secondo ordine. Per le congruenze deformabili si ha il seguente teorema di Fubini (2).

Due congruenze di rette sono proiettivamente applicabili (del secondo ordine) se sulle loro prime falde focali si corrispondono le asintotiche u, v, e se esiste una funzione $\rho(u, v)$ tale che le due quantità:

(*) Nella seduta del 10 maggio 1947.

(1) G. Fubini, E. Cêch, *Geometria proiettiva differenziale*. (N. Zanichelli), tomo II, pp. 581, 681–682.

(2) G. Fubini, E. Cêch, *Geometria proiettiva differenziale*. (N. Zanichelli), tomo II, pp. 600–601.

$$(1) \qquad (\beta\rho)_v = -\left(\frac{\gamma}{\rho}\right)_u$$

$$(2) \qquad \rho^2\left[-L\rho\beta_u - \frac{1}{2}\beta^2\rho^2 + 2\beta\rho_u\right] + \left[M - \frac{\gamma_v}{\rho} + \frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{\rho^2} + 2\gamma\frac{\rho_v}{\rho}\right]$$

abbiamo valori uguali, β, γ, L, M, essendo i ben noti coefficienti ed espressioni della geometria proiettiva differenziale di Fubini.

Sempre secondo Fubini [2], una classe di congruenze applicabili si ottiene, scegliendo due superficie R applicabili, e tirando le tangenti all'uno od all'altro dei due sistemi di linee che su di esse formano un sistema coniugato R.

In questa Nota vogliamo far vedere come si può ottenere un'altra classe di congruenze di rette, proiettivamente applicabili. Per questa, noi ci riferiamo a risultati di geometria proiettiva differenziale ottenuti [3] studiando le congruenze di rette con le falde focali applicabili. Le falde focali di queste congruenze, non possono essere che superficie R con β, γ soluzioni di

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \log\beta}{\partial u\,\partial v} + \beta_v - \left(\dfrac{\varphi(u+v) + \psi(u-v)}{\beta}\right)_u = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \log\gamma}{\partial u\,\partial v} + \gamma_u - \left(\dfrac{\varphi(u+v) + \psi(u-v)}{\gamma}\right)_v = 0 \end{cases}$$

ed L, M, ottenuti da

$$(4) \qquad \begin{cases} L = \beta_u - \dfrac{1}{2}\beta^2 - (\varphi(u+v) + \psi(u-v)) \\ M = \gamma_v - \dfrac{1}{2}\gamma^2 + (\varphi(u+v) + \psi(u-v)) \end{cases}$$

φ, ψ, essendo funzioni arbitrarie di $(u+v)$, e di $(u-v)$.

Prendiamo per ogni funzione φ e ψ due soluzioni (β_1, γ_1), (β_2, γ_2) di (3) ed indichiamo con L_1, M_1, L_2, M_2 i valori rispettivi di L, M. Le corrispondenti superficie S e S′ che sono le prime falde focali di due congruenze di rette sono superficie R non applicabili. Le rispettive congruenze essendo W risulta [4] che $\rho = 1$. Si ha dunque

$$(1') \qquad \beta_{1v} - \gamma_{1u} = \beta_{2v} - \gamma_{2u} = 0$$

$$(2') \qquad -L_1 + \beta_{1u} + \frac{1}{2}\beta_1^2 + M_1 - \gamma_{1v} + \frac{1}{2}\gamma_1^2 =$$

$$-L_2 + \beta_{2u} + \frac{1}{2}\beta_2^2 + M_2 - \gamma_{2v} + \frac{1}{2}\gamma_2^2 = 2[\varphi(u+v) + \psi(u-v)].$$

Cioè, le quantità (3) e (4) coincidono per le due superficie S e S′. Perciò secondo il teorema di Fubini, le due congruenze sono proiettivamente appli-

(3) F. MARCUS, *Sur les couples de surfaces transformées par congruences et projectivement applicables.* (La Nota sarà publicata quanto prima).

(4) G. FUBINI, E. CĚCH, *Geometria proiettiva differenziale.* (N. Zanichelli), tomo I, p. 261.

cabili. Esse si ottengono prendendo due superficie R non applicabili con β_i, γ_i $(i = 1, 2)$ soluzioni di (3) per un qualsiasi valore di φ e ψ e conducendo le tangenti all'uno od all'altro dei sistemi di linee coniugate. R sulle due superficie.

Qualche applicazione. Supponiamo $\varphi = \psi = 0$. Abbiamo due superficie con

$$\beta_1 = \gamma_1 = (u + v)^{-1} \; ; \; \beta_2 = \frac{2u}{u^2 - v^2} \; , \; \gamma_2 = \frac{2v}{v^2 - u^2} \; .$$

Da (4) risulta:

$$L_1 = M_1 = \frac{-3}{2(u+v)^2} \quad ; \quad L_2 = -\frac{2(2u^2 + v^2)}{(u^2 - v^2)^2} \quad ; \quad M_2 = -\frac{2(2v^2 + u^2)}{(u^2 - v^2)^2} \; .$$

Con questi valori risultano verificate le condizioni (1) e (2). Si verifica pure che queste superficie esistono.

Supponiamo $\varphi = \psi = \frac{1}{2}$. Si ottengono due superficie S e S′ con

$$\beta_1 = \gamma_1 = 1 \quad ; \quad L_1 = -\frac{3}{2} \quad ; \quad M_1 = \frac{1}{2}$$

$$\beta_2 = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} - \frac{1}{2u} \quad ; \quad \gamma_2 = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$$

$$L_2 = \frac{3 - 4uv}{8u^2} \quad ; \quad M_2 = -\frac{\sqrt{2u} + u\sqrt{2v}}{2v\sqrt{v}} \; .$$

Le condizioni (1), (2) di Fubini sono soddisfatte, e si dimostra pure l'esistenza di queste superficie.

Matematica. — *Il difetto di regolarità di un gruppo finito rispetto a un divisore primo del suo ordine.* Nota di L. Lombardo-Radice, presentata (*) dal Socio E. Bompiani.

Riassumo qui i risultati contenuti in una Nota presentata ai « Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni », nella quale proseguo lo studio, iniziato con precedenti lavori, della struttura dell'algebra A_p legata a un gruppo G di ordine finito n in $C(p)$ (corpo primo con p elementi) nel caso in cui p divide n. Nella Nota in questione si stabilisce in primo luogo che la sottoalgebra centrale C_p di A_p contiene almeno h_p elementi eccezionali indipendenti, essendo h_p il numero dei sistemi completi di elementi coniugati di G, i cui elementi hanno periodo divisibile per p.

Si dimostra in secondo luogo, su alcuni esempi, che l'ordine e_p di E, sottoalgebra eccezionale di C_p, può effettivamente superare h_p. Si chiama allora *difetto di regolarità di* G *rispetto a p* la differenza:

$$\delta_p = e_p - h_p \; .$$

(*) Nella seduta del 10 maggio 1947.

Si introduce quindi, con il nome di *segnatura dei difetti*, il complesso degli invarianti numerici di G formato dai difetti di regolarità rispetto ai diversi divisori primi dell'ordine.

Infine, avvalendosi soprattutto di un risultato di R. Brauer sulle rappresentazioni di un gruppo in un campo di Galois, si fa vedere che il difetto di regolarità rappresenta anche la differenza tra il numero degli automoduli primitivi (o che è lo stesso, delle componenti irriducibili) dell'algebra legata a G nell'ampliamento algebricamente chiuso di $C(p)$ e il numero delle rappresentazioni irriducibili distinte di G su matrici di quello stesso ampliamento di $C(p)$.

Meccanica. — *Considerazioni sulle turbine a gas a ciclo semichiuso.* Nota di A. CAPETTI, presentata (*) dal Socio M. PANETTI.

1. È nota la distinzione degli impianti di turbine a gas secondo funzionano a ciclo chiuso od a ciclo aperto.

Nel primo caso, la massa gassosa che circola nelle macchine e negli apparecchi componenti l'impianto è sempre la stessa, quindi può essere mantenuta ad elevata densità, col vantaggio di ridurre l'area delle sezioni di passaggio necessarie per ogni unità di potenza e di aumentare il coefficiente di trasmissione del calore nello scambiatore-rigeneratore e nei refrigeratori.

Nel secondo caso invece, la combustione è fatta avvenire in seno alla massa d'aria compressa e la turbina propriamente detta è attraversata dai prodotti della combustione.

Oltre ai vantaggi inerenti alla semplificazione dell'impianto, si ha quello di ridurre il volume della camera di combustione, che in questo caso, a differenza da quello a ciclo chiuso, è alimentata da aria alla pressione massima del ciclo.

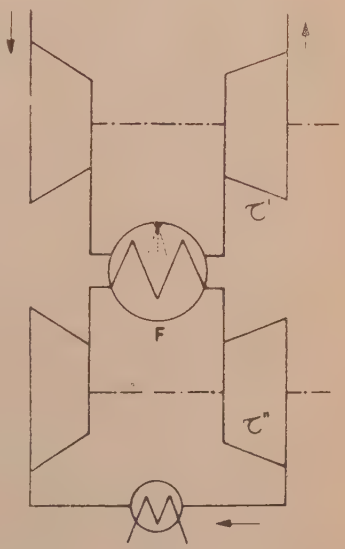


Fig. 1.

Per usufruire contemporaneamente di alcuni almeno, dei pregi propri di ciascuno dei due cicli predetti, si è pensato ad un impianto combinato, costituito da due cicli, uno chiuso ed uno aperto, aventi essenzialmente in comune la caldaia (F della fig. 1), della quale si utilizzano sia i prodotti della combustione, in una turbina $\mathfrak{T}'$, sia l'aria compressa che essi scaldano, in un'altra turbina $\mathfrak{T}''$.

(*) Nella seduta del 10 maggio 1947.

2. I due cicli possono essere del tutto indipendenti; unica relazione necessaria fra loro è quella che esprime l'eguaglianza tra il calore utilmente sviluppato dalla combustione (prodotto del potere calorifico del combustibile H per il rendimento η_b della combustione) e l'aumento di contenuto termico dell'aria e dei gas combusti.

Indicando con:

α il rapporto tra le masse dell'aria comburente e del combustibile;

ψ il rapporto tra le masse dell'aria circolante e dell'aria comburente;

ΔT il riscaldamento ricevuto dall'aria circolante;

$\Delta' T$ il riscaldamento ricevuto dai gas combusti;

c_p il calore specifico medio a pressione costante;

questa relazione si scrive:

$$(1) \qquad H\eta_b = c_p \Delta' T (1 + \alpha) + c_p \Delta T \alpha\psi .$$

Non potendo α scendere al disotto di un certo valore α_{min} (che al limite sarà il valore stechiometrico), la (1) stabilisce una limitazione nella scelta dei valori possibili di ΔT, $\Delta' T$ e ψ:

$$(2) \qquad \psi \leqq \frac{H\eta_b}{c_p \Delta T \alpha_{min}} - \frac{1 + \alpha_{min}}{\alpha_{min}} \frac{\Delta' T}{\Delta T} .$$

(Esempio: si tratti di una nafta con $H = 43 \times 10^6$ m²/s² ed $\alpha_{min} = 15$; assumendo $c_p = 1100$ m²/s² °C e $\Delta T = \Delta' T$, si ha $\psi \leqq \frac{2500}{\Delta T} - 1{,}06$ ovvero: $\Delta T \leqq \frac{2500}{\psi + 1{,}06}$).

Altre relazioni sorgono se altri vincoli vengono posti ai cicli combinati. Ne esamineremo ora alcune.

3. Spesso nelle turbine a gas si adotta il principio di costituire il cosidetto «generatore di gas–motore», cioè un gruppo – composto di una turbina e di tutti i compressori e gli altri eventuali accessori – che fornisce il gas compresso e caldo ad una seconda turbina riservata al comando dell'alternatore o delle altre operatrici a cui è destinato l'impianto.

Questo principio può venir applicato al ciclo combinato di cui ci stiamo occupando, destinando al comando dei due compressori, o la turbina ad aria o quella a combustione interna.

Si viene così a stabilire un altro legame tra i due cicli, poichè il rapporto ψ va scelto in modo che si abbia l'eguaglianza tra il lavoro motore sviluppato dalla turbina e la somma dei lavori resistenti dovuti ai compressori, agli attriti nei sopporti e ai vari accessori.

Nel primo caso, rappresentato nella fig. 2 dove le lettere segnate sui simboli delle singole macchine denotano il lavoro rispettivamente fornito o consumato, abbiamo:

$$(3) \qquad L''_e \psi = L''_c \psi + L'_c + L_p ;$$

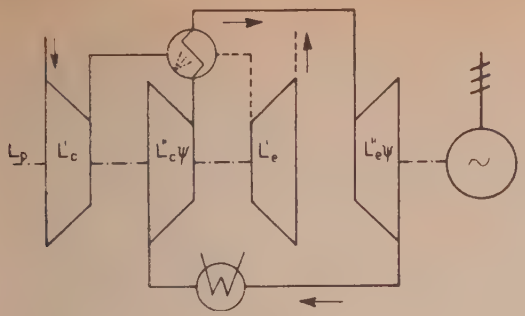


Fig. 2.

da cui:

$$\psi = \frac{L'_c + L_p}{L''_e - L''_c} \cdot \tag{4}$$

Nel secondo, rappresentato dalla fig. 3:

$$L'_c = L''_c\,\psi + L'_c + L_p \tag{3'}$$

$$\psi = \frac{L'_e - L'_c - L_p}{L''_c} \cdot \tag{4'}$$

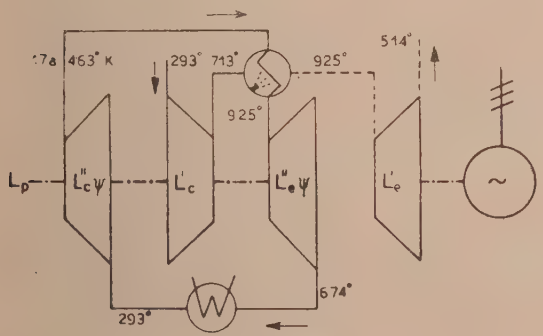


Fig. 3.

Sostituendo questi valori di ψ nella (2), si trova limitato il valore massimo del riscaldamento ammissibile, nel primo caso a

$$\Delta T < \frac{H\eta_b}{c_p} : \left[1 + \alpha_{min}\left(1 + \frac{L'_c + L_p}{L''_e - L''_c}\right)\right];$$

nel secondo caso a:

$$\Delta T < \frac{H\eta_b}{c_p} : \left[1 + \alpha_{min}\,\frac{L''_c - L'_c + L'_e - L_p}{L''_c}\right].$$

4. Finchè i due circuiti sono completamente estranei l'uno all'altro, come nelle figg. 1–3, è possibile scegliere i rapporti di compressione ottimi per entrambi, ed introdurre in entrambi quei perfezionamenti come la rigenerazione del calore di scarico e la refrigerazione intermedia fra i vari stadi della compressione, che notoriamente migliorano assai il rendimento.

Le cose cambiano però se il principio della combinazione dei due cicli viene realizzato mettendo in comune anche una parte del percorso dell'aria compressa, come per esempio il tratto AB dello schema della fig. 4, derivato da quello della fig. 2, schema in cui il compressore C″ funziona contemporaneamente da secondo stadio per il ciclo aperto, in serie con C′, e da unico stadio per il ciclo chiuso.

Così i due cicli sono fusi insieme in un unico ciclo, a cui è dato il nome di *semichiuso*.

Se non ci fosse la rigenerazione, sarebbe dubbio il vantaggio della fusione, sia perchè porta all'uso di due rapporti di compressione-espansione differenti, di cui necessariamente uno almeno sarà diverso da quel valore che sarebbe « ottimo » per quei dati rendimenti particolari delle macchine e per la temperatura di ammissione in turbina ritenuta ammissibile, sia perchè

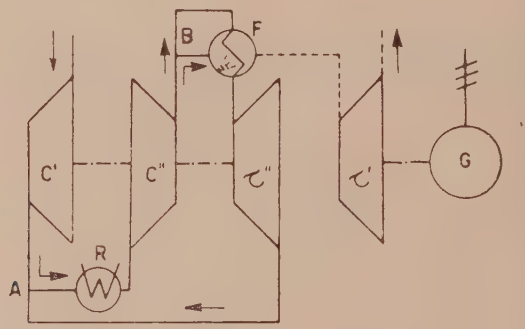


Fig. 4.

inserisce la refrigerazione intermedia in uno dei cicli, ciò che nei cicli non rigenerativi è idealmente dannoso e praticamente riesce tanto meno vantaggioso quanto migliori sono i rendimenti.

La rigenerazione appare quindi particolarmente necessaria nel caso del ciclo semichiuso. Essa è di fatto introdotta nello schema Sulzer della fig. 5 [1] che comprende i tre compressori C′, C″, C‴ intercalati dai due refrigeratori R′ ed R″, una turbina ad aria T″ di comando dei compressori, una caldaia F alimentata ed attraversata da aria preriscaldata nello scambiatore S ed una turbina T′ a gas combusti.

Questo schema prevede la rigenerazione solo del calore dell'aria scaricata da T″ e non di quello dei gas combusti scaricati da T′ sicchè non è conseguito tutto quell'aumento di rendimento rispetto allo schema 4, che appare teoricamente possibile.

La cosa è giustificata dalla ditta proponente con lo scopo di evitare il passaggio di prodotti della combustione, fuligginosi ed incrostanti, entro i tubi necessariamente sottili dello scambiatore di calore.

(1) Cfr. « Engineering », 19 luglio 1946.

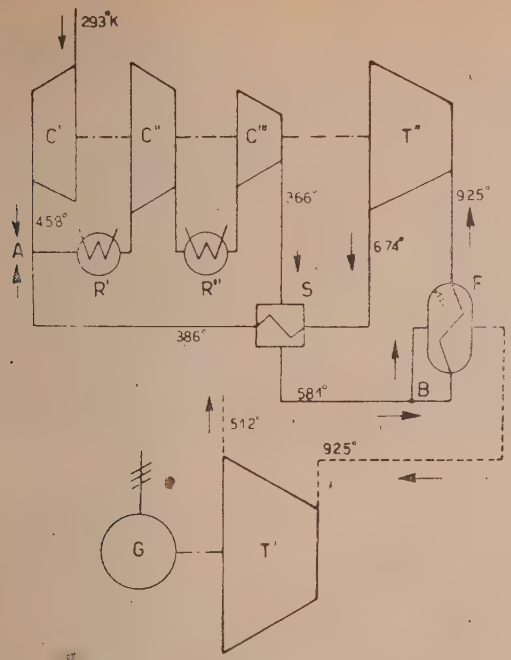

293°K
C'
C''
C'''
T''
366°
925°
458°
A
674°
R'
R''
S
F
386°
581°
B
512°
925°
G
T'

Fig. 5.

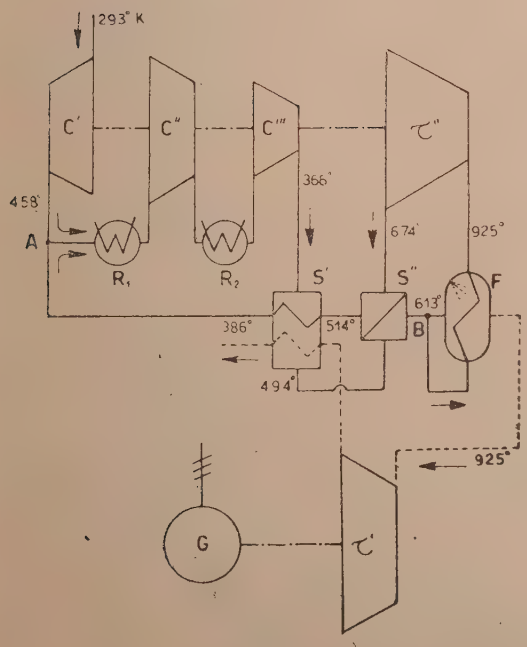

293° K
C'
C''
C'''
τ''
366°
458°
A
674°
925°
R₁
R₂
S'
S''
F
613°
386°
514°
B
494°
925°
G
τ'

Fig. 6.

D'altra parte, non è possibile immettere semplicemente anche i gas di scarico della turbina a combustione interna nello scambiatore unico S dello schema 5, perchè essi si trovano a temperatura minore di quella dell'aria di scarico, dato il maggior rapporto di espansione a cui sono soggetti. Bisognerebbe immetterli nel punto in cui l'aria ha già abbassata la sua temperatura, in seguito a calore ceduto all'aria compressa, fino al valore di scarico dei gas combusti, suddividere cioè, come è mostrato nello schema della fig. 6, lo scambiatore in due parti S′ ed S″. Attraversando la prima, l'aria compressa viene in contatto di entrambi le correnti di scarico dalle turbine $\mathfrak{T}'$ e $\mathfrak{T}''$: le masse dell'aria scaldata e dei gas scaldanti sono eguali (a parte il supplemento portato dal combustibile) e quindi all'uscita l'aria compressa può avere una temperatura prossima a quella dei gas combusti. Entra ora nello scambiatore S″, dove completa il suo riscaldamento di quanto è consentito dalla diversità di masse, ossia (trascurando le differenze di valore specifico) fino alla temperatura:

$$(5) \qquad T_2 = T_1 + (1 - \delta)(T_1' - T_2') \frac{\psi}{1 + \psi},$$

dove

T_1 e T_2 sono le temperature di ingresso e di uscita dell'aria compressa:

T_1' e T_2' sono le analoghe temperature per l'aria di scarico

δ è un coefficiente di dispersione del calore dallo scambiatore.

Al limite, cioè qualora lo scambio di calore tra le correnti contrarie potesse avvenire con salto di temperatura infinitesimo, e trascurando sia le dispersioni di calore, sia la massa del combustibile, potrebbe essere $T_2' = T_1'$ ed eguale alla temperatura di scarico da $\mathfrak{T}'$, sicchè si avrebbe:

$$(6) \qquad T_2 = (T_1' \psi + T_1) : (\psi + 1),$$

cioè la media ponderale fra le due temperature di scarico.

La rigenerazione è stata completa, poichè tanto l'aria quanto i gas di scarico possono abbandonare S′ alla temperatura che l'aria compressa possiede all'uscita dall'ultimo compressore.

Allo stesso risultato conduce anche lo schema della fig. 7, secondo cui l'aria comburente si distacca dal resto della corrente in un punto B che precede lo scambiatore S′ ed entra invece in uno scambiatore S″, percorso dai gas combusti.

Le masse dei due fluidi che si scambiano il calore essendo eguali fra loro tanto in S′ che in S″, l'aria comburente si porterà al limite alla temperatura T_1 di scarico da $\mathfrak{T}'$ e il resto alla temperatura T_1' di scarico da $\mathfrak{T}''$.

5. Illustriamo le brevi considerazioni esposte, con alcuni esempi numerici, per cui abbiamo adottato i dati seguenti, prossimi a quelli resi noti nella pubblicazione citata per l'impianto Sulzer.

Temperatura assoluta ambiente	293°
Pressione assoluta ambiente	1 kg/cm²
Temperatura assoluta ammissione nelle turbine	925°
Pressione assoluta ammissione nelle turbine	16,8 kg/cm²
Pressione assoluta scarico turbina ad aria	4,2 "
Potere calorifico combustibile (per unità di massa)	43×10^6 m²/s²

Ammettiamo inoltre valide le assunzioni seguenti:

Rendimento adiabatico interno dei compressori	0,87
Rendimento adiabatico interno delle turbine	0,88
Rendimento della combustione	0,96
Lavoro perduto su ciascun albero, per unità di massa che attraversa la relativa turbina (L_p)	8300 m²/s²
Perdite di carico e di calore nel passaggio attraverso refrigeratori, scambiatori di calore	1 ÷ 2 %
Salto minimo di temperatura negli scambiatori di calore	20°

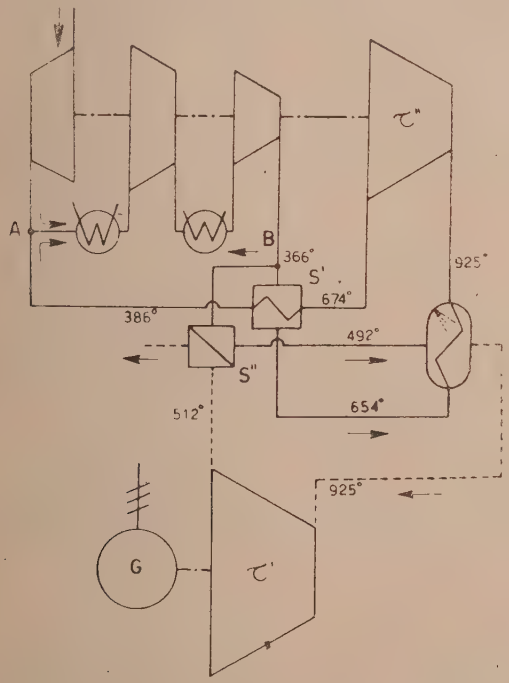


Fig. 7

Sono stati considerati quattro casi: quelli dei cicli delle figg. 2, 4, 5 e 6–7, ammettendo nel caso dei cicli distinti della fig. 2 che il ciclo aperto funzioni collo stesso rapporto d'espansione-compressione dello schema 4, ossia 16.8,

I risultati principali delle calcolazioni eseguite coi noti metodi (2) sono riassunti nell'annessa tabella in cui η rappresenta il rendimento termico

(2) L'equazione (3) viene sostituita nel caso 4 dalla seguente

(3") $$L_e'' \psi = L_c' + (1 + \psi) L_c'' + L_p$$

e nei casi 5÷7 dalla:

(4") $$L_e'' \psi = L_c' + (1 + \psi)(L_c'' + L_c''') + L_p$$

effettivo globale dell'impianto e II il rapporto tra le potenze nette sviluppate dalla turbina ad aria e da quella a combustione interna, mentre le temperature sono quotate sulle figure stesse $2 \div 7$.

Ciclo della figura n°	ψ	α	II	η
2	4,23	17,4	2,35	0,202
4	3,43	18,5	1,90	0,212
5	3,16	25,6	1,93	0,267
6, 7	2,5	29,2	1,95	0,302

Il confronto delle due prime righe della tabella mostra come il ciclo semplice semichiuso abbia un rendimento leggermente superiore a quello dei due cicli semplici da cui deriva, perchè il refrigeratore R, necessario nel ciclo chiuso, dà qualche utilità nel ciclo aperto nonostante manchi la rigenerazione.

L'introduzione di questa secondo lo schema Sulzer della fig. 5 ha dato un grande vantaggio, facendo alzare il rendimento di oltre 0,05 (26 %), ma l'aria esce dallo scambiatore ancora ad una temperatura di almeno 30° più bassa del possibile. Ed ecco perchè la rigenerazione completa realizzata dagli schemi 6 o 7, da noi proposti, porta l'ulteriore notevole aumento di 0,035, cioè del 13 %.

Astronomia. — *Sull'insolazione intertropicale delle superficie poliedriche*. Nota di G. Vinaccia, presentata (*) dal Socio G. Armellini.

Lo studio che qui si presenta riguarda l'Equatore, luogo dove il corso del Sole ha caratteristiche singolari e gli effetti termici teoricamente sono i più rilevanti, in quanto che, si hanno annualmente due altezze meridiane zenitali agli equinozi, e due altezze meridiane solstiziali di 66° 33'.

Per ridurre la mole delle calcolazioni allo stretto necessario come per avere notizie concrete dell'insolazione annuale, i rilievi sono stati limitati ad un sol giorno del mese (*giorni caratteristici mensili*).

Trattandosi di calcoli termici aventi scopo comparativo si è adottato una intensità del sole zenitale al perielio, di 1,51 cal:gr/cmq/minuto (nella Oasi di Auargla–Sahara è stata misurata nel febbraio 1924 un'intensità di 1,54 cal:gr/cmq/minuto).

(*) Nella seduta del 10 maggio 1947.

Le analisi oggetto della presente Nota sono limitate preliminarmente alle superficie piane orizzontali e verticali variamente orientate, per poi passare a quelle di alcuni poliedri i più significativi.

Il programma di analisi delle superficie piane è stato il seguente.

Analisi 1.

Per le superficie piane orizzontali è stato calcolato per i giorni mensili caratteristici predetti, la variazione dell'intensità della radiazione solare ricevuta di 10 in 10 minuti, nonchè la quantità di calore giornaliera.

Analisi 2.

Per le superficie verticali si è stabilito di prendere in esame quelle orientate di 10° in 10°, precisamente di azimut est–ovest 0°, 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70°, 80°, 90°, sia rivolte verso nord come verso sud (contando l'azimut a partire da sud).

Per le dette superficie verticali è stata determinata la data e l'orario di inizio e fine dell'insolazione; poi per i giorni caratteristici l'orario di inizio e fine dell'insolazione, la variazione dell'intensità della radiazione solare ricevuta di 10 in 10 minuti, e la quantità di calore ricevuta durante l'insolazione.

Poi con tali dati sono state fatte le seguenti analisi dell'insolazione per:

a) coppie di superficie piane verticali, parallele ed opposte, orientate di 10° in 10° (facciate opposte di un fabbricato);

b) due coppie di superficie piane verticali parallele ed opposte, ortogonali tra loro (facce laterali di un cubo);

c) due coppie di superficie piane verticali, come alla lettera *b*) ma la lunghezza di una coppia è decupla dell'altra. L'orientamento indicativo delle dette coppie è quello delle superficie di lunghezza decupla (superficie laterale di un parallelepipedo rettangolo avente il lato maggiore decuplo del minore);

d) la superficie laterale di un prisma retto avente per base un poligono regolare di 36 lati (il lato del poligono è uguale a quello del cubo).

Analisi 3.

Con i risultati delle dette analisi, sono state istituite altre analisi del calore ricevuto per metro cubo, sempre nei detti giorni caratteristici, da alcuni poliedri a seconda del loro orientamento.

Precisamente per:

a) un cubo con due sole facce parallele ed opposte soleggiate (case a schiera);

b) un cubo (fabbricato monodimensionale);

c) un parallelepipedo a pianta quadrata e di altezza decupla del lato di base (fabbricato pluripiano);

d) un parallelepipedo a pianta rettangolare con il lato maggiore decuplo di quello minore ed altezza pari a quello minore (l'orientamento indicativo azimutale è quello del lato maggiore del rettangolo);

e) un parallelepipedo come alla lettera *d*) ma con altezza pari al lato maggiore;

f) un prisma retto avente per base un poligono regolare di 36 lati ed altezza pari al lato del poligono (il lato del poligono è uguale a quello del cubo);

g) un prisma retto come alla lettera *f*) ma con altezza decupla del lato del poligono base.

Esame comparativo dei risultati delle singole analisi.

Analisi 1 (superficie piana orizzontale).

Calorie giornaliere ricevute nel corso dell'anno da una superficie piana orizzontale. – Dalla comparazione delle calorie giornaliere ricevute nei giorni caratteristici dell'anno, da una superficie piana orizzontale, si rileva che la maggiore quantità si ha agli equinozi (sole zenitale) con cal/mq. 6200 mentre al solstizio di dicembre vengono ricevute cal/mq. 5700 e in quello di giugno le calorie si riducono a 5300.

Analisi 2 (superficie piane verticali).

Calorie giornaliere ricevute nel corso dell'anno da una superficie verticale piana (facciata) a seconda della sua orientazione. – Da un esame comparativo dei risultati dei calcoli si ha:

1° le facciate aventi azimut da 0° a 60° sono insolate tutto l'anno (cioè quelle rivolte verso levante e ponente);

2° le facciate verso mezzogiorno e settentrione sono insolate per soli sei mesi dell'anno, precisamente quelle da az. 60° a az. 90°;

3° le facciate che ricevono annualmente meno calore sono quelle rivolte a mezzogiorno e settentrione, mentre quelle rivolte a levante e ponente ne ricevono quasi il doppio. Infatti la somma delle calorie ricevute nei giorni caratteristici mensili è di cal/mq. 11800 per la facciata rivolta a sud e cal/mq. 11400 per quella a nord, mentre per quella di levante (e ponente) le calorie sono 24700;

4° il calore solare ricevuto giornalmente da una facciata nel corso dell'anno aumenta progressivamente passando dall'orientazione di az. 90° a quella di az. 0°;

5° la facciata che riceve maggior calore solare per insolazione al solstizio di giugno è quella rivolta a settentrione con 3200 cal/mq., mentre al solstizio d'inverno è quella di mezzogiorno con cal/mq. 3400;

6° le facciate di settentrione e mezzogiorno non sono soleggiate agli equinozi, mentre in tali giorni quelle più termicamente insolate sono quelle di levante e ponente (cal/mq. 2300);

7° nei mesi di febbraio, aprile, agosto, ottobre il complesso di tutte le facciate riceve meno calore solare che non nei periodi solstiziali.

Comparando gli effetti dell'insolazione delle superficie piane orizzontali con le verticali si nota che le prime ricevono maggior calore delle seconde, precisamente agli equinozi 2,7 volte di più.

Analisi 2/a (superficie piane verticali).

Dalla comparazione dei risultati dell'analisi dell'insolazione termica di *coppie* di superficie piane verticali, opposte e parallele (facciate) a seconda della loro orientazione si ha:

1° sono termicamente meno soleggiate:

a) ai solstizi la coppia di az. 60°,

b) nei mesi precedenti e seguenti i solstizi (novembre e gennaio, maggio e luglio) la coppia di az. 70°;

c) nei mesi precedenti e seguenti gli equinozi (febbraio ed aprile, agosto ed ottobre) la coppia di az. 80°;

d) agli equinozi quella di az. 90°;

2° la coppia di facciate che riceve annualmente la maggiore quantità di calore e quella di az. 0° (levante–ponente); infatti la somma delle calorie ricevuta dalla detta coppia di facciata nei giorni caratteristici mensili è di cal/mq. 49500 mentre la coppia rivolta a settentrione–mezzogiorno ne riceve cal. 23200, cioè meno della metà.

3° la coppia di facciate rivolte a levante e ponente riceve agli equinozi cal/mq. 4700 mentre quelle rivolte a mezzogiorno–settentrione non sono soleggiate.

Analisi 2/b (superficie piane verticali).

Dall'esame comparativo delle calorie ricevute per mq. durante il corso dell'anno, *in totale dalla superficie laterale di un cubo* a seconda del suo orientamento si ha:

1° la diversa orientazione del cubo porta ad una differenza non superiore al 10%;

2° la superficie laterale del cubo di az. 90/0°, cioè quello orientato ai quattro punti cardinali, riceve il massimo calore giornaliero al solstizio di dicembre (cal. 7900), agli equinozi il minimo (cal. 4700);

3° ai solstizi di dicembre e di giugno e nei mesi antecedenti e seguenti i solstizi, la superficie laterale che riceve meno calore è quella del cubo di az. 60/30°;

4° la superficie laterale di un cubo di az. 70/20° riceve annualmente minore calore, mentre il cubo di az. 50/40° riceve il massimo, seguìto da quello di az. 90/0°. Infatti le facce laterali del cubo di az. 70/20° ricevono in totale nei giorni caratteristici mensili cal. 70400 mentre quelle del cubo di az. 50/40° ne ricevono 74000 e quello di az. 90/0° cal. 72800.

Analisi 2/c (superficie piane verticali).

Dall'esame comparativo delle calorie giornaliere ricevute nei giorni mensili caratteristici, dalla superficie laterale di un parallelepipedo rettangolo avente il lato maggiore lungo dieci volte quello minore, si ha:

1° la superficie laterale che riceve maggior calore è quella del parallelepipedo di az. 0° che al solstizio di dicembre riceve cal/mc. 4800 e in quello di giugno cal/mc. 4500 ed agli equinozi cal/mc. 4700;

2° la superficie laterale che riceve minor calore è quella del parallelepipedo di az. 90° che al solstizio di dicembre riceve cal. 3900, a quello di giugno cal/mc. 3600 ed agli equinozi cal/mc. 400;

3° facendo la somma delle calorie ricevute nei giorni caratteristici mensili dalla superficie laterale dei detti parallelepipedi di az. 90° e 0° si ha che la prima riceve cal/mc. 28200 mentre la seconda ne riceve cal/mc. 51800 (rapporto 1 : 1,84).

Analisi 2/d.

Dall'esame comparativo delle calorie ricevute nei giorni caratteristici mensili dalla superficie laterale di un prisma retto avente per base un poligono regolare di 36 lati si ha:

1° la massima quantità di calore giornaliero si ha al solstizio di giugno con cal/mc. 360 la minima nei mesi precedenti e susseguenti gli equinozi con circa cal/mc. 480.

2° il totale delle calorie ricevute nei giorni caratteristici mensili è di cal/mc. 6300.

Riassumendo i risultati delle Analisi 2. – Una graduatoria delle forme paretali meno insolate termicamente, riferita all'unità di volume, è la seguente:

1° parallelepipedo con due sole facce insolabili, rivolte a mezzogiorno e a settentrione;

2° prisma retto multifacce;

3° parallelepipedo rettangolo con asse maggiore nella direzione est-ovest.

Il cubo è il poliedro di massimo insolamento termico.

Prendendo per termine di paragone le calorie ricevute dalla superficie laterale di un prisma retto a 36 facce, il parallelepipedo di az. 90° (rettangolo) ne ha il quadruplo, *il cubo il* decuplo.

Analisi 3/a.

Cubo con due sole facce parallele ed opposte soleggiabili (*case a schiera*). – Dall'analisi delle calorie ricevute nei giorni caratteristici si ha che la maggiore quantità di calore è ricevuta agli equinozi dal cubo avente le facce insolate di az. 0°, con cal/mc. 10900; la minore quantità si ha agli equinozi, dal cubo con facce insolate di az. 90°, con cal/mc. 6200.

Facendo la somma delle calorie ricevute nei giorni caratteristici dal cubo con facce insolate di az. 90° si ha un totale di cal/mc. 90800, mentre quello di az. 0° ne riceve cal/mc. 117.200.

Analisi 3/b.

Cubo soleggiato in tutte le sue facce (*casa monodimensionale*). – Dall'esame delle calorie giornaliere ricevute nei giorni caratteristici si ha:

La maggiore quantità di calore e ricevuta al solstizio di dicembre dal cubo di az. 90/0° con cal. 13700; la minore quantità è ricevuta dal cubo di az. 50/40° al 22 maggio e al 23 luglio con cal. 10800.

Facendo la somma delle calorie ricevute nei giorni caratteristici mensili, il cubo di az. 60/30° riceve il numero di calorie minori (138800), il massimo è ricevuto dal cubo di az. 50/40 con cal. 142500.

Analisi 3/c.

Parallelepipedo a base quadrata ed altezza decupla del lato di base. – Dall'esame delle calorie giornaliere ricevute nei giorni caratteristici si ha:

La maggiore quantità di calore è ricevuta al solstizio di dicembre dal parallelepipedo di az. 90/0° con cal/mc. 8500, la minima dallo stesso agli equinozi con cal/mc. 5300.

Facendo la somma delle calorie ricevute nei giorni caratteristici mensili il cubo di az. 70/20° riceve cal/mc. 77600 mentre quello di az. 50/40 ne riceve cal/mc. 80.000.

Analisi 3/d.

Parallelepipedo a base rettangola con il lato maggiore decuplo di quello minore ed altezza pari a quello minore. – Dall'esame delle calorie giornaliere ricevute nei giorni caratteristici si ha:

La maggiore quantità di calore è ricevuta dal parallelepipedo di az. 0° che agli equinozi riceve cal/mc. 10900, la minima da quello di az. 90° pure agli equinozi con cal. 6600.

Facendo la somma delle calorie ricevute nei giorni caratteristici per ogni singola orientazione si ha che il massimo calore è ricevuto dal p. di az. 0° (120400 cal/mc.), e il minimo da quello di az. 90° (96700 cal/mc.).

Analisi 3/e.

Parallelepipedo a base rettangola con il lato maggiore decuplo di quello minore ed altezza pari al lato maggiore. – Dall'esame delle calorie giornaliere ricevute nei detti giorni caratteristici si ha:

La maggiore quantità di calore è ricevuta dal parallelepipedo di az. 0° al solstizio di dicembre con 5400 cal/mc.; la minima dal p. di az. 80° con 2000 cal/mc.

Facendo la somma delle calorie ricevute nei giorni caratteristici dell'anno per ogni singola orientazione si ha che il massimo calore è ricevuto dal p. di az. 0° con cal. 58700, mentre quello di az. 90° ha il minimo (cal. 35000).

Analisi 3/f.

Prisma retto con base poligono regolare di 36 lati ed altezza pari al lato del poligono. – Dall'esame delle calorie ricevute nei detti giorni caratteristici si ha che il maggiore calore è ricevuto agli equinozi con cal/mc. 6700 e la minore nei mesi precedenti e seguenti i solstizi con cal/mc. 6100. Il totale delle calorie ricevute nei giorni caratteristici è di 74600.

Analisi 3/g.

Prisma retto con base poligono regolare di 36 lati ed altezza decupla del lato del poligono. – Dall'esame delle calorie ricevute nei giorni caratteristici si ha che la quantità massima di calore è ricevuto al solstizio di dicembre con cal/mc. 1100, mentre la minima si ha nei mesi antecedenti e seguenti i solstizi con cal. 1000 circa.

Il totale delle calorie ricevute nei giorni caratteristici è di 13100.

Riassumendo i risultati delle Analisi 3. – Una graduatoria delle forme poliedriche meno soleggiate fatta prendendo per termine di paragone la somma delle calorie ricevute nei giorni caratteristici e ragguagliandola a quella del cubo di az. 90° preso per unità si ha:

1. Prisma retto a base poligono di 36 lati, altezza decupla del lato della base (il lato del poligono è uguale a quello del cubo) . . 0,10
2. Parallelepipedo rettangolo di lato maggiore decuplo di quello minore e altezza pari al lato maggiore 0,24
3. Prisma retto a base poligono di 36 lati ed altezza pari al lato 0,53
4. Parallelepipedo a base quadrata di altezza decupla del lato del quadrato e di az. 90° 0,56
5. Parallelepipedo a base rettangolo di lato maggiore decuplo di quello minore a altezza pari al lato minore 0,68
6. Cubo di az. 10° 1,00

Il cubo con due sole facce insolate di az. 90° riceve 0,64.

Questo parallelo mostra quale importanza ha la grandezza dei solidi, la loro forma e la loro orientazione al fine di ricevere più o meno calore dall'insolazione.

Geodesia. — *Su una correzione per i valori della gravità.* Nota di C. Morelli, presentata (*) dal Socio G. Cassinis.

1. Durante la guerra è stata effettuata dallo scrivente la *Compensazione della rete internazionale delle stazioni di riferimento per le misure di gravità relativa* (1), che aveva consentito di ricavare i valori più probabili delle differenze di gravità fra le stazioni sede delle principali misure assolute. In due lavori eseguiti subito dopo (2) (3) avevamo dimostrato su questa base che le misure assolute di gravità, anche quelle fino allora ritenute le più esatte (per esempio, quella di Potsdam), erano invece affette da notevoli errori, dovuti per la maggior parte a correzioni per errori sistematici, insufficienti o non provate sperimentalmente. Ciò divenne soprattutto evidente dopo le nuove misure assolute di gravità al *Nat. Bureau of Standard di Washington* e al *Nat. Phys. Laboratory di Teddington* (Inghilterra).

Data l'importanza che riveste il problema, in quanto dal valore assunto fino allora per la gravità a Potsdam ($g = 981{,}274$) dipendevano tutti gli

(*) Nella seduta dell'11 giugno 1947.

(1) C. Morelli, *Compensazione della rete internazionale delle stazioni di riferimento per le misure di gravità relativa* («Boll. Soc. Adriatica Scienze Nat.», vol. XLI, Trieste 1946).

(2) C. Mcrelli, *Per un sistema di riferimento «internazionale» delle misure di gravità. Nota preliminare* («Geofisica pura ed applicata», vol. VIII, fasc. 3-4, Milano 1946).

(3) C. Morelli, *Nuovo contributo a favore di un sistema di riferimento «internazionale» per le misure di gravità.* («La Ricerca Scientifica». Roma, maggio-giugno 1946).

altri valori della gravità dedotti (per differenza) sulla superficie della Terra (*sistema di Potsdam*), sorgeva naturale la necessità di trovare il modo di ricavare per il *caposaldo internazionale di riferimento* un valore più sicuro, che tenesse conto dei risultati delle misure assolute moderne e delle nuove esperienze sugli errori sistematici da esse ricavate.

Questo appunto abbiamo fatto in [2], [3], trasportando i valori delle principali misure assolute a Potsdam sulla base delle differenze relative risultanti dalla Compensazione [1] sopra menzionata, con pesi diversi a seconda dell'importanza delle singole misure assolute. *Quale valore più probabile per la correzione da apportarsi al sistema di Potsdam abbiamo ottenuto* [3]

$$-0{,}016 \pm 0{,}002 \text{ cm sec}^{-2};$$

con ciò risulterebbero i seguenti valori per la gravità di riferimento: Potsdam $g = 981{,}258$ (equivalente per Washington: $g = 980{,}084$).

Ripetiamo che queste ricerche sono state effettuate durante la guerra e nel periodo immediatamente successivo, cioè in condizioni di quasi completo isolamento.

2. In una discussione successiva (febbraio 1946) in proposito col professore G. Silva, Egli suggeriva l'opportunità di rivedere nei dettagli dalle pubblicazioni originali, i procedimenti ed i calcoli seguiti nelle determinazioni di gravità assoluta dalla fine del secolo scorso, onde poter giudicare direttamente dell'attendibilità da attribuirsi ad esse e quindi dei *pesi* con cui farle entrare nella deduzione del nuovo valore per il caposaldo internazionale.

Mente procedevamo alla ricerca e raccolta del materiale necessario ci pervenivano (15 febbraio 1947) dagli U.S.A. per cortesia del *Dept. of the Interior–Bureau of Mines* le *Information Circulars* contenenti i *Geophysical Abstracts n. 112–121* (sett. 1943–nov. 1945). Risulta da questi che durante la guerra lo stesso problema è stato ampiamente discusso negli U.S.A., rendendo così non più necessario l'ulteriore lavoro che avevamo in animo di compiere.

Infatti, H. L. Dryden [4] ha riesaminato i calcoli della determinazione assoluta di gravità a Potsdan, arrivando alla conclusione che qualora non si applichi il procedimento, non giustificato sperimentalmente, seguito nella riduzione da Kühnen e Furtwängler allo scopo di correggere certi errori sistematici, il risultato per Potsdam è 981,262.

Inoltre, il *Comitato per le Costanti Fisiche Fondamentali del Consiglio Naz. delle Ricerche statunitense* affidò al Sottocomitato per la Gravità l'incarico di studiare le varie misure assolute e di proporre il valore ritenuto più esatto [5]. Questo Sottocomitato trovò che soltanto tre misure assolute pote-

(4) H. L. DRYDEN, *A reexamination of the Potsdam Absolute Determination of Gravity* (« Jour. Research Nat. Bureau of Standards », vol. 29, n. 5, 1942, pp. 303–314).

(5) H. L. DRYDEN, *Absolute Gravity-Determinations*. (« National Research Council, American Geophysical Union », Transactions of 1943, Part. I, Washington, D.C., 1943, pp. 42–43).

vano dare serio affidamento: Potsdam, Washington e Teddington. Riesaminando questi risultati e riducendo il primo e l'ultimo a Washington, il Sottocomitato concluse che il valore più probabile per la gravità assoluta a Washington, N.B.S. è 980,0830.

Così la correzione da applicarsi al sistema di Potsdam sarebbe — 0,017, *in ottimo accordo col valore* — 0,016 *da noi proposto e ricavato con criteri diversi ed in maniera del tutto indipendente.*

3. In conclusione osserviamo che, essendo stato rivelato da tre parti diverse e indipendenti (dagli U.S.A., dai Colleghi Inglesi [6] e da noi) il notevole errore di cui è affetto l'attuale caposaldo gravimetrico di riferimento, la questione dell'*adozione di un nuovo sistema di riferimento internazionale* sul tipo di quello da noi proposto [3] è ormai matura per essere sottoposta alla discussione internazionale ed all'eventuale approvazione della Commissione competente nell'ambito dell'Unione Geodetica e Geofisica Internazionale.

Si tratta in definitiva di prendere una decisione ufficiale su una modifica da apportare al valore internazionale di riferimento per le misure di gravità, e sui criteri più opportuni da seguire perchè questa modifica abbia la giustificazione migliore. Il problema è di interesse generale, in quanto molto spesso ricorre nella pratica la necessità di conoscere esattamente il valore che compete all'accelerazione della gravità nei vari punti della Terra e questi, come dianzi si è detto, dipendono tutti dal valore assunto per il caposaldo di riferimento.

In attesa che una tale decisione venga presa ufficialmente, riteniamo che, data la sopra menzionata concordanza delle correzioni finora proposte, una correzione a $-0{,}016\,\mathrm{cm\,sec^{-2}}$ sui valori osservati (o ridotti nelle varie ipotesi) possa ritenersi sufficientemente giustificata. Poichè tale correzione va applicata sia ai valori osservati che a quelli normali di confronto, è naturale che nessuna variazione subirebbero i valori attuali delle *anomalie gravimetriche* e quindi le deduzioni da esse ricavate (importanti soprattutto per la prospezione geomineraria).

(6) B. C. Browne e E. C. Bullard, *Comparison of the acceleration due to gravity at the National Laboratory, Teddington and the Bureau of Standard, Washington, D. C.* (« Proc. R. Soc. London, A. », *960*, 165, pp. 110–117, March 1940).

Fisica. — *Teoria semiclassica dei processi multipli.* Nota di N. DALLAPORTA, presentata (*) dal Corrisp. E. PERSICO.

È stata recentemente prospettata da Bethe (1) la possibilità che il valore eccessivo delle sezioni d'urto nel processo di emissione di mesoni nella collisione tra protone e protone calcolate da Heitler (2) ed applicate da Hamilton Heitler e Peng (3) (H. H. P.) allo studio della radiazione cosmica, fosse sostanzialmente dovuto al fatto che gli autori, nel loro calcolo, trascuravano di considerare la possibilità di processi multipli, cioè di emissione di più mesoni in un solo atto. Applicando infatti il metodo di Weiszäcker e Williams (W. W.) (4), considerando cioè il nucleone incidente, come equivalente ad un campo di mesoni virtuali, i quali nell'urto possono appunto venire diffusi dal nucleone in riposo, e quindi apparire quali mesoni reali, si trova che per parametri d'urto b sufficientemente piccoli, la probabilità di diffusione di un mesone di data energia k risulta maggiore di 1, il che può significare soltanto che in tali condizioni viene emesso in media più di un mesone. È proprio trascurando tale fatto ed integrando su tutti i valori del parametro d'urto b che si ottengono le sezioni d'urto troppo grandi di Heitler.

Nel presente lavoro ci proponiamo di tradurre matematicamente l'idea espressa da Bethe mediante una teoria che consenta di calcolare le sezioni d'urto nei processi multipli. Un tale tentativo, basato sull'applicazione del metodo di W. W. è evidentemente soggetto alle medesime limitazioni di tale metodo e non può quindi condurre che ad uno schema di carattere semiclassico, valevole per grandi energie E della particella incidente e per energie k dei mesoni emessi piccole rispetto a questa. È presumibile però che anche entro tali limiti, la teoria possa trovare un campo di applicazione nel processo di creazione della componente dura dei raggi cosmici, con risultati che forse modificheranno sensibilmente quelli ottenuti da H. H. P.

L'impostazione che segue è applicabile non solo al processo che abbiamo nominato, ma a qualunque altro trattabile col metodo di W. W; solo per intenderci meglio parleremo di protoni o nucleoni come particelle incidenti e urtate e di mesoni da essi diffusi od emessi. Si consideri dunque un protone incidente, di energia E molto grande che passi alla distanza minima b da un altro protone in riposo ed il cui campo sia equivalente ad un insieme di mesoni virtuali con $p(b, k')\,dk'$ mesoni per cm², compresi nell'intervallo energetico k', $k' + dk'$. Indicando con $\sigma(k', k)\,dk$ la sezione d'urto relativa al processo di diffusione di un mesone k' nell'intervallo energetico k, $k + dk$

(*) Nella seduta del 10 maggio 1947.

(1) BETHE, « Phys. Rev. », *70*, 787 (1946).

(2) HEITLER e PENG, « Proc. Roy. Irish Acad. », *49*, 101 (1943).

(3) HAMILTON, HEITLER e PENG, « Phys. Rev. », *64*, 78 (1943).

(4) WEISZÄCKER, « Zs. F. Phys. », *88*, 612, 1934; WILLIAMS, « Phys, Rev. », *45*, 729. (1934).

la probabilità totale $Q(b, k)\,dk$ che un mesone venga diffuso nell'intervallo $k, k + dk$ è data da:

$$Q(b, k)\,dk = dk \int_k^E p(b, k')\,\sigma(k', k)\,dk'.$$

Il numero:

$$(1) \qquad \bar{n}(b) = \int_{\mu c^2}^{E} Q(b, k)\,dk = \int_{\mu c^2}^{E} \int_k^E p(b, k')\,\sigma(k', k)\,dk'\,dk \qquad (\mu = \text{massa del mesone})$$

che per dei valori di b sufficientemente piccoli potrà risultare maggiore di 1, rappresenterà allora evidentemente il numero medio di mesoni che vengono emessi quando il protone incidente passa ed una distanza b dal nucleone fermo; mentre la percentuale di mesoni emessa nell'intervallo energetico $k, k + dk$, sarà data da:

$$\frac{Q(b, k)\,dk}{\bar{n}(b)}.$$

Indichiamo ora con $P(n, \bar{n}(b))$ la probabilità che vengano effettivamente emessi n mesoni allorchè il valore medio del numero di essi è $\bar{n}(b)$. Avremo evidentemente che le rispettive sezioni d'urto per l'emissione di 1 mesone con energia k, di 2 mesoni con energia k_1, k_2, di n mesoni con energie $k_1, k_2 \cdots k_n$, saranno date da [5]:

$$(2) \qquad \varphi_1(k)\,dk = 2\pi\,dk \int_s^\infty \frac{Q(b, k)}{(\bar{n})\,b} P(1, \bar{n}(b))\,b\,db \quad ,$$

$$\varphi_2(k_1, k_2)\,dk_1\,dk_2 = 2\pi\,dk_1\,dk_2 \int_s^\infty \frac{Q(b, k_1)\,Q(b, k_2)}{[\bar{n}(b)]^2} P(2, \bar{n}(b))\,b\,db \quad ,$$

$$\varphi_n(k_1, k_2, \cdots k_n)\,dk_1\,dk_2 \cdots dk_n =$$

$$= 2\pi\,dk_1\,dk_2 \cdots dk_n \int_s^\infty \frac{Q(b, k_1)\,Q(b, k_2) \cdots Q(b, k_n)}{[\bar{n}(b)]^n} P(n, \bar{n}(b))\,b\,db.$$

Il limite inferiore d'integrazione s rappresenta il valore minimo del parametro b che non è o per il principio di indeterminazione e si può assumere dell'ordine di grandezza di $\frac{h}{Mc}$ (M massa della particella incidente).

Integrando su tutte le energie per avere le sezioni d'urto totali $\Phi_1, \Phi_2 \cdots \Phi_n$ dei processi multipli e ricordando la (1), avremo:

(5) Nella definizione delle (2), si è trascurato il fatto che in conseguenza della conservazione dell'energia le probabilità di emissione dei vari mesoni non sono rigorosamente indipendenti.

$$(3) \qquad \Phi_1 = 2\pi \int_0^\infty P(1, \bar{n}(b)) \cdot b\, db \quad , \quad \Phi_2 = 2\pi \int_0^\infty P(2, \bar{n}(b))\, b\, db \quad ,$$

$$\Phi_n = 2\pi \int_0^\infty P(n, \bar{n}(b))\, b\, db$$

mentre $\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n$ sarà la sezione d'urto totale per processi di molteplicità qualunque.

I vari mesoni vengono diffusi in modo del tutto indipendente l'uno dall'altro. Siccome però tanto n che $\bar{n}(b)$ possono risultare piccoli in certi casi, si dovrà assumere per l'espressione di $P(n, \bar{n}(b))$ non la legge di Gauss, ma quella di Poisson.

$$P(n, \bar{n}(b)) = \frac{[\bar{n}(b)]^n}{n!} e^{-\bar{n}(b)}.$$

Avremo quindi in definitiva:

$$(4) \qquad \Phi_n = 2\pi \int_0^\infty \frac{[\bar{n}(b)]^n}{n!} e^{-\bar{n}(b)} b\, db$$

che per $n = 1$ ed $\bar{n}(b) < 1$ tende alla solita formula usata anche da Heitler. La sezione d'urto totale risulta

$$\Phi = 2\pi \int_0^\infty (1 - e^{-\bar{n}(b)})\, b\, db.$$

A titolo d'esempio, abbiamo applicato lo schema di teoria precedente ad un campo mesonico vettoriale longitudinale nel sistema di riferimento associato al protone incidente. Assumendo per il potenziale V del campo mesonico la nota funzione:

$$V = g \frac{e^{-\varkappa r}}{r}$$

dove g e $\varkappa$ sono la costante d'interazione e l'inverso del raggio di azione, ed applicando un procedimento identico a quello seguìto per ricavare il numero dei fotoni equivalenti ad un campo coulombiano secondo il metodo di W. W., si trova per il numero di mesoni l'espressione (6):

$$(b, k') = \frac{g^2 k'}{4\hbar^3 \gamma^2 c^3} \left[\frac{1}{\pi^2 \lambda^2} \left(I_2^2(\eta, \lambda) + \eta^2 I_1^2(\eta, \lambda) \right) \right] \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{E}{Mc^2} \quad \eta = \varkappa b \quad \lambda = \frac{k' b}{c\hbar\gamma}$$

e dove

$$5) \qquad I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\eta\sqrt{1+y^2}}}{\sqrt{1+y^2}} \cos \lambda y\, dy \quad , \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\eta\sqrt{1+y^2}}}{(1+y^2)^{3/2}} [\eta\sqrt{1+y^2} + 1] \cos \lambda y\, dy.$$

(6) Indichiamo con $\hbar$ la costante di Planck divisa per 2π.

Interessandoci dei processi multipli, sarà per ora sufficiente considerare soltanto il caso di b piccolo cioè di $\eta < 1$. È allora possibile sviluppare in serie gli esponenziali degli integrali (5) il che permette di ottenere come valore approssimato di $p(b, k')$

$$p(b, k') = \frac{g^2 k'}{4 h^3 c^3 \gamma^2}\left[\{H_1^1(i\lambda)\}^2 - \frac{i\eta}{4} H_1^1(i\lambda) H_0^1(i\lambda) - \frac{\eta^2}{16}\{H_0^1(i\lambda)\}^2\right]$$

dove $H_1^1(i\lambda)$ e $H_0^1(i\lambda)$ sono le note funzioni di Hankel.

Assumendo per le sezioni d'urto le espressioni date da H. H. P.

$$\sigma(k', k)\, dk = \frac{4\pi (hc)^2\, dk}{k'^3} \qquad k' < Mc^2$$

$$\sigma(k', k)\, dk = \frac{4\pi (hc)^2\, dk}{Mc^2 k'^2} \qquad k' > Mc^2$$

si ottiene per $\bar{n}(b)$, applicando la (1), e trascurando tutti i piccoli termini

$$\bar{n}(b) = \frac{4}{5\pi} \frac{g^2 ch}{\mu^2 c^4 b^2} \tag{6}$$

valida solamente per $b < \frac{1}{\varkappa}$.

Volendo calcolare ora le sezioni d'urto dei processi multipli, sarà sufficiente sostituire tali valori di $\bar{n}(b)$ nelle (4). Si ricava:

$$\Phi_n = \frac{8}{5} \frac{g^2 ch}{(\mu c^2)^2} \frac{1}{n!} \int_0^{\frac{\gamma a}{s}} x^{2n-3} e^{-x^2} dx \qquad \text{con} \quad a = \frac{4}{5\pi} \frac{g^2 ch}{\mu^2 c^4}. \tag{7}$$

Per $n = 1$, l'integrale diverge. Ciò dipende esclusivamente dal fatto di avere integrato le (5) in modo approssimato senza praticamente tener conto nella (6) del raggio d'azione del campo mesonico. Ci accontenteremo, per avere almeno l'ordine di grandezza di Φ_1, di troncare l'integrazione per $b \cong \frac{1}{\varkappa}$.

Volendo trattare il caso di un campo mesonico carico, sarà ancora necessario, per tener conto della conservazione della carica, di considerare come possibili tra tutti i processi multipli, solo quelli che avvengono con emissione di un uguale numero di mesoni positivi e negativi se n è pari, e con l'eccesso di un mesone positivo (e conseguente trasformazione del protone a riposo in neutrone) se n è dispari. Ciò porta a dovere moltiplicare la formula (7) per il fattore $\frac{1}{2^n}\binom{n}{\frac{n}{2}}$ nel caso di n pari e $\frac{1}{2^n}\binom{n}{\frac{n-1}{2}}$ nel caso di n dispari. Assumendo per la costante g^2 il valore dato da Möller e Rosenfeld $\sim 2{,}1 \cdot 10^{-17}$ e per $s \cong \frac{h}{Mc} \simeq 2 \cdot 10^{-14}$ cm. si ottiene la seguente tabella per le Φ_n corrispondenti ai vari processi multipli:

n	1	2	3	5	10	20
Φ_n	$1{,}5\cdot10^{-26}$	$6{,}4\cdot10^{-27}$	$1{,}6\cdot10^{-27}$	$4{,}0\cdot10^{-28}$	$7{,}0\cdot10^{-29}$	$1{,}2\cdot10^{-29}$

ed una sezione totale $\Phi = \sum_1^\infty \Phi_n$ dell'ordine di $2{,}4\cdot10^{-26}$ cm².

È interessante notare come le sezioni d'urto dei processi multipli decrescano in modo relativamente lento al crescere della molteplicità, e come la sezione totale Φ sia dell'ordine di grandezza di 10^{-26} cm².

I risultati non dipendono in modo notevole dal limite s, quando s è piccolo; il che li rende appunto sufficientemente indipendenti dal modello nucleare; per $s = 0$, i valori delle Φ_n coincidono praticamente con quelli qui riportati. Invece per $s \approx \sqrt{a} \approx 0{,}9\cdot10^{-13}$ cm. risultano già nettamente minori.

In base a questi dati risulterebbe che l'emissione di parecchi mesoni in un solo atto dovrebbe essere un processo relativamente frequente ed importante nella fisica dei raggi cosmici, il che sembra abbastanza in accordo colle esperienze di diversi autori (7).

Fisica (Ottica). — *Il teorema di Malus-Dupin generalizzato e la trasformazione dell'interferenza inversa.* Nota di G. Toraldo di Francia, presentata (*) dal Socio G. Abetti.

§ 1. – Un'onda luminosa, ovvero una congruenza normale di raggi, incida su una superficie piana Σ. Assumiamo come riferimento su tale superficie due assi cartesiani ortogonali x, y, di versori $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ rispettivamente. In ciascun punto $P(x, y)$ di Σ incide un raggio della congruenza e sia $\boldsymbol{s}$ il suo versore. Un punto qualsiasi Q di una data superficie d'onda avrà l'equazione

$$Q = P + \xi \boldsymbol{s} \tag{1}$$

essendo ξ uno scalare funzione di x e y. Poichè il raggio è ortogonale alla superficie d'onda, si avrà

$$Q_x \times \boldsymbol{s} = 0$$
$$Q_y \times \boldsymbol{s} = 0$$

e sostituendo l'espressione di Q data dalla (1) e notando che $P_x = \boldsymbol{i}$, $P_y = \boldsymbol{j}$, si trova

$$(\boldsymbol{i} + \xi_x \boldsymbol{s} + \xi \boldsymbol{s}_x) \times \boldsymbol{s} = 0$$
$$(\boldsymbol{j} + \xi_y \boldsymbol{s} + \xi \boldsymbol{s}_y) \times \boldsymbol{s} = 0$$

(7) Janossy e Rochester, « Proc. Roy, Soc. », *182*, 180 (1943); 183, 186 (1944).
(*) Nella seduta del 10 maggio 1947.

Chiamando α e β i primi due coseni direttori del raggio, si ottiene infine

$$\xi_x = -\alpha$$

$$\xi_y = -\beta$$

La condizione d'integrabilità di queste equazioni fornisce

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial \beta}{\partial x}. \tag{2}$$

È questa la condizione necessaria e sufficiente affinchè la congruenza sia normale [1].

Supponiamo ora che ciascun raggio, nell'incontrare Σ, venga deviato in una nuova direzione s' di coseni direttori α' e β' funzioni di α e β soltanto. Sia dunque

$$\begin{cases} \alpha' = \alpha'(\alpha, \beta) \\ \beta' = \beta'(\alpha, \beta). \end{cases} \tag{3}$$

Vogliamo ora trovare le più generali trasformazioni (3), che dànno ancora una congruenza normale, qualunque sia la congruenza normale incidente. Per α' e β' dovranno valere le (2). Avremo allora

$$\frac{\partial \alpha'}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \alpha'}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{\partial \beta'}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta'}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x}.$$

E per la (2)

$$\left(\frac{\partial \alpha'}{\partial \alpha} - \frac{\partial \beta'}{\partial \beta}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \alpha'}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial y} - \frac{\partial \beta'}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0.$$

Affinchè questa valga per qualunque congruenza normale incidente, dovrà essere

$$\frac{\partial \alpha'}{\partial \alpha} = \frac{\partial \beta'}{\partial \beta}$$

$$\frac{\partial \alpha'}{\partial \beta} = \frac{\partial \beta'}{\partial \alpha} = 0.$$

Queste equazioni s'integrano facilmente, ottenendosi

$$\begin{cases} n\alpha' = \alpha + a \\ n\beta' = \beta + b \end{cases} \tag{4}$$

con n, a, b, costanti.

Le (4) costituiscono una generalizzazione del teorema di Malus–Dupin per la superficie piana. Infatti per $a = b = 0$ si ha la rifrazione ordinaria.

§ 2. – Supponiamo ora che Σ sia una superficie piana diffrangente, capace cioè di alterare l'ampiezza e la fase di un'onda incidente, in funzione

(1) Vedi L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I, p. 475 (1927).

del punto P d'incidenza. Un'onda piana incidente, la cui normale abbia i primi due coseni direttori α, β, avrà su Σ l'ampiezza complessa:

$$A \exp\left[i \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y)\right]$$

con A costante.

Sulla faccia di emergenza da Σ avremo l'ampiezza complessa v_Σ

$$(5) \qquad v_\Sigma = A\,\varphi(x, y) \exp\left[i \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y)\right]$$

essendo $\varphi(x, y)$ un numero, in generale complesso, dipendente dalle proprietà di Σ. Per esempio, se Σ è una superficie opaca con aperture, è $\varphi = 0$ nelle parti opache e $\varphi = 1$ nelle aperture.

Per applicare il principio dell'interferenza inversa [2], vediamo se si può trovare un insieme di onde diffratte, tali che su Σ diano luogo all'ampiezza complessa v_Σ. La cosa riesce facilmente con un insieme di onde piane.

Infatti, se il mezzo al di là di Σ ha l'indice n rispetto al mezzo che precede, un'onda piana che si propaga nel secondo mezzo e la cui normale ha i coseni direttori α', β', ha su Σ l'ampiezza complessa

$$B \exp\left[i \frac{2\pi n}{\lambda}(\alpha' x + \beta' y)\right].$$

E un insieme di tali onde darà l'ampiezza complessa

$$\iint B(\alpha', \beta') \exp\left[i \frac{2\pi n}{\lambda}(\alpha' x + \beta' y)\right] d\alpha'\, d\beta'.$$

Affinchè questo insieme di onde sia quello generato per interferenza inversa, dovrà aversi, ricordando la (5)

$$(5) \qquad A\,\varphi(x, y) \exp\left[i \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y)\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B(\alpha', \beta') \exp\left[i \frac{2\pi n}{\lambda}(\alpha' x + \beta' y)\right] d\alpha'\, d\beta'$$

dove le integrazioni possono estendersi da $-\infty$ a $+\infty$, pur di ammettere che siano presenti onde evanescenti [3], oltre a quelle piane.

Ora, se si cambiano le variabili di integrazione α', β' nelle a, b, definite dalla trasformazione

$$(7) \qquad \begin{cases} \alpha' = \dfrac{\alpha + a}{n} \\ \beta' = \dfrac{\beta + b}{n} \end{cases}$$

(2) Vedi per esempio G. TORALDO DI FRANCIA, *Alcuni fenomeni di diffrazione trattati mediante il principio dell'interferenza inversa*, « Ottica », VII, 1942.

(3) G. TORALDO DI FRANCIA, *Le onde evanescenti nella diffrazione*. « Ottica », VIII, 1942.

la (6) diviene

$$A\varphi(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} B\left(\frac{\alpha+a}{n}, \frac{\beta+b}{n}\right) \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}(ax+by)\right] da\, db$$

Il secondo membro può essere considerato come un integrale di Fourier e si ottiene

$$(8)\quad B\left(\frac{\alpha+a}{n}, \frac{\beta+b}{n}\right) = \frac{A}{\lambda^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u,v) \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda}(au+bv)\right] du\, dv.$$

Si ha così modo di calcolare le ampiezze B delle onde piane diffrattè.

Si osservi ora che il secondo membro (8) dimostra che B dipende solo da a e b, mentre è indipendente da α e da β. Chiamando allora *onda diffratta di ordine* (a, b) quella che corrisponde a due dati valori di a e di b, potremo dire che:

L'intensità e la fase dell'onda diffratta di ordine (a, b) *non dipendono dalla direzione dell'onda incidente; ne dipendono invece i coseni di direzione* α' *e* β', *secondo le* (7).

Le (7) sono formalmente identiche alle (4) e vedremo subito che cosa ciò significhi.

§ 3. – Abbiamo studiato come vanno le cose quando sulla superficie piana diffrangente incide un'onda piana. È naturale domandarsi che cosa accade quando l'onda incidente è di forma qualsiasi. Per questo immaginiamo scomposto il fronte d'onda incidente in tanti elementi infinitesimi di superficie, ciascuno dei quali può essere considerato piano e si propaga secondo un raggio, al quale si mantiene normale, Ciascuno di questi elementi di superficie darà luogo ad un insieme di elementi diffratti con le direzioni e le ampiezze determinate dalle (7) e dalla (8).

È possibile ora pensare che tutti gli elementi diffratti di ordine (a, b) diano luogo ad una singola onda diffratta di ordine (a, b)? L'identità formale delle (4) e delle (7) ci permette di rispondere affermativamente, in quanto che, se era normale la congruenza dei raggi incidenti, sarà ancora normale la congruenza dei raggi diffratti di ordine (a, b). Anzi possiamo dire che *per una superficie piana la trasformazione dell'interferenza inversa è la più generale trasformazione che conservi la normalità delle congruenze.*

Si viene così a fondare una specie di *ottica geometrica generalizzata*, nella quale rientrerebbe anche la diffrazione. La rifrazione e la riflessione normali sarebbero un caso particolare: precisamente quello in cui tutte le onde diffratte, tranne quella di ordine (0, 0) avessero intensità nulla.

Fisica. — *Sulla misura delle lunghezze d'onda ultrasonore mediante due fasci di onde progressive*(*) Nota di A. GIACOMINI, presentata(**) dal Socio L. LOMBARDI.

1. Le determinazioni della velocità di propagazione degli ultrasuoni costituiscono un mezzo di indagine della struttura molecolare dei fluidi che ha già forniti risultati notevoli (1).

La tecnica delle misure è stata progressivamente perfezionata e vennero proposti varii metodi di misura (2); ma è certo che, sino a quando si sperimenta con liquidi trasparenti, il metodo più preciso è quello usato da Hiedemann e dai suoi collaboratori (3). Esso gode del privilegio che i risultati sono indipendenti dalla imperfezione dei sistemi ottici e richiede la misura di una sola lunghezza, dalla quale si ottengono la lunghezza d'onda e quindi la velocità, essendo per ipotesi nota la frequenza.

Il metodo presenta tuttavia un punto debole: il riflettore mobile che viene posto davanti alla sorgente ultrasonora, per ottenere le onde stazionarie, costituisce un organo assai delicato. Esso deve infatti compiere movimenti traslatori senza che venga meno il parallelismo della sua faccia anteriore con la superficie emittente del quarzo: parallelismo che bisogna assicurare con molto rigore, quando si adoperino lunghezze d'onda dell'ordine del decimo di millimetro (frequenze dell'ordine di 10 MHz).

Occorre inoltre che il riflettore sia immerso nel liquido da studiare, ma sia comandato dall'esterno; il che risulta molto disagevole, quando la vaschetta che lo contiene è a sua volta messa in un recipiente atto alla termostatazione.

Questo complesso di circostanze ci ha indotti a studiare un metodo di misura che, pur conservando i pregi notevoli di quello di Hiedemann, ne eliminasse gli inconvenienti.

2. Una soluzione assai semplice consisterebbe nell'usare, in luogo delle onde stazionarie, un sistema di onde progressive illuminate mediante sorgente stroboscopica, di frequenza eguale a quella degli ultrasuoni. Ma una tale sorgente è di difficile attuazione. Infatti le celle di Kerr male si pre-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Elettroacustica « O. M. Corbino ».

(**) Nella seduta del 10 maggio 1947.

(1) Vedasi, ad esempio: E. G. RICHARDSON, « Nature », 158, 296 (1946).

(2) Per i lavori anteriori al 1942 vedasi: L. BERGMANN, « Der Ultraschall » (VDI-Verlag, Berlin, 1942).

Lavori più recenti sono i seguenti: J. W. BALLOU, J. C. HUBBARD, « Journ. of the Acoust. Soc. Am. », *16*, 100 (1946); P. BIQUARD, G. AHIER, « Cahiers de physique », n. 15, (1943); J. K. GALT, J. R. PELLAM, « Journ. of the Acoust. Soc. Am. », *18*, 251 (1946).

(3) C. H. BACHEM, E. HIEDEMANN, H. R. ASBACH, « Z. f. Phys », *87*, 734 (1934). Vedasi anche: E. HIEDEMANN, *Ultraschallforschung* (De Gruyter, Berlino (1939).

stano per frequenze così elevate, e le cellule modulatrici ad ultrasuoni[4] implicano, per le stesse frequenze, la formazione di un'onda stazionaria, cioè non eliminano l'inconveniente che si desidera evitare.

Per cercare un'altra via si è partiti dalla osservazione che un sistema di onde stazionarie equivale alla sovrapposizione di due sistemi di onde progressive di eguale frequenza e intensità muoventi in verso opposto, e si è rilevato che, nel caso particolare che qui si considera, la equivalenza per gli effetti ottici esiste anche quando i fasci hanno assi paralleli non coincidenti[5].

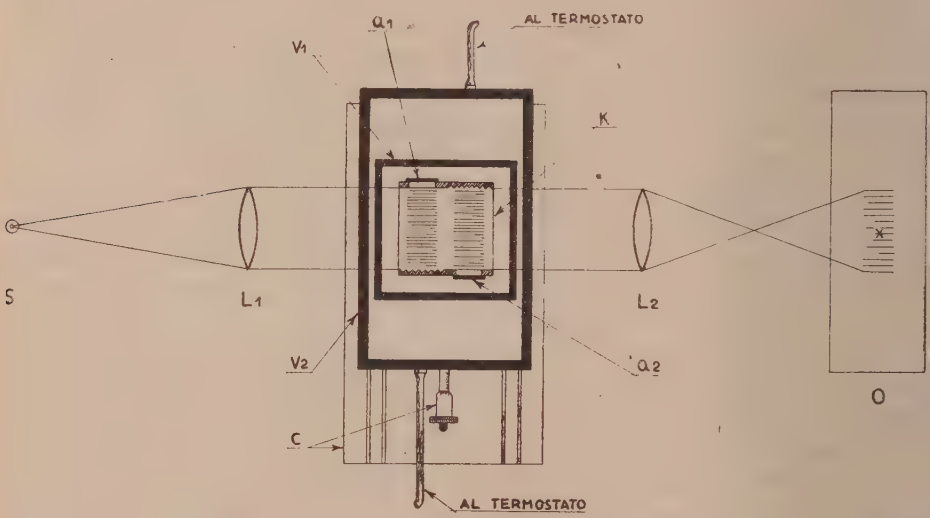


Fig. 1. – Disposizione sperimentale atta alla misura delle lunghezze d'onda ultrasonore.

Q_1, Q_2 sorgenti ultrasonore; K sostegno dei quarzi; V_1 vaschetta con il liquido da studiare; V_2 recipiente per l'acqua proveniente dal termostato; C carrello con vite micrometrica per la traslazione del complesso delle vaschette; S sorgente luminosa; L_1 lente collimatrice; L_2 obbiettivo da proiezione; O vetro smerigliato con traguardo per l'osservazione.

Abbiamo quindi ritenuto di dare una buona soluzione al problema propostoci sostituendo al quarzo emittente ed al relativo riflettore una coppia di sorgenti ultrasonore, le quali inviano, in verso opposto, due fasci di onde progressive che vengono attraversate successivamente dalla luce.

La disposizione sperimentale cui si giunge è illustrata schematicamente in fig. 1.

I quarzi sono fatti vibrare a frequenza rigorosamente eguale e con differenza di fase φ costante ($\varphi = 0$ oppure $\varphi = \pi$) perchè sono alimentati da uno stesso amplificatore a radiofrequenza.

Il parallelismo dei fasci ultrasonori o, ciò che è lo stesso, il parallelismo fra le faccie delle piastrine, è stato assicurato, una volta per tutte, appog-

(4) Vedasi, ad esempio: G. GOUDET, «C. R. Acad. Sci.», Paris, *213*, 117 (1941).
(5) R. BÄR, «Helv. Phys. Acta», *9*, 678 (1936).

giando le piastrine stesse sulle faccie opposte di un cubo metallico cavo, del quale è facile curare in officina la precisa costruzione.

La fig. 2 mostra quale forma assuma un sostegno dei quarzi attuato in base ai criteri suesposti, e destinato allo studio di liquidi isolanti. Le piastrine di quarzo, convenientemente argentate, hanno una faccia a contatto del sostegno metallico, che costituisce la massa elettrica, mentre l'altra faccia è messa in comunicazione con la tensione a radiofrequenza per il tramite di una molletta isolata.

Nella figura si vede che, alla parete situata di fronte ai quarzi, è stata data forma irregolare, in modo che la radiazione riflessa sia deviata lateralmente e non risulti quindi « visibile ». Questo artifizio non è evidentemente il solo e scogitabile, potendosi ad esempio praticare nella parete di fronte a ciascun quarzo, una finestra con sottile foglia di mica che consenta l'uscita della radiazione.

Il sostegno dei quarzi è collocato nella vaschetta di vetro riempita del liquido da studiare, e tale vaschetta viene a sua volta posta in altra più grande contenente il liquido termostatico (vedi fig. 1).

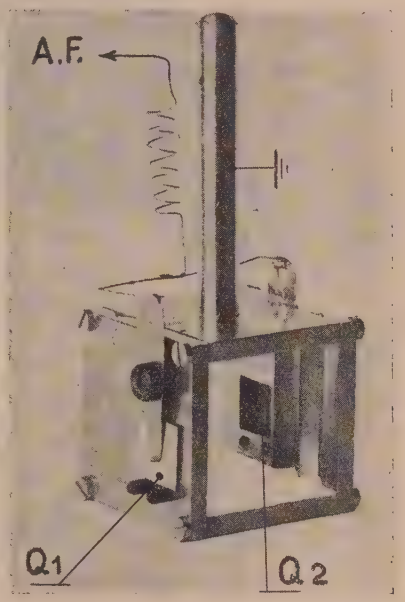


Fig. 2. – Sostegno dei quarzi atto ad assicurare il parallelismo delle loro faccie emittenti. Q_1, Q_2, piastrine di quarzo.

Qualora il liquido studiato sia conduttore, conviene assegnare allo stesso cubo metallico che sostiene i quarzi la funzione di recipiente, completandone la chiusura mediante due lastre di vetro. In tal caso il sostegno è immerso direttamente nell'acqua termostatica, e si provvede all'isolamento delle faccie posteriori delle piastrine mediante cappucci isolanti.

A complemento delle verifiche di carattere meccanico, atte ad accertare che le faccie opposte del cubo metallico sono parallele, si esegue una verifica ottica nel modo seguente. Alimentato con la tensione a radiofrequenza uno solo dei quarzi, si fa ruotare il sostegno fino a quando il fascio ultrasonoro ed il pannello luminoso che lo attraversa, sono ortogonali. Per giudicare di tale ortogonalità ci si vale delle frangie di interferenza di Lucas e Biquard, formantisi nel piano focale della lente L_2 (fig. 1): esse devono essere simmetriche rispetto alla frangia di ordine zero. Senza più muovere il sostegno, si alimenta poi da solo l'altro quarzo, e ci si accerta che anche nelle nuove condizioni le frangie di Lucas e Biquard sono simmetriche.

Per procedere alla esecuzione delle misure si invia la tensione ai quarzi in parallelo, e si osserva, come di consueto, la immagine del reticolo ultra-

sonoro, in corrispondenza di opportuno traguardo, procedendo al conteggio delle semilunghezze d'onda che lo attraversano mentre si fa compiere alla vaschetta un movimento traslatorio accuratamente misurabile.

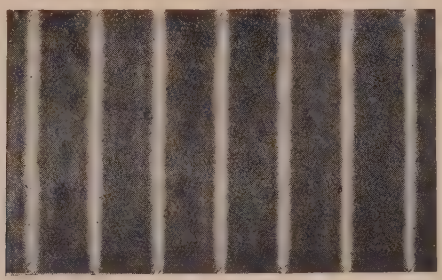


Fig. 3. – Immagine delle onde stazionarie virtuali osservabile sullo schermo O (fig. 1). Il liquido nel quale avviene la propagazione è alcool metilico, la frequenza usata è di 4 MHz.

Per dare un'idea delle immagini ottenibili durante l'applicazione del metodo di misura qui descritto – che è stato già usato con successo nel corso di precedenti ricerche [6] – si riporta in fig. 3 una fotografia ottenuta sostituendo con una lastra fotografica il vetro smerigliato normalmente adoperato per l'osservazione ad occhio nudo.

Fisica. — *Sulle frange di interferenza di Selényi.* Nota di G. Olivelli, presentata [*] dal Socio U. Panichi.

Abbiamo ripreso l'esperienza, riguardante un particolare fenomeno interferenziale, eseguita per la prima volta da Selényi nel 1911, e ripresa più tardi anche da altri [1], al fine di chiarirne alcune modalità.

Il dispositivo sperimentale da noi usato è il seguente: sulla faccia ipotenusa di un prisma a riflessione totale abbiamo lasciato cadere una goccia di una soluzione di fluoresceina, sopra la quale abbiamo poi compresso una sottile lamina di mica.

La sorgente luminosa era costituita da un arco a carbone alimentato da una corrente di 30 ampere, la cui luce veniva concentrata con un condensatore sopra un piccolo foro (qualche decimo di mm. di diametro) praticato sopra uno schermo, e poi, con un obiettivo da microscopio, sulla pellicola fluorescente (fig. 1).

(6) M. Baccaredda, A., Giacomini, « Rend. Lincei », VIII, *1*, 401 (1946).

(*) Nella seduta del 10 maggio 1947.

(1) P. Selényi, « Ann. d. Physik », *35*, 444 (1911); « Zeits. f. Physik », *108*, 401 (1938) « Phys. Rev. », *56*, 477 (1939); S. Freed and S. I. Weissmann, « Phys. Rev. », *60*, 440 (1941).

Avvicinando a uno dei cateti l'occhio accomodato all'infinito, si poteva vedere il campo visivo diviso nettamente in due parti, l'una con colorazione verde l'altra in ombra e, finchè lo spessore della pellicola era sufficentemente elevato, un luminoso sistema di frange era visibile al limite della regione chiara.

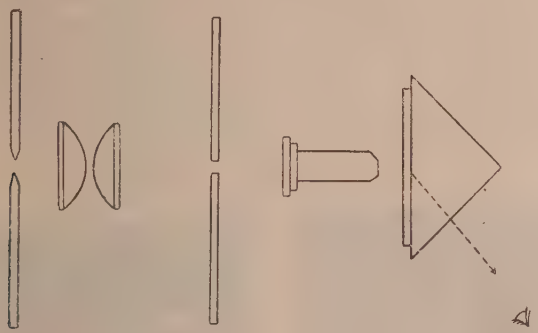


Fig. 1.

Queste frange visibili in due posizioni simmetriche rispetto allo spigolo del prisma, hanno origine nello spessore di liquido e si possono interpretare come frange di Lummer (fig. 2).

Dopo qualche ora, al diminuire dello spessore dello strato fluorescente, la separazione fra le due regioni diventava meno netta finchè scompariva.

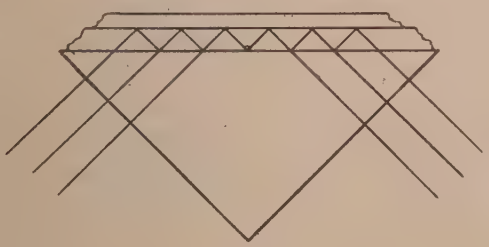


Fig. 2.

In queste condizioni, se il campo veniva osservato mediante uno spettroscopio, era visibile un doppio sistema di frange aventi l'aspetto di righe luminose equidistanti sullo sfondo della luce analizzata (fig. 3 *a*).

In seguito, ponendo davanti alla fenditura dello spettroscopio un prisma birifrangente, abbiamo potuto stabilire che i due sistemi di frange sono polarizzati in piani perpendicolari (fig. 3 *b*).

Infine, interposta fra prisma birifrangente e spettroscopio una lamina 1/4 d'onda, con lo scopo di eliminare l'azione analizzatrice dello spettroscopio, i due sistemi apparvero con uguale intensità. Inoltre la visibilità delle frange rimaneva pressochè costante per notevoli variazioni dell'angolo di osservazione.

Questo fenomeno interferenziale veniva interpretato teoricamente da Halpern e Doermann [2], i quali lo mettevano in relazione col carattere multipolare della sorgente. Riferendo le conclusioni di questi autori alle caratteristiche dei due sistemi di frange da noi osservate, si dovrebbero attribuire questi: uno a radiazione di dipolo elettrico, l'altro a radiazione di dipolo magnetico. Prescindendo dalle obiezioni di cui tale conclusione è suscettibile, ci sembra che il fenomeno possa venire interpretato semplicemente ammettendo (e vedremo in seguito come tale ipotesi si possa confermare mediante l'esperienza) che la luce che dà origine al fenomeno interferenziale non sia esclusivamente luce di fluorescenza ma luce di fluorescenza mescolata a luce diffusa.

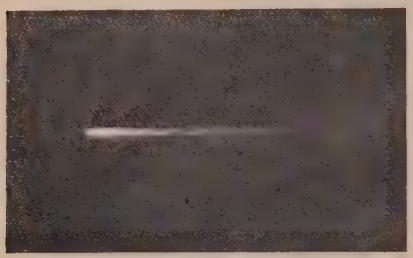


Fig. 3 *a*.

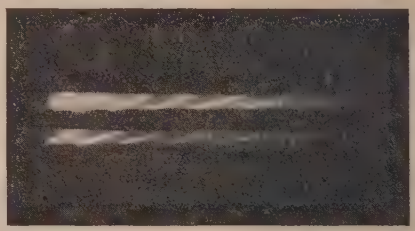


Fig. 3 *b*.

A conferma di ciò abbiamo potuto constatare che, sostituendo alla soluzione fluorescente acqua pura; le frange erano ancora visibili con tutte le loro caratteristiche immutate.

Questo risultato ci sembra già sufficiente a concludere che il fenomeno non è dovuto a luce di fluorescenza ma a luce diffusa. D'altra parte questa conclusione veniva successivamente confermata anche dalla seguente prova.

Interposta una goccia di soluzione fra le facce ipotenuse di due prismi a riflessione totale (fig. 4), abbiamo analizzato con un nicol la luce di fluorescenza lungo la direzione DD. Quando il nicol era orientato in modo da trasmettere luce polarizzata nel piano di incidenza, l'intensità della luce di fluorescenza era massima, mentre ruotando il nicol di 90° la luce diffusa prevaleva decisamente sulla luce di fluorescenza.

L'interpretazione del fenomeno interferenziale si presenta allora molto semplice.

Trattandosi di luce naturale, la vibrazione incidente è rappresentabile mediante un vettore che giace sempre nel piano d'onda, ma la cui orientazione è variabile col tempo. Questa vibrazione si può sempre immaginare come risultante di due vibrazioni incoerenti di uguale ampiezza perpendicolari fra loro. Di queste una giace nel piano di incidenza, l'altra in un piano normale.

(2) O. Halpern and Doermann, «Phys. Rev.», *52*, 937 (1937); *55*, 486 (1939); F. W. Doermann, «Phys. Rev.», *53*, 420 (1938).

Anche la luce diffusa è costituita prevalentemente da due vibrazioni aventi le direzioni delle vibrazioni incidenti (in fig. 5 le direzioni 1 e 2).

Decomponiamo la I secondo le direzioni I′ e I″. La componente I″ prosegue senza deviare nell'interno del prisma, la I′, dopo aver subìto una riflessione totale sulla superficie mica-aria, viene a interferire con la II′ dando

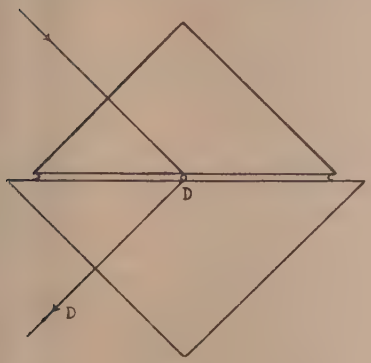


Fig. 4.

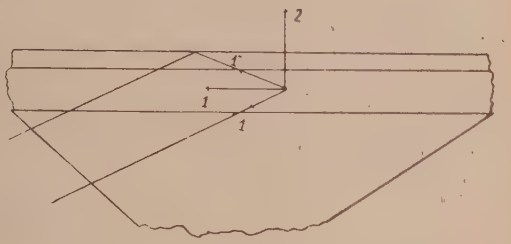


Fig. 5.

così origine a un primo sistema di frange. Il secondo sistema è originato invece dalla luce emessa nelle direzioni I′ e II′ dalla componente 2.

Il fatto che i due sistemi siano separati è dovuto alla differenza di fase che viene a determinarsi all'atto della riflessione totale fra la componente polarizzata nel piano di incidenza e quella polarizzata nel piano normale. Inoltre l'interpretazione suggerita rende conto del fatto che i due sistemi di frange presentano uguale intensità.

Fisica. — *Dispositivo per determinare il piano della vibrazione luminosa di un fascio polarizzato rettilineamente.* Nota di F. DEMICHELIS, presentata (*) dal Socio E. PERUCCA.

§ 1. Polara e Gandolfo (1) hanno descritto il fenomeno ottico presentato da un filo metallico posto tra nicol incrociati in direzione normale al fascio di raggi di luce polarizzata. Il filo appare in genere luminoso, ma, se ruota in modo che il suo azimut φ, cioè l'angolo tra esso filo e la vibrazione luminosa del nicol polarizzatore, varii da 0° a 360°, la luce proveniente dal filo si estingue per i quattro azimut: 0°, 90°, 180°, 270°.

Dunque il filo risulta oscuro, quindi invisibile tra nicol incrociati, se l'asse del filo è o parallelo o normale alla vibrazione uscente dal nicol polarizzatore. Ciò è pura conseguenza della legge della simmetria.

(*) Nella seduta dell'11 giugno 1947.

(1) V. POLARA e S. GANDOLFO, «Atti Acc. Peloritana», vol. 47, aprile 1945.

Il fenomeno è interpretato da Polara e Gandolfo sulla base della teoria elettromagnetica della riflessione e della rifrazione.

§ 2. Per fili molto sottili il fenomeno si può considerare piuttosto un caso di diffrazione–diffusione della luce da parte di un elemento diffondente che, in luogo della consueta forma sferica, generalmente trattata, ha forma cilindrica.

Fenomeno analogo e anche più vistoso, a cui contribuisce però anche la birifrangenza, si ha sostituendo il filo per esempio con un capello, in generale usando un filo dotato di Faserstruktur.

§ 3. Fenomeno analogo si osserva anche sostituendo al filo usato da Polara e Gandolfo una lastrina di vetro *ben monorifrangente* a facce piane e parallele sulla quale si incida, senza tagliare, un segno rettilineo con una punta di diamante. Il segno rettilineo funziona come il filo.

Per ottenere la massima brillanza occorre che il segno inciso dal diamante sia ben marcato, ma il vetro non deve risultare nè scheggiato nè filato. La nitidezza dei bordi della riga luminosa, osservata tra nicol incrociati, anche con forti ingrandimenti (microscopio di polarizzazione), induce a ritenere che la diffrazione–diffusione della luce sia la causa essenziale del fenomeno, e ben piccolo contributo vi porti un'eventuale birifrangenza accidentale.

§ 4. Una simile lastrina si presta ad una semplice e pur utile applicazione; essa è in grado di:

determinare il piano di vibrazione di un fascio di luce polarizzata rettilineamente; in particolare determinare il piano della vibrazione uscente da un nicol.

A tale scopo occorre montare la lastrina di vetro su una ghiera metallica; adattando questa al nicol è facile trasportare sul tubo di supporto del nicol la direzione del segno rettilineo inciso sulla lastrina.

Al nicol in istudio, agente da nicol polarizzatore, si fa seguire la lastrina incisa, indi un nicol analizzatore. Tra nicol incrociati si ruota la lastrina incisa fino a ottenere l'oscurità del tratto inciso. Così si ottiene l'azimut della vibrazione uscente dal nicol polarizzatore o l'azimut ad esso normale; per grossolana riflessione del raggio polarizzato su una lastra di vetro inclinata si può senz'altro decidere tra i due casi.

La luce diffusa dall'incisione del diamante non è molta quindi occorre un fascio di luce molto intensa per raggiungere una buona approssimazione nella determinazione del piano di vibrazione del nicol.

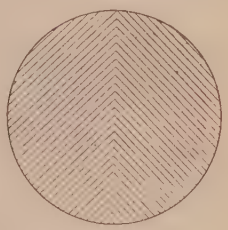
Con lampada ad arco al sodio si raggiunge un'approssimazione di $\sim 1^{\circ}$ sufficiente in tutti i casi consueti.

Il metodo classico di determinazione del piano di vibrazione di un fascio polarizzato è quello della bilamina di Bravais; questo metodo può raggiungere una precisione che non dipende tanto dalla intensità del fascio luminoso che in questo caso è di regola esuberante, quanto dall'approssimazione

con cui è stata costruita la lamina stessa, e questa non facilmente è epressa da un angolo $< 1^{\circ}$. Per approssimazione più elevata, la costruzione della bilamina di Bravais è, infatti, molto laboriosa.

§ 5. Per ovviare all'inconveniente della scarsità di luce ho sostituito all'unica incisione una serie di incisioni parallele e vicine (10 al mm.). Si ha dunque una specie di reticolo che moltiplica la luce diffusa nel campo.

Se si dispone di una buona macchina a dividere e di una buona punta di diamante (servono a questo scopo anche punte di carborundum o di widia) in modo da poter avere tratti ben uniformi quindi ugualmente brillanti, il vantaggio nell'impiego del reticolo invece che di un solo tratto è notevole.



§ 6. E viene immediatamente l'idea che, se si fosse in grado di effettuare sulla lastra di vetro due serie di incisioni secondo la figura, tra loro equivalenti agli effetti della diffrazione-diffusione, si disporrebbe di un dispositivo «a penombra» capace di aumentare l'approssimazione della determinazione come avviene per i dispositivi a penombra nella polarimetria.

Ringrazio vivamente il prof. Perucca che mi ha suggerita l'idea del presente lavoro e che mi ha seguita e aiutata nel suo sviluppo.

Fisica (Fisica Applicata). — *Sul funzionamento degli eiettori*(*). Nota di C. CODEGONE, presentata (**) dal Corrisp. G. POLVANI.

1. Le caratteristiche del moto in corrispondenza della zona in cui si effettua il trascinamento della corrente aspirata da parte del getto motore sono tuttora imperfettamente conosciute, soprattutto nel campo delle velocità iperacustiche, ed è per chiarirle che sono state istituite le indagini di cui si rende conto.

Ha servito per gli esperimenti un eiettore del tipo impiegato per l'estrazione dell'aria dai condensatori di vapore. La parte superiore della fig. 1 ne dà lo schema. Il getto di vapore esce dal tubo di efflusso di Laval avente un diametro di gola di mm. 2, e un diametro finale di mm. 5,8, aspira l'aria dall'esterno attraverso una luce tarata e la comprime nel condotto convergente-divergente, lungo mm. 201 e di mm. 20 di diametro alle estremità, il cui tratto intermedio cilindrico ha il diametro di mm. 8,5.

L'andamento della compressione è stato colto in varie condizioni fotografando un multimanometro a mercurio a tubi verticali collegato alle 11 prese di pressione statica praticate lungo una generatrice del condotto.

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisica Tecnica del Politecnico di Torino.
(**) Nella seduta del 10 maggio 1947.

Vari rilievi sono stati effettuati modificando la pressione p_1 di ammissione del getto motore e il diametro Φ_a della luce di aspirazione dell'aria, altri modificando l'angolo α di apertura del tubo di efflusso.

A titolo di esempio la fig. 1 rappresenta l'andamento dei rapporti $(p_e - p)/p_e$, funzioni delle pressioni p lungo il condotto, per il caso del funzionamento a vapore saturo e con $\Phi_a = 2$ mm.

I valori di p sono stati dedotti dalle letture delle altezze delle colonne di mercurio dopo averle corrette delle altezze delle colonne d'acqua condensata che le sovrastavano.

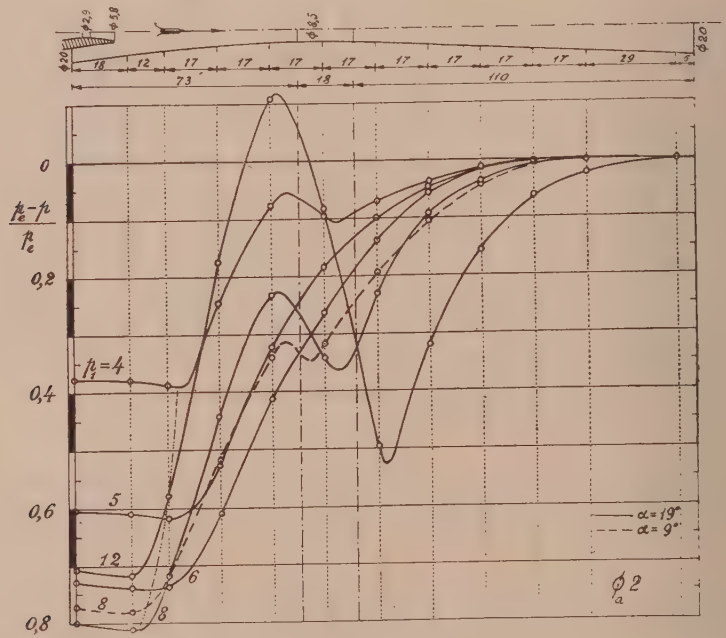


Fig. 1.

Sul grafico le p_1 sono indicate in kg/cm² effettivi, cioè sono indicate coi numeri letti direttamente ad un manometro metallico, e rappresentano in realtà le sovrapressioni rispetto alla pressione esterna p_e, che si è mantenuta durante le prove uguale a 1 kg/cm² a meno di poche unità su 10.000.

Come è nettamente visibile sulla figura la compressione ha inizio nel primo tratto del convergente conoidico e notevolmente a monte della sezione ristretta.

Il fenomeno è confermato dalle prove con altre aperture e si verifica finchè il trascinamento avviene con velocità iperacustiche.

Le ipotesi poste dal Rateau (« Revue de Mécanique », 1900-1902) e ancor oggi adottate dai trattatisti (Darling, Sim, ecc.) per il calcolo di questi apparecchi, e cioè che il convergente serva unicamente alla mescolanza delle due correnti e la compressione abbia inizio a partire dalla sezione ristretta,

appaiono ammissibili soltanto per velocità inferiori a quella del suono, mentre risultano molto lontane dal vero per velocità superiori.

Alla luce di queste esperienze dev'essere corretta anche l'impostazione data al problema dal Flügel («V. D. I.», Forschungsheft 395) seguendo una traccia del Prandtl.

L'esame della figura mostra ancora, per ciò che riguarda lo svolgimento ulteriore del fenomeno, che la compressione procede in modo regolare per talune condizioni, per altre invece in prossimità dell'imbocco del tratto cilindrico la curva si inflette bruscamente e solo verso il termine dello stesso tratto riprende a crescere fino ad assumere alla fine del divergente il valore che corrisponde alla pressione esterna.

L'inflessione è da attribuire al prodursi di onde d'urto che provocano una contrazione della vena fluida ed il suo distacco dalle pareti.

All'aumentare della pressione p_1 la sezione di inizio della compressione si sposta verso l'imbocco e si possono produrre nel condotto delle sovrapressioni rispetto all'ambiente (come ad esempio mostra la fig. 1 per $p_1 = 12$), sovrapressioni che si vanno poi estendendo a zone sempre più ampie del convergente e giungono fino ad occuparlo interamente.

Siamo allora ai limiti di funzionamento dell'eiettore, perchè crescendo ancora p_1 il funzionamento si inverte e dalla luce di aspirazione esce parte del fluido motore.

Ciò ha dato luogo a inconvenienti nell'impiego del multimanometro perchè le colonne di questo comunicavano con un solo collettore.

Quando le sovrapressioni erano tali che risultava superato il tratto disponibile al disotto della linea di zero il mercurio era cacciato dai tubi in sovrapressione e spinto tumultuosamente negli altri.

Pertanto a pressioni elevate il completamento delle prove richiese di interrompere il collegamento coll'eiettore dei tubi manometrici in sovrapressione.

2. L'angolo α di apertura di 19° si è dimostrato più conveniente di quello di 9° dal punto di vista della regolarità della compressione, mentre questo ultimo è risultato atto a produrre maggiori depressioni con piccole portate di aspirazione.

Queste maggiori depressioni sono però accompagnate da una minore stabilità di funzionamento, rivelata sperimentalmente da oscillazioni ai tubi manometrici e graficamente dall'andamento delle curve caratteristiche tracciate sulla fig. 2. In essa p_2 rappresenta la pressione assoluta di aspirazione ed η un coefficiente calcolato mediante l'espressione:

$$(1) \qquad \frac{G_a/G_v}{[(G_a/G_v)+1]^2}$$

che rappresenta il rapporto fra l'energia utile, posta uguale all'energia cinetica impressa all'aria all'inizio della compressione, e l'energia spesa, cioè l'energia cinetica di efflusso del vapore.

Nell'espressione (1) G_v, G_a rappresentano le portate in peso rispettivamente del vapore e dell'aria.

Le curve caratteristiche si intrecciano in vicinanza dell'asse delle ascisse, cosicchè il maggior valore ottenibile della portata aspirata corrisponde ad un valore della pressione di ammissione del vapore (6 circa nel caso in esame) intermedio fra quelli corrispondenti a funzionamenti possibili dell'apparecchio.

Non risulta che questo regresso delle curve al di là di un valore limite delle pressioni sia stato finora messo in evidenza.

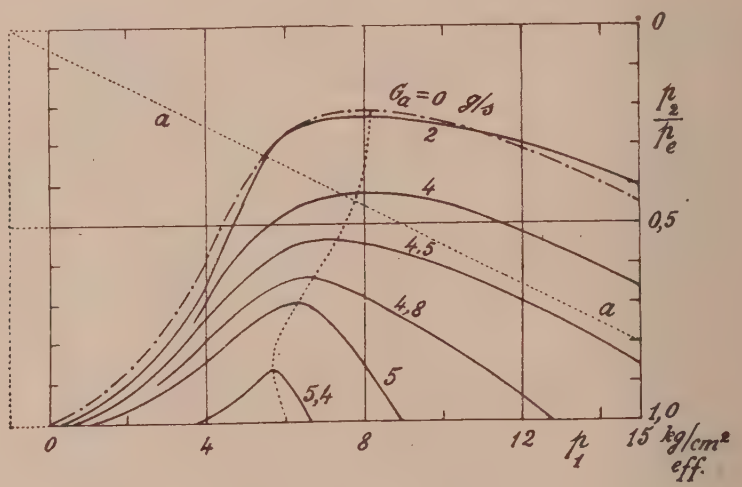


Fig. 2.

3. Coordinando i risultati ottenuti con varie pressioni di ammissione del getto motore e con varie portate di aria aspirata si ottengono dei dati che permettono di tracciare le curve segnate sulla fig. 3, costruita per $\alpha = 19^0$ e per il funzionamento a vapore saturo.

La figura mostra che ad ogni valore della portata aspirata corrispondono due valori estremi di p_1 fra i quali è possibile il funzionamento dell'eiettore con quella portata.

Al disotto del valore minore l'apparecchio non è in grado di aspirare la portata indicata, al di sopra soffia invece di aspirare. Fra questi estremi, la depressione va crescendo fino ad un massimo; questi punti di massimo sono stati collegati con una punteggiata che interseca l'asse delle ascisse in un punto che corrisponde al più grande valore ottenibile della portata aspirata (circa 5,5 g/s nel caso in esame).

La retta *aa* tracciata sul grafico corrisponde al rapporto di espansione 0,05 al quale, nel caso del vapore saturo, è proporzionato il tubo di efflusso impiegato in queste prove e per il quale quindi il getto motore non subisce alcun disturbo.

I punti appartenenti al campo di funzionamento dell'eiettore situati al disopra di questa retta corrispondono a condizioni di espansione incompleta nel tubo di efflusso; i punti al disotto della *aa* corrispondono invece ad espansioni eccessive nel tubo stesso.

Nel primo caso si producono i noti fenomeni oscillatori rivelati dal Prandtl, corrispondenti a successive dilatazioni e contrazioni della vena libera; nel secondo caso si producono onde d'urto nel tratto divergente del tubo di efflusso.

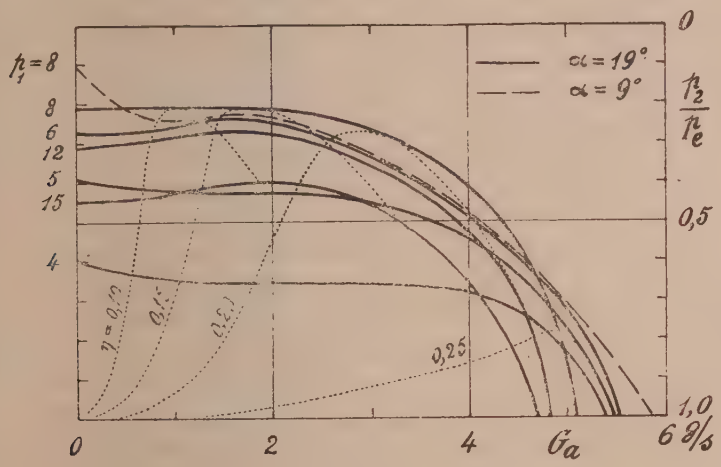


Fig. 3.

L'espansione è allora accompagnata da maggiori perdite di energia e da disturbi nel moto, rivelati da rumori secchi e acuti, simili ad una rapida successione di piccole esplosioni.

Per valori di G_a compresi fra 0 e 4 g/s, circa, le condizioni più convenienti si sono verificate per p_1 intorno a 8 kg/cm², che è appunto la pressione di funzionamento normale dell'eiettore; per il più grande dei valori indicati di G_a si è anche prossimi alle condizioni ottime di funzionamento del tubo di efflusso.

Il diagramma è stato interrotto in corrispondenza di 15 kg/cm² eff., che era la massima pressione disponibile del vapore.

Sono in corso prove con aria compressa che hanno finora confermato l'andamento del fenomeno messo in luce col funzionamento a vapore.

4. Una correlazione analitica dei risultati sperimentali urta contro due ordini di difficoltà.

Anzitutto l'incertezza delle ipotesi da porre a base dei calcoli, in secondo luogo la complessità dell'equazione di stato e delle leggi termodinamiche alle quali obbediscono le trasformazioni sia del vapore sia della miscela vapore–aria.

Scartata perchè contraria all'esperienza l'ipotesi che tutto il convergente sia la sede di una operazione di mescolanza a pressione costante, si presenta anzitutto il quesito di verificare la posizione della sezione di inizio della compressione. Ma per impostare il problema bisogna fare delle ammissioni sullo stato dei fluidi in tale sezione.

Pare probabile che la parte periferica costituita dal fluido trascinato e la parte interna motrice, ancora imperfettamente mescolate, vi si muovano lasciando sussistere squilibri di temperatura e di pressione e forti gradienti radiali di velocità.

Le ordinarie equazioni di bilancio di energie o di masse o di quantità di moto applicate globalmente fra varie sezioni non permettono di definire la distribuzione trasversale di queste grandezze, distribuzione che pure è la determinante essenziale del fenomeno di trascinamento e che solo non facili indagini ulteriori potrebbero chiarire, avviando il problema a soluzioni rigorose.

Dal punto di vista applicativo può risultare conveniente di limitarsi a soluzioni di prima approssimazione, fondate sulla considerazione di condizioni medie regnanti nella sezione di inizio della compressione.

Tali condizioni medie sono da ricercare applicando le sopradette equazioni fino a tale sezione, di cui l'area sia assunta come incognita, e valendosi dell'impiego dei diagrammi entropici e degli artifici grafici suggeriti dal Fanno e dallo Stodola per lo studio delle trasformazioni con onde d'urto.

Come ho potuto constatare nei casi in esame, l'approssimazione che si consegue con questo procedimento di calcolo è grossolana, poichè l'ordine di grandezza degli errori possibili può salire al 10 %, tuttavia essa segna un notevole progresso nel corretto proporzionamento di questi apparecchi, pei quali la teoria così semplificata dà anche ragione dello spostarsi della sezione suindicata verso l'ingresso al crescere della velocità del getto motore.

È sulla base della ipotesi ora enunciata che è stata scritta l'espressione (1) relativa alle perdite di energia in questa prima fase del trascinamento.

Sempre a scopo di semplificazione, la legge della compressione regolare, che ha inizio nella sezione anzidetta, può essere posta sotto la forma $pv^k = \text{cost}$, in cui l'esponente k del volume v sia ricavato dalla relazione:

$$(2) \qquad (G_a + G_v)\, p \frac{k}{k-1} = G_a p_a \frac{k_a}{k_a - 1} + G_v p_v \frac{k_v}{k_v - 1}$$

ottenuta uguagliando l'espressione del lavoro totale di compressione alla somma delle espressioni dei corrispondenti lavori di compressione isoentropica dei componenti, e cioè dell'aria (indice a) e del vapore (indice v).

La compressione si effettua in un condotto convergente–divergente a partire da una zona nella quale il numero locale del Mach è superiore all'unità. In tali condizioni quanto è già noto per il caso delle correnti omogenee basta a far comprendere l'andamento delle pressioni messo in evidenza dalla figura 1.

Elettrochimica. — *Comportamento anodico dello stagno in soluzioni alcaline*[*]. Nota II di G. Bianchi, presentata[**] dal Corrisp. O. Scarpa.

La passivazione anodica dello stagno in soluzione alcalina è accompagnata, in un largo intervallo dei valori della temperatura e della concentrazione, dal manifestarsi dei fenomeni periodici di cui ho dato relazione in una Nota precedente[1]. Ho continuato le ricerche per stabilire in quali condizioni si forma l'una o l'altra delle due forme di passività conosciute: quella corrispondente alla formazione sull'anodo di stagno della pellicola bruna opaca e quella corrispondente alla formazione delle pellicola indicata nella letteratura come color giallo ma che, più che dal colore che è molto tenue e può anche mancare in certe condizioni di esperienza, è caratterizzata dall'aspetto lattiginoso che presenta la superficie dell'anodo di stagno. Sperimentando con l'apparecchiatura già descritta con soluzioni di NaOH di diversa concentrazione, compresa tra $\frac{1}{8}$ e 4 volte normale, e a diverse temperature, comprese tra 10° e 85°C, ho trovato che lasciando precedere la elettrolisi per un tempo sufficientemente lungo dopo che si è manifestata la passività con una densità di corrente uguale o maggiore di quella critica (alla quale l'anodo di stagno è diventato passivo) si forma sempre la pellicola bruna. Interrompendo la corrente l'anodo di stagno rimane passivo. Fenomeni diversi compaiono se si riduce la densità di corrente a valori piccoli appena che l'anodo di stagno diventa passivo in modo che la pellicola che si forma su di esso non abbia il tempo di aumentare di spessore: operando in questo modo si trova che esiste una seconda densità di corrente critica corrispondente ad una tensione della cella elettrolitica di circa 2 V. Riducendo la densità di corrente anodica dal primo valore critico ad un valore superiore a questo secondo valore critico, la tensione della cella aumenta inizialmente di $0{,}2 \div 0{,}3$ V e poi si mantiene costante mentre che l'anodo di stagno, sede di un abbondante sviluppo di ossigeno, diventa color grigio opaco paragonabile a quello di un metallo sabbiato. Aumentando la densità di corrente, il colore dell'anodo diventa man mano più scuro fino a diventare bruno senza che si manifestino anomalie nella tensione: questo sta a dimostrare che la pellicola grigia opaca è della stessa natura della pellicola bruna, ma di piccolo spessore[2]. Riducendo invece la densità di corrente anodica

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Elettrochimica del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta del 12 aprile 1947.

(1) « Rend. Accademia dei Lincei » (in corso di pubblicazione).

(2) Le esperienze di Kerr già citate hanno dimostrato che lo spessore della pellicola che si forma sull'anodo di stagno passivato è tanto minore quanto più è piccola la densità di corrente e quanto più è grande la temperatura e la concentrazione della soluzione di soda caustica.

ad un valore uguale o minore del secondo valore critico, dopo un tempo tanto maggiore quanto più il valore della densità di corrente è vicino al secondo valore critico, la tensione della cella diminuisce gradualmente di circa 0,3 V, lo sviluppo di ossigeno cessa quasi totalmente e la superficie dell'anodo di stagno assume un aspetto lattiginoso. Se la densità di corrente viene ridotta a valori piccoli o se la corrente viene interrotta, scompare lo stato di passività dello stagno. I valori della densità di corrente ai quali scompare la passività si avvicinano ai valori della seconda densità di corrente critica con l'aumentare della temperatura e della concentrazione della soluzione di soda caustica, tanto che per i valori sufficientemente grandi di questi due fattori non si riesce più ad ottenere la forma di passività corrispondente

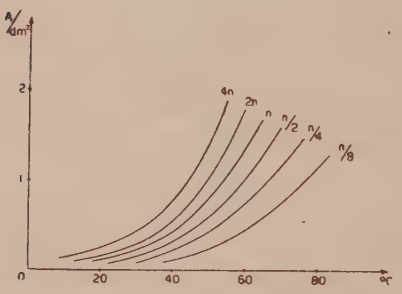


Fig. 1.

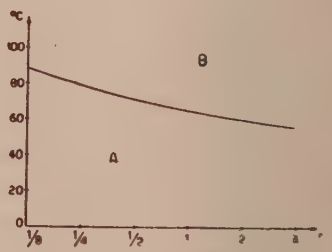


Fig. 2.

all'aspetto lattiginoso dell'anodo, ma si passa dalla forma grigia alla scomparsa della passività attraverso un periodo di instabilità nel quale non si ha sviluppo di ossigeno e nel quale la tensione subisce variazioni graduali e ripetute, ma non periodiche, di anche 1 V. Nella fig. 1 sono riportati, in funzione della temperatura e per le varie concentrazioni di soda caustica, i valori della seconda densità di corrente critica: la fig. 2 dà i valori della temperatura e della concentrazione (espressa come normalità della soluzione di NaOH) al disotto dei quali (zona A) è possibile ottenere la forma di passività corrispondente alla formazione della pellicola lattiginosa, al disopra dei quali (zona B) non è possibile ottenere questa forma perchè l'anodo perde la passività. L'analisi dei fenomeni induce a pensare che anche in questo caso si forma la pellicola gialla, che però non può sussistere essendo la sua velocità di dissoluzione nella soluzione maggiore della velocità con cui viene riformata dalla corrente.

Se l'anodo di stagno viene passivato e si lascia formare su di esso la pellicola bruna, riducendo successivamente la densità di corrente anodica ad un valore inferiore al secondo valore critico, in condizioni di temperatura e concentrazione corrispondenti alla zona A della fig. 2, dopo molto tempo (anche di qualche ora) si osserva che la pellicola bruna si stacca in piccole scaglie dall'anodo e al suo posto compare la pellicola lattiginosa fino a che tutto l'anodo ha assunto questo aspetto: la tensione della cella elettrolitica

subisce una riduzione notevole (fino a 0,6 V) per poi mantenersi costante quando tutto l'anodo ha cambiato aspetto.

TABELLA I.

Concentrazione soluzione di NaOH	Temperatura	Densità di corrente	Rendimento della dissoluzione		Reazione di dissoluzione	Aspetto anodo	Fenomeni osservati
n	°C	A/dm^2	η^{II}	η^{IV}			
1	50	1,83	100,0 %	200,0 %			
1	65	1,83	99,3	198,6	$Sn \rightarrow Sn^{++}$	metallico non passivo	—
1	80	1,83	99,3	198,6			
1	50	7,37	96,3	192,6	$Sn \rightarrow Sn^{++}$		
1	50	9,2	75,0	150,0	e	metallico (1)	Variazioni periodiche della tensione
1/2	60	1,83	94,0	188,0	$Sn \rightarrow Sn^{++}$		
1/2	60	1,83	92,5	185,0			
1	50	0,74	1,8	3,6			
1	50	1,11	1,7	3,4			
1	50	1,83	2,7	5,4	$Sn \rightarrow Sn^{++}$	bruno passivo	—
1	50	9,2	3,1	6,2			
1	50	15,0	6,5	13,0			
1	60	18,8	6,8	13,6			Distacco dall'anodo di particelle nere
1	50	0,91	38,0	76,0			
1	50	0,46	47,0	94,0	$Sn \rightarrow Sn^{++}$	lattiginoso passivo	—
1/2	60	0,92	44,0	88,0			

(1) In queste prove l'anodo veniva lentamente mosso nell'elettrolita per evitare che l'anodo diventasse passivo in causa di una polarizzazione di concentrazione.

La dissoluzione anodica dello stagno in soluzione alcalina avviene come ione stannoso quando l'anodo non è passivo, mentre che avviene come ione stannico quando l'anodo è passivo: il rendimento della dissoluzione è molto diverso quando l'anodo di stagno non è passivo e quando è passivo in una o nell'altra delle forme descritte. Di esso ho eseguito le determinazioni sperimentali raccolte nella tabella I nella quale i rendimenti η della dissoluzione sono stati calcolati per il caso in cui la dissoluzione abbia dato ioni stannosi (η'') e per il caso in cui abbia dato ioni stannici (η^{IV}): ovviamente i due valori sono uno il doppio dell'altro e un valore di $\eta^{IV} > 100$ % sta ad indicare che lo stagno si è disciolto totalmente o parzialmente come ione stannoso. Non ho determinato la quantità di stagno bivalente e tetravalente entrato in

soluzione perchè l'ossidazione prodotta dall'ossigeno atmosferico altera i risultati, limitandomi invece a determinare la quantità totale di stagno pesando l'anodo di stagno prima e dopo della prova. Nelle prove con l'anodo di stagno passivo la prima pesata è stata effettuata dopo che l'anodo aveva funzionato per un certo tempo nelle condizioni della prova che doveva esser fatta in modo che la pellicola raggiungesse uno spessore costante corrispondente a condizioni di equilibrio, e questo per evitare errori nelle pesate.

Osservando i risultati ottenuti si osserva che, quando l'anodo non è passivo e quando non esistono i fenomeni periodici che precedono la passivazione, la dissoluzione avviene come ione stannoso con un rendimento praticamente uguale al 100 %. Quando invece si manifestano i fenomeni periodici il rendimento della dissoluzione diminuisce e parte dello stagno si scioglie come ione stannico. Quando lo stagno è passivo ed è rivestito della pellicola bruna la dissoluzione avviene come ione stannico con un rendimento in corrente di pochi percento che aumenta quando la densità di corrente raggiunge valori molto grandi: infatti in queste condizioni la violenta scarica di ossigeno stacca dall'anodo per azione meccanica dei pezzettini di pellicola bruna. Infine quando l'anodo di stagno è ricoperto della pellicola lattiginosa la dissoluzione avviene totalmente come ione stannico con un rendimento in corrente che tende al 100 % al diminuire della densità di corrente.

Altri risultati delle esperienze sul comportamento anodico dello stagno in soluzione alcalina verranno comunicati in una Nota successiva.

Ringrazio il Direttore del Laboratorio, prof. Oscar Scarpa, per gli aiuti e i consigli di cui mi è stato largo durante lo svolgimento della ricerca.

Geologia. — *Struttura marginale dell'Appennino Lucano.* Nota II di R. Signorini, presentata (*) dal Corrisp. G. Checchia Rispoli.

Un resultato di particolare interesse dei miei rilevamenti è la determinazione di una grande linea di dislocazione postpliocenica e di un'adiacente striscia di terreni pliocenici che si segue lungo il margine dell'Appennino Lucano per molte diecine di chilometri e che separa la zona « A » di terreni del Miocene medio, precedentemente descritta, dalla zona « B » dell'Appennino, riferibile al Miocene inferiore-Oligocene. Tale striscia è costituita ancora dai terreni argillosi pliocenici dell'avanfossa che, dalla ruga dei terreni mesomiocenici, riscendono verso SO, con la loro formazione basale di sabbie gialle e conglomerati, mentre dal lato opposto, dell'Appennino, sono sormontati dal fronte della scaglia (zona «B») che si accavalla verso NE. Questo fronte talora ricopre le argille plioceniche stesse, tal'altra ne raddrizza e ribalta il bordo facendo apparire gli strati basali fortemente inclinati a SO per ribaltamento. Questa dislocazione così forte che implica i terreni pliocenici mostra l'intensità della ripresa del corrugamento e sollevamento posteriormente al Pliocene.

(*) Nella seduta del 12 aprile 1947.

Cominciando dalla valle dell'Agri, si ergono a nord dell'affluente Sauro i cunei o scaglie di terreni prepliocenici appenninici delle zone « B » e « C » (fig. 1). I terreni miocenici di S. Maria. di cui ho parlato prima, nella fossa

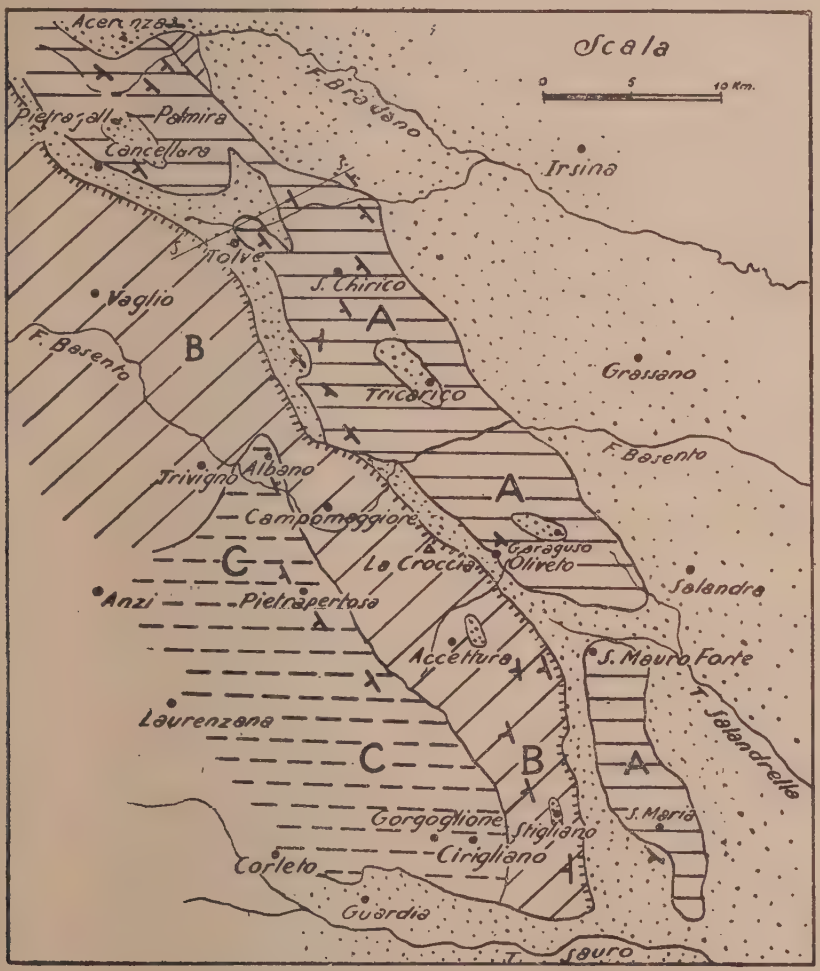


Fig. 1. – Schizzo geologico della struttura marginale dell'Appennino Lucano dal Sauro–Agri al Bradano. Scala 1 : 400.000.

Punteggiato = Argille, sabbie e conglomerati: del Pliocene.
Zona « A » = Sabbioni grigi con marne e calcari bianchicci: del Miocene medio.
Zona « B » = Arenarie gialle e biancastre; argille scistose variegate con brecciole calcaree: del Miocene inferiore–Oligocene.
Zona « C » = Arenarie grossolane grigie; argille e marne scistose straterellate con intercalazioni arenacee: del Miocene ?
S — S = Sezione geologica: fig. 2.

antistante a Stigliano, sono separati dalla prima scaglia di terreni prepliocenici appenninici su cui si erge Stigliano, mediante una striscia continua di argille plioceniche che appartengono ancora all'avanfossa (altitudine 350–500 metri). Queste costituiscono la base del grande erto versante marginale:

Serra Trifoglione m. 760, Serra di Stigliano m. 995, Monte S. Vito m. 891, Monte di Mella m. 938 e oltre. Al di sopra si sovrappongono per accavallamento i terreni più antichi che formano la suddetta cresta montana e tutta la zona «B» larga da 4 a 7 Km. Essa è tutta costituita da arenarie gialle e biancastre alla base delle quali compaiono zone di argille scistose rosse e variegate con Lepidocicline e altri foraminiferi, spesso in brecciole. Questa formazione è riferibile al Miocene inferiore e all'Oligocene. Gli strati in tutta la zona hanno una generale inclinazione ad ovest o OSO. Le masse arenacee sono separate da strette striscie di argille scistose variegate che si allungano anche per diecine di chilometri. Si tratta di una struttura a scaglie vergenti ad est e NE. Anche alla base delle arenarie di Stigliano, che si accavallano sul Pliocene, compaiono, a contatto con questo, le argille scistose rosse. La cresta su cui sorge il paese di Stigliano è coronata da un lembo di calcare conchigliare pliocenico.

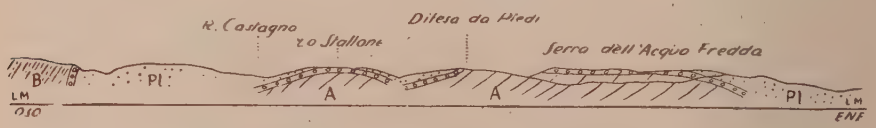


Fig. 2. – Sezione geologica della struttura marginale dell'Appennino Lucano presso Tolve. Scala 1 : 100.000

Pl = Argille plioceniche e conglomerato basale; *A* = Miocene medio; *B* = Miocene inferiore-Oligocene (vedi leggenda della fig. 1).

La stessa situazione continua verso nord, tra S. Mauro Forte donde discende il conglomerato basale verso OSO sotto alle argille plioceniche, e Fazzana dove sovrastano a queste le arenarie « B ». Dal bivio di S. Mauro Forte sulla strada Accettura – Garaguso, si trovano ancora, al margine delle arenarie della zona « B », le argille plioceniche che passano dalle Conche al versante destro della valle della Salandrella e proseguono, sempre verso NO, sulla sinistra di questa tra Oliveto e Serra Croccia. Presso Oliveto in fondo al fosso dell'Acqua del Prete gli strati di argille e sabbioni grigi con calcari bianchicci del Miocene medio, con fortissime pendenze, soggiacciono con discordanza alla formazione basale del Pliocene: strati inclinati ad OSO di conglomerati passanti superiormente a sabbie concrezionate con straterelli argillosi, indi alle argille grigie della striscia marginale. Sopra a queste, alle pendici dell'alta boscosa Serra Croccia culminante a m. 1125, vengono direttamente le argille scistose rosse alla base delle arenarie gialle e bianche della zona « B », che costituiscono la Serra stessa. Questa scaglia arenacea continua nella cresta del Garbolo che dalla Croccia scende al Basento, sempre affiancata dalla striscia di argille plioceniche (Regione il Cognato).

Oltre Campomaggiore, a nord, si ritrova la striscia di argille plioceniche nella Regione la Fontana, sotto alle argille scistose rosse smottanti (a NE di Albano), e si allunga con continuità per la Regione Madonna, Monte Cupolicchio, Masseria della Salute. Essa sta sopra, mediante la formazione basale che affiora al suo bordo NE pendente a SO, ai sabbioni grigi mesomiocenici della Regione Filiceta, la Rocchetta, Madonna delle Fonti; mentre al bordo

opposto viene a contatto con le argille scistose rosse e con le arenarie gialle della Serra dei Paimenti (Monte S. Giovanni, S. Lorenzo). Alla citata Masseria della Salute e di seguito oltre la Valle Marchiatuzzi, al margine tra le argille scistose variegate e le argille grigie plioceniche si trova interposta la formazione basale pliocenica in bancata raddrizzata o ribaltata: essa passa tra Tolve e la sua Difesa da capo, costituisce la cresta della Masseria Tamburrino che si distingue tra le formazioni argillose. È evidente la sovraspinta della scaglia marginale verso NE posteriormente al Pliocene. La striscia di argille plioceniche si trova compresa tra questa linea di sovraspinta segnata dalla bancata basale e il riaffiorare, a NE, del conglomerato basale a Tolve e poi alla Masseria Amati sopra al Miocene di Monte Moltone (zona « A »).

La formazione basale pliocenica al bordo delle argille scistose variegate « B » si segue bene anche oltre la Valle del Distacco, nella Valle di Lifo (Masseria Saracino), con evidente raddrizzamento e anche ribaltamento verso NE; prosegue sul fianco meridionale della Serra del Carpino e, oltre la Valle Cammarini sotto Cancellara, sul fianco meridionale del Piano Carletta. La striscia delle argille plioceniche (che qui è assai stretta, risollevandosi la formazione basale a NE nel paese di Cancellara, nella Difesa tra Cancellara e Pietragalla, al cimitero di Pietragalla, coll'emergere a NE degli strati arenacei mesomiocenici « A ») continua sotto le arenarie « B » di Pietragalla e le argille variegate della valle del Rosso dove affiora nelle vallecole che sui due versanti scendono presso il Molino quota 500.

In conclusione, da questa lunghissima linea di dislocazione postpliocenica si vede che il margine dell'Appennino Lucano non va abbassandosi gradatamente verso l'avanfossa come fa, dal lato opposto, l'altipiano delle Murge (avampaese), ma al contrario va accavallandosi sopra al margine di essa con una serie di cunei o scaglie vergenti a NE. Forma così un brusco rilevatissimo gradino al bordo della zona « B », costituita dalle arenarie gialle e dalle argille scistose variegate del Miocene inferiore–Oligocene, ribaltando o sormontando gli stessi strati pliocenici. Più esterna e più bassa emerge poi dai terreni pliocenici dell'avanfossa la zona « A » costituita da terreni più recenti di quelli della precedente zona « B »: sabbioni grigi con marne e calcari marnosi bianchicci con caratteristiche spalmature nerastre, del Miocene medio. L'immersione degli strati, che è generalmente verso SO, mostra che si tratta ancora di una scaglia vergente a NE. Il massimo spessore dei sedimenti pliocenici dell'avanfossa si ha così in prossimità del margine appenninico, all'esterno della zona « A ».

In relazione con l'immersione a SO del pacco di strati della zona « A », si trova a nord del Bradano, dove si ha il maggiore sollevamento, che sotto agli strati di sabbioni grigi e calcari bianchicci « A » del Miocene medio (estesi tra Forenza e Ripacandida–Ginestra) giungono ad affiorare verso NE (Forenza, Maschito, zona tra Venosa e Ginestra) formazioni analoghe a quelle della zona « B » del Miocene inferiore–Oligocene, cioè arenarie gialle e, ancora sottostanti, argille variegate con bancate di brecciole calcaree spesso piene di Nummuliti rimaneggiate da un prossimo sedimento organogeno eocenico più

o meno smantellato. Noto che queste brecciole calcaree divengono molto spesse e abbondanti verso l'avanfossa. Al contrario le soprastanti arenarie gialle presentano qui poco spessore mentre assumono grandi spessori più ad occidente, nella zona « B » dell'Appennino Lucano. Ed è logico perchè il materiale terrigeno doveva provenire dall'area interna, da SO.

Nella regione meridionale, poi, ad occidente della zona « B » Albano–Accettura-Stigliano, si distingue nettamente un'altra zona, « C », costituita da grandi bancate di arenarie grigie grossolane, talora conglomeratiche, e da zone straterellate di argille grigie e marne scistose con intercalazioni arenacee. Anche qui gli strati hanno generali pendenze verso OSO con la solita struttura a scaglie vergenti a ENE. Questa nuova zona, con tali caratteri ben determinati, si estende dalla linea Cirigliano - Pietrapertosa – Albano alla linea Corleto – Laurenzana – Anzi. Si tratta probabilmente di una facies miocenica più interna, più vicina alla costa tirrenica, rispetto alla facies della zona « A » più esterna, ove verso l'avanfossa va man mano diminuendo l'apporto detritico grossolano e vanno invece prevalendo i calcari marnosi.

Questa determinazione, qui riassunta, della serie stratigrafica affiorante e delle facies dell'Oligocene e del Miocene, la loro successione nelle distinte zone isopiche « A » « B » e « C » che ho cartograficamente delimitato, la struttura a scaglie con vergenza verso NE e con movimento avvenuto in parte tra il Miocene e il Pliocene e in parte dopo il Pliocene, i caratteri dell'orizzonte basale del Pliocene trasgressivo, l'esistenza della lunghissima linea di accavallamento postpliocenica e dell'adiacente lunghissima striscia di terreni pliocenici rimasti compresi tra la zona « A » e la zona « B », sono in conclusione i più salienti resultati, nuovi e caratteristici, di questo mio lavoro sulla struttura marginale dell'Appennino Lucano.

Geologia. — *Sul metamorfismo di due lenti carbonatiche delle Valli del Busento e dell' Jassa (Cosenza)*. Nota (*) di L. Vighi, presentata (**) dal Socio R. Fabiani.

1. Nella sua *Descrizione Geologica della Calabria* E. Cortese (1) segnala nei dintorni di Cosenza parecchie lenti carbonatiche intercalate tra gli scisti cristallini o tra le filladi.

Nel corso degli studi geologici che esegue in Calabria, sotto la direzione del prof. A. Rittmann, il Centro Studi delle Risorse Naturali dell'Italia Meridionale, sono state rilevate, oltre quelle già segnalate dal Cortese, numerose lenti calcaree metamorfiche. Tra queste, due specialmente, inter-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia Applicata e Arte Mineraria dell'Università di Napoli.

(**) Nella seduta del 10 maggio 1947.

(1) E. Cortese, *Descrizione geologica della Calabria*, Roma, 1895.

calate tra gli scisti cristallini, sono apparse meritevoli di uno studio particolare, poichè la presenza in esse di molti minerali, generati dal processo metamorfico, permette di stabilire approssimativamente il grado di metamorfismo.

Le due lenti che sono state oggetto di uno studio particolareggiato [2] affiorarono: una sulla riva sinistra del fiume Busento, a 1800 metri circa a N-NE del paese di Carolei (Cosenza); l'altra sulla riva sinistra del torrente Jassa, circa 1 km a SE di Laurignano (a sud di Cosenza). In vari punti dei due affioramenti sono stati prelevati numerosi campioni, dei quali è stato effettuato lo studio mineralogico. I risultati di tale studio, insieme alle osservazioni in loco ed alla disposizione dei minerali nei singoli campioni, permettono di trarre alcune deduzioni circa la natura dell'edotto delle lenti carbonatiche, il tipo e grado di metamorfismo e l'azione della tettonica durante e dopo il processo metamorfico.

2. Consideriamo per prima la lente del Busento. In questa, accanto ad una elevata percentuale di calcite spatica (80 %) sono presenti, diffusi in zone e talvolta concentrati in lenti, vari minerali silicati e precisamente: forsterite, tremolite, flogopite e crisotilo; si rinvengono inoltre nidi di cristalli di grafite. Le dimensioni dei cristalli sono in genere esigue (da 1 a pochi millimetri); la tremolite, in una zona ove è presente accanto a pochi cristallini allotriomorfi di calcite, presenta maggiori dimensioni, fino a 5 cm. La formazione di tutti i minerali presenti si può facilmente interpretare come dovuta a reazioni e scambi tra i minerali che probabilmente componevano l'edotto. Infatti, se questo era costituito da calcare dolomitico, più o meno ricco in alcune zone di materiali argillosi, un'azione di metamorfismo regionale poteva essere capace di dar luogo ai minerali riscontrati. La sola azione di metamorfismo regionale, però, renderebbe poco probabile la formazione di una mica fluorifera, quale è la flogopite. Il fluoro presente in tale minerale difficilmente poteva essere contenuto negli originari sedimenti ed è necessario per esso ammettere una origine esterna. Bisogna cioè supporre che tale elemento sia stato apportato da soluzioni pneumatolitiche venute in qualche modo a contatto con la lente calcarea, inclusa tra gli scisti. Una tale ipotesi è verosimile quando si osservi che gli scisti cristallini incassanti sono attraversati da numerose vene e dicchi aplitici e pegmatitici. Le soluzioni mineralizzatrici che formavano i dicchi potevano, trovandosi in vicinanza della lente calcarea, permearla ed apportarvi sensibili quantità di H_2O, con maggiori o minori quantità di quegli elementi che si prestano al trasporto gassoso. La presenza di agenti mineralizzatori spiega inoltre la presenza dei grossi cristalli di tremolite e della grafite in cristalli di dimensioni intorno al centimetro. Tra gli agenti mineralizzatori probabilmente presenti nell'edotto bisogna includere anche CO_2, che si libera in quantità notevoli durante

(2) Lo studio completo è in corso di stampa negli « Atti della Fondazione Politecnica del Mezzogiorno d'Italia », vol. III, Napoli, 1947.

le reazioni di formazione dei minerali presenti. Il crisotilo si ritrova come minerale di alterazione della flogopite, e indica una probabile azione di diaftoresi. I numerosi piani di scorrimento della calcite, secondo $(01\bar{1}2)$, sono un chiaro indice di sollecitazioni tettoniche, che la lente ha subìto dopo il metamorfismo. Azioni dinamiche durante il metamorfismo sono indicate dalla tremolite, che è un tipico *stress–mineral* (3). Ma l'azione di *stress* doveva essere localizzata in zone che particolarmente facilitavano scorrimenti locali (come la zona ricca di impurità silicee in corrispondenza della quale s'è formata la tremolite), dato che in genere la tessitura dei campioni non mostra il tipico aspetto legato ad una forte azione di *stress*.

Tutte le considerazioni precedenti circa il tipo di minerali presenti, l'azione di *stress* e la presenza di agenti mineralizzatori portano a concludere che il metamorfismo ha raggiunto il limite di passaggio fra meso e catazona, o forse i primi gradi della catazona.

3. Consideriamo adesso la lente dell'Jassa. I minerali riscontrati in essa sono: flogopite, calcite, forsterite, spinello, pumpelliyte, crisotilo, cummingtonite, un pirosseno della serie diopside–hedembergite, sillimanite, oligoclasio, dolomite ed un minerale attribuibile al gruppo delle rodoniti (4).

I campioni di questo affioramento provengono quasi tutti dalla zona di contatto con gli scisti cristallini. I minerali presenti hanno in genere dimensioni molto maggiori che non nel caso precedente, e si trovano grossi fenoblasti di spinello, dolomite e flogopite. Oltre le zone ove la roccia presenta, diffusi tra la calcite, minerali come flogopite, forsterite e spinello, in corrispondenza del contatto con gli scisti si incontrano di preferenza fasce costituite quasi essenzialmente da un solo minerale: oligoclasio, cummingtonite o diopside–hedembergite: Poichè tutto il resto della lente, costituita essenzialmente da dolomite spatica, parla in favore di originari sedimenti dolomitici più o meno ricchi localmente di materiali argillosi, la presenza di alcune zone costituite esclusivamente da anfibolo, pirosseno o plagioclasio e pochi resti di calcite, non può spiegarsi se non ammettendo un'azione di metamorfismo di contatto. In effetti, nelle zone ove sono presenti i minerali suddetti, la roccia presenta l'aspetto tipico di uno *skarn*.

L'elaborazione dei dati di osservazione permette, anche in questo caso, di decidere che la lente carbonatica proviene da un edotto dolomitico, localmente più o meno ricco di impurità silicee o argillose, sottoposto a metamorfismo regionale al quale si è localmente sovrapposta un'azione

(3) v. A. HARKER, *Metamorphism*, Methuen, London, 1939, p. 257.

(4) Tale minerale, che per molte caratteristiche ci è sembrato poter attribuire al gruppo delle rodoniti, presenta tuttavia caratteristiche tali che non rientra in nessuno dei tipi finora riscontrati tra questi minerali. Merita perciò uno studio più accurato, che mi riprometto di eseguire se nel corso della prossima campagna estiva in Calabria riuscirò a raccogliere una quantità sufficiente di materiale.

di contatto. La presenza del crisotilo e degli scorrimenti nei cristalli di calcite porta alle stesse deduzioni che valevano nel caso della lente del Busento.

4. Lo studio delle due lenti carbonatiche incluse negli scisti cristallini della zona intorno Cosenza porta a concludere che esse sono il prodotto di un metamorfismo regionale, ascrivibile, come grado, alla zona di passaggio tra la mesozona e la catazona o, meglio, ai primi stadi della catazona. Durante il metamorfismo ha agito, localmente, lo *stress*. Il metamorfismo regionale non ha però agito da solo, visto che lo studio effettuato ha portato alla conclusione che, sia per la lente del Busento che per quella dell'Jassa, la presenza della flogopite fluorifera induce a ritenere che agissero anche soluzioni mineralizzatrici. Nella lente dell'Jassa, poi, oltre la presenza del fluoro, parla in favore di un metamorfismo di contatto la presenza di minerali che si sono formati localmente per azione di metasomatosi.

Nelle zone periferiche di contatto con i gneiss incassanti, la roccia assume l'aspetto di uno *skarn*, tipico prodotto del metamorfismo di contatto. Inoltre la presenza del crisotilo, quale minerale di alterazione della forsterite, indica che dopo il metamorfismo si è avuto un fenomeno di diaftoresi; questo è accompagnato da sollecitazioni tettoniche, come è dimostrato dalla presenza della fitta rete dei piani di scorrimento formatisi nei cristalli di calcite.

Le conclusioni alle quali il presente studio ha portato, confrontate con quelle alle quali si giungerà dopo lo studio degli scisti cristallini, in cui sono intercalate queste lenti, porteranno probabilmente ad una determinazione sufficientemente precisa delle vicende subìte dalle assise metamorfiche della zona intorno Cosenza.

Geologia. — *Argillificazione del diabase e genesi di alcune argille scagliose rosse appenniniche.* Nota di E. Montanaro Gallitelli, presentata (*) dal Corrisp. G. Checchia Rispoli.

La presente Nota ha carattere puramente preliminare; i dati qui riportati fanno parte di una serie di studi in corso, e dei quali è impossibile per il momento render noti tutti i risultati parziali.

Le conclusioni di ordine paleogeografico cui lo studio delle argille scagliose a contatto con le ofioliti appenniniche mi condusse (1) – deposito gran-

(*) Nella seduta del 10 maggio 1947.

(1) E. Montanaro Gallitelli, *Per la geologia delle argille ofiolitifere appenniniche.* Nota I. *L'argilla scagliosa di Varana.* «Mem. Soc. Tosc. Sc. Nat.», vol. LII. Pisa, 1943. Id. Id. *Le due vie per lo studio dell'età e della facies delle Liguridi.* Ibid. vol. 53. Pisa, 1946.

demente profondo, ad argille del tipo di quelle dei grandi fondi attuali, in associazione con rappresentanti di magmi basici e ultrabasici – e le controversie relative a questo problema, costituirono la base per una serie di ricerche di più complesso svolgimento.

L'occasione mi venne offerta verso la fine dello scorso anno, durante un sopraluogo alla regione ofiolitifera di Rossena (Reggio Emilia).

Per ragioni di spazio devo trascurare in questa Nota una completa descrizione geologica della regione [2] e limitarmi a ciò che interessa per il caso particolare.

L'affioramento di Rossena, se non può dirsi uno dei più imponenti del nostro Appennino, è tuttavia uno dei più rappresentativi, in quanto offre un completo campionario delle classiche ofioliti, dal diabase verde a quello rosso, dalla serpentina al gabbro alla milonite granitica. Altrettanto dicasi per la massa argilloscistosa (grigia, rossa, verdastra, associata a calcari di tipo maiolica) insinuantesi nelle più anguste anfrattuosità del complesso eruttivo, che ovunque sostiene, lambisce, ricopre.

Sotto la torre della Guardiola, in una cava abbandonata di diabase, aperta a E della torre stessa, la massa diabasica, che giunge fino alla vetta senza copertura sedimentaria, è attraversata verticalmente da una lingua della stessa roccia, degenerata – mi sia permesso il termine – in un materiale triturato, a scagliette con superfici concoidi, lucide e perfettamente lisce al tatto.

Le acque meteoriche vi hanno trovato buon giuoco e si sono infiltrate, completandone l'alterazione e riducendola in basso a un colaticcio di una comune argilla rossa, tipicamente collosa, nella quale compaiono frammenti e granelli a volte microscopici di diabase verde e rosso indecomposto.

Altro caso del genere, sia pure di minore evidenza, ho potuto osservare tanto lungo il Rio Borracciana, nello sfasciume gigantesco che si addossa al bastione diabasico che scende fino a Campotrera, quanto all'ingresso della cava omonima, ove, in piena massa diabasica, a pochi metri dalla vena di datolite e prennite, si osserva un blocco diabasico trasformato completamente, anche in profondità, in materiale scaglioso, dello stesso colore della roccia incassante. Il fatto che l'azione idrica superficiale abbia una funzione puramente complementare (come nel primo caso accennato) è provato dall'assenza completa di disfacimento di questo tipo in altri punti del massiccio diabasico, come, ad esempio, dentro la cava stessa, ove una larga porzione rocciosa, malgrado un abbondante stillicidio, non presenta nemmeno superficialmente una tendenza alla argillificazione.

Un sopraluogo al complesso ofiolitico di Boccassuolo (Modena) mi ha offerto altri numerosi e ancor più imponenti esempi del graduale smembramento delle masse diabasiche.

(2) Della regione esiste del resto già un esauriente studio di M. ANELLI, *I dintorni di Rossena*. « Boll. Soc. Geol. it. », vol. XLI (1922). Roma, 1922.

Tali centri di degenerazione rappresentano la normalità nella formazione ofiolitica appenninica e sono ricordati ampiamente nella vecchia letteratura non soltanto per il diabase, ma anche per masse serpentinose [3]. È, praticamente, l'argilla steatitosa « del giacimento cuprifero di Montaione »: sono con ogni probabilità le argille che forniscono i « coppi » dell'Impruneta: sono le serpentine « scagliose » dei giacimenti cupriferi di Montecatini, i « filoni rossi » e i « filoni bianchi » degli stessi giacimenti [4] ecc.

Ora, di questa pur così abbondante casistica, non mi risulta che alcuno abbia finora tenuto conto, se non come di fatti locali, di alterazione superficiale; e che mai alcuno abbia cercato di estrapolare nel tempo e nello spazio il fenomeno, tentando di mettere in correlazione tutta una serie di innegabili sintomi percettibili ad ogni passo nella formazione ofiolitifera.

Il problema in questione è sorto appunto come l'estensione dei fatti osservati. Esiste, ed è documentabile sperimentalmente, una relazione genetica fra le ofioliti e una parte almeno degli argilloscisti? Esiste qualche elemento comparativo apprezzabile offerto dalle attuali conoscenze oceanografiche? Lo smembramento ofiolitico è soltanto un fatto locale, databile da un'epoca successiva all'emersione e al corrugamento?

In questa Nota sono per il momento considerati soltanto i rapporti fra campioni diversi di argilla scagliosa rossa e di diabase [5]; le due rocce, cioè, che per prime e con maggior risalto hanno offerto sul posto, con gli esempi sopra descritti, la possibilità di un raccordo argilla–ofioliti.

Riporto i risultati dell'analisi chimica di un campione di diabase raccolto alla cava della Guardiola, nonchè due analisi del prodotto di disfacimento del diabase stesso, la prima delle quali eseguita sul «Tout venant», contenente ancora piccoli frammenti e granuli di diabase indecomposto, la seconda previa separazione della parte argillosa fina [6].

(3) Sono grata al prof. F. Rodolico per la cortese segnalazione di notizie bibliografiche sull'argomento.

(4) B. LOTTI, *Geologia della Toscana*. «Mem. descr. Carta geol. d'Italia», vol. XIII, Roma, 1910. A p. 233 si legge: « . . . una terza specie di alterazione consiste nella decomposizione dei singoli minerali costituenti la diabase, per cui producesi una roccia argillosa–ferruginosa, costituita da silicato di allumina, silicato di magnesio e ossido di ferro, di solito esistente presso le salbande delle masse cuprifere e presso i contatti con le rocce sedimentarie . . . ». E altrove (p. 235): « Il giacimento di Monte Massi si presentò in principio diviso in due . . . Una parte di esso, incassata fra diabase e diabase e costituita principalmente da diabase rossa decomposta in pasta argillosa ferruginosa, fu detta « filone rosso » e presenta un piccolo spessore; l'altra parte, incassata fra diabase e rocce sedimentarie, e formata da un'argilla steatitosa, biancastra, proveniente da decomposizione di eufotide, fu detta « filone bianco ». Lo spessore di questa ultima varia da 30 a 100 m. ».

(5) Esistono già risultati parziali su argille verdi, che non è il caso qui di produrre.

(6) Della parte analitica, petrografica e chimico–fisica sta occupandosi da tempo P. Gallitelli, che, con interessamento di cui gli sono grata, volle accettare la mia richiesta dell'indispensabile collaborazione.

	Diabase Guardiola I	Disfac. diab. Guardiola «Tout venant» II	Argilla rossa Guardiola III
SiO_2	42,80	40,24	38,90
TiO_2	1,77	1,60	1,18
Al_2O_3	15,22	16,22	19,86
Fe_2O_3	8,78	15,10	13,41
FeO	3,02	1,04	1,05
MnO	0,11	0,15	0,13
CaO	8,12	5,24	3,70
MgO	6,56	5,70	6,77
Na_2O	5,13	1,31	0,58
K_2O	0,59	2,40	2,67
H_2O — 110°	1,34	3,56	4,96
H_2O + 110°	3,17	5,63	7,00
P_2O_5	0,22	tr.	tr.
S	—	—	—
CO_2	3,37	1,37	ass.
	99,97	99,13	99,54

Come si vede, all'alterazione del diabase si accompagna un graduale impoverimento in silice in Na_2O e in CaO, con aumento in Al_2O_3, Fe_2O_3, FeO, K_2O, mentre la percentuale di MgO rimane invariata.

La composizione chimica del prodotto più fino del disfacimento corrisponde a quella di una roccia argillosa; come appare anche dal fatto che il punto rappresentativo nel diagramma tetraedrico di Niggli cade per questa roccia in pieno campo dei sedimenti argillosi, mentre per il diabase cade entro il campo eruttivo, e per il prodotto di disfacimento «Tout venant» al margine fra il campo eruttivo e quello sedimentario [7] (Gallitelli P.).

L'identità di questi tipi di roccia è dunque dimostrata. Ciò era tuttavia grossolanamente intuibile, essendo già positivi tutti gli elementi di osservazione sul posto. Occorreva perciò rivolgere l'attenzione a masse argilloscagliose rosse *non* a contatto con diabasi.

Ho così preso in considerazione le due zone di Varana e di Castelvecchio (Modena). Sulla geologia dei dintorni di Varana ho già parlato in altro luogo [8];

(7) I valori di Niggli sono i seguenti:

	si	al	fm	c	alc	k	mg	c/fm
I	102	21,3	45,3	20,7	12,7	0,07	0,52	0,46
II	104	24,9	53,6	14,6	6,9	0,51	0,41	0,27
III	99	29,8	54,3	10	5,8	0,76	0,48	0,16

(8) Loc. cit.

di Castelvecchio sarà trattato in un lavoro di prossima pubblicazione [9]. Mi limito qui a ricordare che l'affioramento ofiolitico di Varana è esclusivamente serpentinoso: e che nella zona di Castelvecchio non affiorano che trascurabili blocchi brecciati di serpentina. Per trovare i più vicini affioramenti diabasici, occorre oggi spingersi fino a Toggiano, distante in linea d'aria da Varana e da Castelvecchio circa 19 chilometri.

Nella tabella seguente sono riportati i risultati delle analisi di due campioni di diabase rosso di Toggiano e di argille scagliose rosse di Varana e Castelvecchio. Preciso che queste due porzioni furono tratte da materiale con benthos microfossile arenaceo [10].

	Varana	Castelvecchio	Toggiano	
			Diabase rosso	Diabase variolitico
SiO_2	54,18	56,96	56,66	55,66
TiO_2	0,63	1,04	1,68	2,00
Al_2O_3	20,39	21,98	14,19	20,35
Fe_2O_3	6,47	2,87	5,44	1,76
FeO	0,79	2,40	2,45	1,83
MnO	0,02	0,02	tr.	tr.
CaO	1,60	1,54	7,50	6,70
MgO	3,10	3,09	2,46	3,91
Na_2O	1,74	1,39	5,56	5,60
K_2O	1,90	1,78	0,32	0,43
H_2O — 110°	3,80	2,12	0,12	0,10
H_2O + 110°	5,69	5,03	4,43	2,61
P_2O_5	0,17	tr.	—	—
CO_2	0,06	ass.	ass.	ass.
S	—	—	—	—
	100,54	100,20	100,81	100,95

Appare da questi dati evidente l'analogia fra la composizione chimica dei diabasi di Toggiano, e in particolare fra il diabase variolitico in via di alterazione, e le argille, se si prescinde dal maggior contenuto in Na_2O e CaO della roccia diabasica, imputabile alla presenza del plagioclasio e dei suoi prodotti di alterazione ancora contenuti nella roccia. È pure evidente il maggior contenuto in K_2O nelle argille rispetto al diabase imputabile al potere assorbente di queste verso gli ioni dotati di grande raggio.

(9) E. MONTANARO GALLITELLI, *Per la geologia delle argille ofiolitifere appenniniche. Nota III. I foraminiferi delle argille scagliose di Castelvecchio.* «Mem. Soc. Tosc. Sc. Nat.», Pisa, 1947. (In corso).

(10) È evidente anche una stretta analogia fra i materiali in esame e l'argilla rossa e la scaglia rossa cretacea analizzate da Carobbi (cfr. G. CAROBBI, R. PIERUCCINI, *Sopra i costituenti minori di alcune rocce sedimentarie di Passo delle Radici (Appennino tosco-emiliano)*. «Spectrochimica Acta», vol. II, I fasc.). Non ne riporto le analisi, non avendo ancora preso in esame la zona dal punto di vista geologico.

In attesa dei risultati del complesso di ricerche sperimentali in corso, torna opportuno ricordare qui un altro dato significativo, emergente dallo studio di Carobbi e Pieruccini citato dianzi. Sia nella scaglia rossa, sia nell'argilla rossa del Passo delle Radici, risultano sicuramente presenti, fra i costituenti minori, siderofili, cobalto, nichelio, platino e iridio, caratteristici tutti, come è noto da Goldschmidt e Peters, di rocce basiche. La loro presenza risulterebbe dunque pienamente giustificata, se messa in rapporto con quanto si è dimostrato sopra, circa il processo di argillificazione del diabase (11).

Affinchè un problema della vastità di quello ora presentato possa essere in un qualunque senso risolto, occorre una notevole serie di contributi. Comunque, i dati attuali non sembrano privi di interesse per la interpretazione geologica appenninica, e richiedono alcune considerazioni. Esse sono basate sui seguenti dati di fatto.

1° Le argille scagliose rosse di Varana e di Castelvecchio devono ritenersi derivate da una roccia eruttiva basica, nel caso particolare da un diabase. Nel corso di tale trasformazione, per la distruzione dei plagioclasi, si è avuto un impoverimento in alcali e in CaO e in SiO_2, e conseguentemente arricchimento in allumina e in ossidi di ferro, che ha portato alla risultante composizione di una roccia di tipo argilloso.

2° Queste argille ospitarono – non importa per il momento in quale epoca – una sporadica popolazione di foraminiferi arenacei.

3° Associazioni esclusive o quasi di foraminiferi arenacei si ritrovano attualmente nei grandi fondi ad argille verdi e rosse.

4° I depositi argillosi rossi dei grandi fondi sono considerati anche dalla oceanografia fisica attuale (12) come derivanti da decomposizione di rocce eruttive in prevalenza basiche, come già Murray e Wyville Thomson avevano supposto, e classificati dal Collet fra i materiali di origine eruttiva.

Non vi è quindi in questo momento ragione per escludere *a priori* la possibilità che una parte più o meno considerevole (questo lo si potrà sapere soltanto in seguito) della formazione argilloso–ofiolitifera abbia avuto la sua origine a grandissima profondità (13) non tanto per sedimentazione intesa nel senso comune del termine, quanto per un processo di trasformazione *in situ* di rocce eruttive basiche e ultrabasiche, come sembra dai dati oceanografici che si verifichi tuttora.

Ciò potrebbe anche giustificare il relativo notevole accumulo argilloso in un grande fondo, altrimenti spiegabile solo invocando i successivi accartocciamenti tettonici.

(11) Sull'argillificazione di rocce basiche vedi: Blanck, Melville, Bocht. *Die Verwitterung der Gesteine Deutschland. Verwitterung des Basaltes ecc.* «Chemie der Erde», vol. XIV, pp. 1–107, Jena, 1942; T. Tryggvason, *Ueber ein Tongestein aus Island.* « Bull. Geol. Inst. Upsala », vol. XXVIII, p. 123, Upsala, 1941.

(12) J. Rouch, *Traité de Océanographie physique.* Paris, 1943.

(13) Cfr. A. V. Peive, *Abyssal fractures in geosynclinal areas.* «Bull. Acad. d. Sciences de l'U. R. S. S.», ser. geol., n. 5, p. 45. Mosca, 1945.

Il popolamento del fondo si sarebbe verificato in un momento successivo, e cioè quando e dove il processo distruttivo delle ofioliti era già in corso; e, reciprocamente, la testimonianza dei microfossili di Varana e di Castelvecchio prova che il disfacimento del diabase dovette verificarsi quando ancora questi prodotti magmatici giacevano in profondità. Questo, assieme alle condizioni batimetriche, spiegherebbe la sporadicità del microbenthos, e il fatto che quei pochi organismi che vi abitarono scegliessero, come aree preferenziali, quelle più ossidate ad argille rosse.

Contro l'ipotesi di una grande profondità della formazione ofiolitica si invoca generalmente la presenza di calcari, quasi costantemente associati alle ofioliti [14]. A questa obiezione si può rispondere, che nel corso delle più recenti spedizioni talassografiche (*Meteor*) sono stati dragati fondi calcarei, presumibilmente di origine chimica, contenenti fino al 95-98 % di $CaCO_3$, alla profondità di oltre cinquemila metri.

Geologia. — *Intorno ai criteri di ricerca per energia geotermica* [*]. Nota di F. IPPOLITO, presentata [**] dal Corrisp. G. D'ERASMO.

1. Negli ultimi anni, precedenti lo scoppio della guerra, furono iniziate, in varie località italiane, ricerche allo scopo di rinvenire e captare vapori *fuvenili* surriscaldati, atti a fornire energia termica. L'esempio delle imponenti realizzazioni ottenute a Larderello nel corso di un secolo; la presunzione che l'Italia, ricchissima di acque termali e di manifestazioni vulcaniche recenti, fosse particolarmente favorita in sorgenti di energia geotermica; la necessità pratica sempre sentita di aumentare la nostra produzione di energia elettrica, senza ricorrere ad onerose importazioni di combustibile fossile – aprirono la via a varie intraprese industriali, tendenti a captare dal sottosuolo, mediante opportune trivellazioni, il prezioso vapore. Così, particolarmente nelle regioni vulcaniche – nei Campi Flegrei, ad Ischia, nei Colli Euganei, in Sicilia – un gran numero di ricercatori si diede a studiare le varie manifestazioni termali, a seguire in cicli pluriannuali le variazioni di temperatura delle sorgenti di acqua e di vapore, e finalmente a trivellare il suolo, talvolta fino a notevole profondità.

Tutte queste ricerche sono ispirate al concetto che in una massa magmatica in via di raffreddamento, costituente un bacino chiuso nella crosta terrestre, la tensione di vapore dei volatili disciolti nella massa fusa, aumenta allorchè la temperatura raggiunge il valore per il quale ha inizio la cristallizzazione. Questo aumento di pressione, termicamente retrogrado (ebollizione retrograda), fa sì che i vapori magmatici tendano a sfuggire ed è la causa

(14) C. BURRI e P. NIGGLI, *Die jungen Eruptivgesteine des mediterranen Orogens.* L. Hauptt. Zurich, 1945.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia Applicata e Arte Mineraria dell'Università di Napoli.

(**) Nella seduta del 10 maggio 1947.

prima dell'erompere dei magmi alla superficie terrestre, cioè, in altri termini, dei fenomeni vulcanici. Se infatti questa pressione riesce a vincere la resistenza delle rocce, costituenti il tetto del bacino magmatico, si forma un vulcano; se, all'incontro, anche in corrispondenza del suo valore massimo, raggiunta in quella fase del consolidamento magmatico detta pegmatitico–pneumatolitica, questa pressione non riesce a superare la resistenza del tetto non ha luogo alcun fenomeno vulcanico.

Naturalmente lo schema teorico di questi fenomeni, che dobbiamo alla ormai classica trattazione del Niggli, subisce numerosissime variazioni nei vari casi concreti. Anzitutto è impossibile immaginare il consolidamento magmatico in un bacino *ermeticamente* chiuso, perchè, quale che sia la natura delle rocce incassanti, è evidente che alle temperature e pressioni ivi regnanti avverrà sempre, con maggiore o minore imponenza, uno scambio chimico tra esse e la massa ignea fusa. In secondo luogo, la impermeabilità delle rocce incassanti, rispetto ai volatili che si sprigionano dal magma, non è mai assoluta; s'intende che vi potranno essere rocce più o meno permeabili, rocce che permetteranno a tutti o solo a parte dei volatili di sfuggire, ma nessuna roccia è impermeabile per i volatili magmatici, dotati di estrema mobilità; a prescindere, poi, da quelle che sono le soluzioni di continuità – fessure, fenditure, fratture, faglie, spacchi – delle rocce incassanti, che rappresentano le vie naturali attraverso le quali i gas si allontanano dal bacino.

Inoltre è lecito pensare che i vapori sfuggenti da un bacino magmatico in consolidazione, tra i quali, come è noto, è predominante quello acqueo surriscaldato, possono, nella loro ascesa verso la superficie, accumularsi in formazioni permeabili, sormontate da formazioni meno permeabili, e costituire quindi dei veri e propri « serbatoi ». In tal caso i vapori sono ivi in condizioni, diciamo pure, stazionarie di pressione e di temperatura, perchè mentre questi « accumuli » continuano ad essere alimentati dal basso, dall'afflusso di altri vapori caldi, perdono una certa quantità di vapore attraverso le rocce del loro tetto, molto meno permeabili, ma sempre tali, per quanto detto prima, da lasciar lentamente sfuggire una certa quantità di vapore. Di tal che per le ricerche in oggetto è necessario siano verificate le due condizioni seguenti:

a) l'esistenza nel sottosuolo della regione di bacini magmatici in via di avanzata consolidazione, dai quali provenga questa miscela di gas e vapori surriscaldati, tra i quali predomina H_2O (soluzione pneumatolitica);

b) l'esistenza di condizioni geologiche tali da permettere l'accumulo, sotto pressione sufficiente, di notevoli quantità di vapore.

2. Senonchè i più recenti studi, nel campo della magmalogia, permettono di dare qualche precisazione in più.

Oggi, infatti, specie in base ai dati forniti da Daly, sulla frequenza relativa delle rocce ignee[1], e agli studi di Backlund, Wegmann, Cloos e spe-

(1) R. A. Daly ha, tra gli altri, chiaramente illustrato che tra le rocce ignee di profonda consolidazione (plutoniti) vi è grande predominanza di graniti e granodioriti (Sial)

cialmente Rittmann, si può fare una differenza fondamentale tra i fenomeni tipicamente vulcanici e quelli tipicamente plutonici [2]. Il materiale dei primi proviene dal magma originario, basaltico, più o meno differenziato o anche inquinato di Sial (magmi sintettici); quello dei secondi ha all'incontro un'origine Sialica, cioè proviene dalla più o meno spinta fusione di rocce, in generale di tipo granitico. Geologicamente, i fenomeni vulcanici sono dovuti alla rapida salita, attraverso fratture profonde aperte fino in superficie (effusioni lineari) o fino ad una discontinuità tettonica o stratigrafica, ove si può formare un bacino magmatico, che ha poi il suo normale raffreddamento cui abbiamo accennato nel paragrafo precedente; i fenomeni plutonici, all'incontro, sono dovuti o alla trasformazione in sede di masse rocciose preesistenti (granitizzazione di arenarie, ad esempio) ovvero al lento sollevamento, per fenomeni isostatici, di grandi masse migmatiche, con l'intrusione verso l'alto (diapirismo) di magmi palingenici.

I primi fenomeni, quindi, sono ricollegabili alla fratturazione di vaste zone della crosta terrestre o in zone orogenetiche, prima e dopo il corrugamento ed il sollevamento, o nei cratoni; i secondi invece sono fenomeni strettamente collegati al sollevamento delle catene montuose [3]. Inoltre, e ciò ha grande interesse, a mio parere, per quanto diremo più innanzi, è noto che le masse ignee acide (di tipo granitico) formano corpi geologici di volume molto maggiore e sono molto più ricche di sostanze volatili di quelle basiche (di tipo gabbrico). Il che è attestato specialmente dal fatto che i giacimenti metalliferi, delle fasi pneumatolitiche ed idrotermali, sono in genere ricollegabili ad ammassi ignei acidi.

Concludendo quindi, possiamo senz'altro affermare che oggi non si può più fare la semplicistica classifica di rocce ignee abissiche e vulcaniche e quindi dire, ad esempio, che il magma granitico può dare nell'un caso graniti e nell'altro rioliti, ovvero che il magma gabbrico può dare gabbri e basalti; perchè, è bensì vero che ciò può accadere e che da un ammasso granitico in via di consolidazione possiamo avere estrusioni riolitiche, ma è altrettanto vero che, in generale, i fenomeni plutonici dànno preferibilmente prodotti acidi (Sialici) ed i vulcanici prodotti basici (Simatici).

3. Premesse queste considerazioni teoriche, d'altronde ben note [4], è opportuno ora soffermarsi alcun poco a riesaminare, su questi presupposti, il problema che ci interessa.

e tra le rocce ignee di consolidazione esterna (vulcaniti) una predominanza, anche più marcata, di basalti (Sima).

(2) Vedasi A. RITTMANN, *Vulcani, attività e genesi.* (E. F. S. A., Napoli, 1943); Appendice, pp. 259 e sgg.

(3) Secondo alcune teorie, anzi, il sollevamento delle catene montuose, già corrugatesi, è proprio dovuto al sollevamento isostatico delle masse granitizzate ed alla intrusione dei plutoni diapiri (vedi nota precedente).

(4) Esula dall'argomento di questa Nota riportare una estesa bibliografia; solo per dare qualche indicazione citerò: H. CLOOS e A. RITTMANN, « Geol. Rundschau », XXX, 5, (1939); A. RITTMANN, Ibidem, XXX, 1–2, (1938) e XXXIII, 7–8, 1942; R. A. DALY, *Igneous*

A me pare che la prima condizione posta nel par. 1 abbia significato ben diverso nel caso di fenomeni plutonici o nel caso di fenomeni vulcanici, sia per la quantità di volatili, molto maggiore – come ho accennato – nella prima eventualità, che per le altre caratteristiche.

Nel caso di un plutone granitico diapiro, infatti, oltre al volume maggiore e alla maggiore quantità di volatili disponibile, sia in senso relativo che assoluto, nella fase pneumatolitica, rispetto ad un laccolite vulcanico, occorre considerare specialmente il fatto che il primo, essendo in genere molto più profondo del secondo, si trova a pressione maggiore. Il che naturalmente ha un'importanza considerevole per quanto concerne utilizzazione dei vapori. Ma ancora più interessante è, a mio giudizio, la considerazione che nel primo caso, trattandosi di una massa ignea sita a notevole profondità, è più facile che le soluzioni pneumatolitiche, nella loro ascesa verso la superficie, possano trovare condizioni geologiche adatte alla formazione di accumuli. Esaminiamo, ad esempio, il caso dei soffioni boraciferi della Toscana e quello delle manifestazioni esalative dei Campi Flegrei.

Pur non essendo mai stati pubblicati dati precisi sui sondaggi, quanto fu comunicato in occasione della riunione estiva 1928 della Società Geologica Italiana [5], unitamente alle notizie generali sulla geologia della regione [6], permette di dedurre che la serie stratigrafica interessata al fenomeno, e trivellata, arriva certamente fino alla formazione calcareo–dolomitica–gessosa del Trias Superiore, che si rinviene sia tra i terreni dell'autoctono al Monte Pisano ed alle Alpi Apuane, in trasgressione sui terreni del Permico (Verrucano), sia alla base della falda toscanica [7]. Qui non interessa entrare nella questione, se, nella zona dei soffioni, questa formazione appartenga all'una o all'altra unità tettonica, ma solo far rilevare come essa sia particolarmente adatta, per i suoi caratteri litologici e tettonici e per essere sormontata dalle formazioni del Giura [8] molto meno permeabili, all'accumulo di ingenti quantità di volatili; tanto più, poi, se essa appartenga alla falda toscanica e rappresenti quindi la base di uno scorrimento. La zona dei soffioni in superficie sembra invece interessi alquanti lembi della formazione delle così dette « argille scagliose » (falda ligurica) e poi terreni della serie toscanica e dell'autoctono [9].

rocks and the depth of the earth, New York, 1933; E. RAGUIN, *Géologie du Granite*, Paris, 1946. Vedi anche F. PENTA, « Boll. Soc. Sism. It. », XXXVII, 1939 e « Periodico di Mineralogia », XI, 1, 1940; F. IPPOLITO, « Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat., s. 4, XIII, Napoli, 1945.

(5) « Boll. Soc. Geol. It. », XLVI, 1927–28, *passim* e specialmente pp. LXXXVI.

(6) Vedi B. LOTTI, *Geologia della Toscana*. « Mem. Descr. Carta Geol. d'It. », XIII, Roma, 1910.

(7) Vedi F. IPPOLITO, « Boll. Soc. Geol. It. », LXII, 1943; ibidem LXIV, 1945; « Pont. Acc. Scientiarium, Acta », X, 1945.

(8) Il Giura–Lias è rappresentato, in genere, nella parte inferiore da terreni calcarei compatti e nella superiore da scisti marnosi.

(9) Secondo i vari autori, consultati da G. B. DAL PIAZ per disegnare la sua cartina tettonica d'Italia (tav. 5 dell'*Atlante Fisico–Economico d'Italia* di G. DAINELLI, C.T.I., Milano, 1939) in questa zona della Toscana affiorerebbero soltanto terreni della falda tosca-

Tutta la regione dei soffioni boraciferi della Toscana, fa, come è noto, parte della così detta Catena Metallifera Toscana, sollevatasi in una delle prime fasi dell'orogenesi alpina, tra la fine dell'Oligocene e la fine del Miocene. Gli ammassi granitici di Gavorrano e di Campiglia, attribuiti dal Lotti al Miocene, devono essere ricollegati al sollevamento; anzi rappresentano, con ogni probabilità, delle apofisi dei plutoni diapirici di granito, alla cui intrusione è dovuto il sollevamento stesso [10].

Quindi, concludendo, benchè nella zona dei soffioni vi siano faglie ed anche sprofondamenti a carattere locale, riconosciuti dal Lotti, la regione appartiene ad un'area orogenetica sollevatasi – dopo il sovrascorrimento delle falde [11] – probabilmente nel Miocene. Per le condizioni geologiche d'assieme si deve ritenere che nel sottosuolo vi siano intrusioni di plutoni diapirici di tipo granitico [12], in avanzato stadio di consolidazione, donde provengono i vapori dei *lagoni* e dei soffioni naturali di Larderello, Castelnuovo, Sasso, Monterotondo, Lustignano, Serrazzano, Carboli, Cagnesi, Travale, ecc. Tali vapori sono poi raggiunti, o notevolmente avvicinati, con le rivellazioni nella zona dove le condizioni geologiche hanno consentito la formazione di grossi accumuli, a pressione considerevole.

Ben diverse sono le condizioni geologiche in una zona tipicamente vulcanica, per esempio nei Campi Flegrei. Qui anzitutto non si tratta di un'area orogenetica sollevata, bensì di un retroterra di una catena in sollevamento; infatti tutto il vulcanesimo tirrenico è ricollegabile alla fase di fratturazione post–orogenetica. Gli studi compiuti, tra gli altri, dal Rittmann fin dal 1930, sono giunti alla conclusione che i magmi capostipiti locali dei bacini campani sono differenziati salici del magma originario alcalibasaltico, introdottosi nelle fratture profonde, ricollegabili a loro volta all'abbassamento della Tirrenide. Localmente poi questi bacini, di non grandi dimensioni, hanno avuto una propria evoluzione, in dipendenza delle condizioni geologiche in cui ciascuno è venuto a trovarsi; talvolta, quando si è avuto assi-

nica. Chi scrive è invece più propenso a credere, sulla base degli studi eseguiti al Monte Pisano ed alle Alpi Apuane, che in varie zone, per esempio nel gruppo Monticiano–Roccastrada, questa falda presenti delle finestre in cui compare l'autoctono. Ciò specialmente perchè la gran parte degli autori stranieri ha erroneamente ritenuto o che alla base della formazione calcareo–dolomitica–gessosa del Trias Superiore (Retico, secondo LOTTI e ZACCAGNA; ma piuttosto Ladinico o Carnico) sia sempre la traccia di un ricoprimento (WIJKERSLOOTH) o che anche l'autoctono sia da ascrivere ad una falda toscanica inferiore (*toscanidi I* di TEICHMUELLER). Invece, dagli studi eseguiti dal Centro Ricerche Geominerarie dell'I. R. I., è emerso che la formazione calcareo–dolomitica–gessosa appare, con caratteri trasgressivi, sia nell'autoctono che nella falda toscanica, della quale costituisce altresì, quasi sempre, il termine inferiore, perchè è proprio nella sua natura di assumere, per la presenza del gesso e dell'anidrite, la funzione di « lubrificante » tettonico (vedi in proposito, per maggiori dettagli, oltre le mie Note avanti citate, C. E. BURCKHARDT, « Boll. Soc. Geol. It. », LXV, 1946).

(10) Vedi A. RITTMANN, *Vulcani*, già cit. Appendice; F. IPPOLITO « Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. », Ser. 4., XIII, Napoli, 1945; E. RAGUIN, op. cit. p. 114 e sgg.

(11) Avvenuto, assieme o subito dopo il corrugamento, probabilmente nell'Oligocene.

(12) Le estrusioni trachitiche quaternarie di M. Amiata, Roccastrada, ecc., sono invece ascrivibili alla fase di fratturazione postorogenetica.

milazione di calcari e calcari dolomitici, i magmi hanno avuto una evoluzione con tendenza di differenziazione tipicamente «mediterranea» (Vulcano Laziale, Roccamonfina, Vesuvio). Il chimismo dei magmi dei vari bacini locali era, in genere, alcalitrachitico fino a latitico. Quindi questi magmi erano già inizialmente notevolmente meno ricchi di sostanze volatili dei magmi granitici e di volume molto minore, rispetto ad un plutone granitico.

Inoltre la profondità di questi bacini magmatici è molto piccola. Già De Lorenzo, nel 1902 [13], calcolava che il bacino locale che alimentò l'unica eruzione esplosiva del Monte Nuovo (1538) era a profondità di qualche chilometro e forse meno. Gli studi posteriori[14] hanno mostrato che il tetto del focolaio magmatico del Vesuvio è al massimo a 5–6 chilometri di profondità (Rittmann, 1933) e che il bacino magmatico principale di Ischia è a profondità anche minore (Rittmann, 1931 e 1946). Pertanto l'espulsione dei gas avviene per ebollizione retrograda, a bassa pressione, e per distillazione, da bacini magmatici in via di avanzata cristallizzazione, ricchi di fenocristalli; laddove a Larderello, ad esempio, avviene per ebollizione retrograda, ad alta pressione, da bacini quasi completamente cristallizzati, ricchi di una soluzione pneumatolitica intergranulare.

Le condizioni geologiche locali in Campania, sono poi molto più sfavorevoli di quelle toscane per quanto concerne possibilità di accumuli. A prescindere dai vulcani attivi, come il Vesuvio, ove non è il caso di prendere in considerazione le possibilità di captare vapori per scopi industriali, per restare nel campo dei fenomeni esalativi, nei Campi Flegrei e ad Ischia, predominano dovunque, a tetto dei bacini, tufi trachitici, che, non essendo sormontati da altri terreni poco permeabili, non si prestano alla formazione di accumuli di vapori ad alta pressione. È bensì vero che non può escludersi *a priori* che localmente esistano strati di cineriti, tufiti o tufi alterati e argillificati [15] che possano permettere, al loro muro, accumuli di vapori, ma si tratterebbe pur sempre di piccole « tasche » molto localizzate e comunque mai in condizioni di pressione – per tutte le ragioni geologiche innanzi discusse – paragonabili a quelle dei fenomeni della regione di Larderello.

4. Da quanto precede, mi pare possano trarsi talune conclusioni, che tenterò così di sintetizzare. Per quanto concerne i concetti generali risulta:

a) Le più moderne concezioni geologiche e magmalogiche fanno una netta sostanziale differenza tra i fenomeni tipicamente plutonici e quelli tipicamente vulcanici.

(13) G. De Lorenzo « Atti R. Acc. Sc. Fis. e Mat. », Ser. 2, XI, Napoli, 1902.

(14) Riassunti in gran parte nel volume *Vulcani* già cit., *passim* e specie pp. 210 e sgg.

(15) Un tufo completamente argillificato, rinvenuto a m. 270 di profondità in un sondaggio eseguito per ricerca di vapori nei Campi Flegrei, fu studiato da F. Penta, « Atti Ist. Incoragg. », vol. 84, Napoli, 1941 (p. 25 dell'estratto).

b) I fenomeni plutonici, che hanno la loro sede in zone orogenetiche di corrugamento e specie di sollevamento, sono in generale dovuti a masse acide, migmatiche o palingeniche, per loro natura ricche in sostanze volatili. I fenomeni vulcanici, che hanno la loro sede in zone di fratturazione della litosfera o cratogeniche, sono in generale dovuti a masse magmatiche basiche, più o meno differenziate, per loro natura meno ricche in sostanze volatili.

c) I bacini magmatici locali sono, nel primo caso, plutoni diapirici abbastanza profondi e di grandi dimensioni; nel secondo subvulcani più superficiali e molto meno estesi.

Per quanto concerne la possibilità di sfruttamento delle soluzioni pneumatolitiche per usi industriali risulta:

d) Per le condizioni di profondità, e quindi di pressione e di temperatura, e per la costituzione, inizialmente più ricca di volatili nel caso di masse plutoniche, i fenomeni esalativi sono più favorevoli ad una utilizzazione industriale nel primo caso.

e) Per le condizioni geologiche regnanti nell'un caso e nell'altro è più facile che si possano formare accumuli, ad alta pressione ed alta temperatura, nel primo caso.

Infine, dal paragone stabilito tra una regione ove è presumibile [16] che i fenomeni siano di tipo plutonico (Larderello) ed una dove certamente sono di tipo vulcanico (Campi Flegrei), e dalla considerazione che in effetti le ricerche eseguite han dato finora risultati nemmeno paragonabili nei due casi [17]; a me pare sia lecito trarre un elemento sperimentale a conferma di quanto sopra esposto. Pertanto occorrerebbe, a mio giudizio – ove si vogliano continuare in Italia studi e ricerche in tal senso – scartare le zone tipicamente vulcaniche e soffermarsi piuttosto ad esaminare le regioni, come quelle toscane, ove è probabile esistano fenomeni di plutonismo tipico.

Ben s'intende allora come sia indispensabile far precedere – analogamente a quanto avviene in campo minerario – alla fase delle ricerche dirette con trivellazioni una fase preliminare di studi e rilievi geologici, svolti, in vista del fine pratico da conseguire, con l'intento di schiarire le caratteristiche geologiche e magmalogiche della regione. È ovvio tuttavia che l'esistenza di fenomeni esalativi o di sorgenti termali e termominerali, non palesemente collegate a fenomeni vulcanici, potrà dare un primo orientamento generale in merito.

(16) La presenza del Boro, che si ritrova per la massima parte nelle tormaline, minerali caratteristici delle pegmatiti granitiche, è ancora una conferma della tesi qui esposta.

(17) Con ciò non si vuole escludere che le zone vulcaniche possono presentare un certo interesse in merito, specie per impianti di esigua potenza che sfruttino il *salto termico* tra le acque del mare e le acque calde o i vapori a bassa pressione.

Botanica. — *Isolamento in vitro di un cloro- e di un cromocondrioma.* Nota di A. Ceruti, presentata (*) dal Socio G. Gola.

Risalgono ormai quasi a dieci anni fà le esperienze del Menke, le quali condussero alla separazione in vitro del nucleo, del citoplasma, dei cloroplasti e della membrana cellulare, ottenuta con mezzi fisico-chimici: esperienze che permisero di stabilire per la prima volta la ripartizione delle sostanze chimiche nelle principali strutture cellulari. In seguito si ebbero lavori riguardanti la composizione chimica dei cloroplasti isolati, ma nessun dato su il condrioma. A risolvere, anche solo parzialmente, tale problema io, da alcuni anni, dirigevo una serie di esperimenti, la maggior parte intesi nel ritrovamento di un materiale opportuno. E questo mi fu offerto da protalli maturi di *Ginkgo biloba* raccolti nell'autunno inoltrato e conservati durante l'inverno. Per mezzo di ripetute centrifugazioni a diversa velocità, variando la tensione superficiale, lo stato fisico-chimico colloidale e la densità delle poltiglie ottenute dai protalli, sono riuscito a separare tre tipi di condrioma e precisamente un cloro- un cromo- e un leucocondrioma, così da me denominati in base alla loro colorazione. Il cromo- e il leucocondrioma furono isolati anche con un metodo del tutto diverso, cioè per mezzo dell'ultrafiltrazione. Le singole frazioni di cloro- cromo- e leucocondrioma possono essere identificate nella loro specificità morfologica con esami microscopici e nella loro natura costituzionale con esami biochimici. Il clorocondrioma, così isolato, si presenta sotto forma di bastoncelli o di minutissimi granuli ed ha una grande affinità tintoriale per il verde Janus. In tal modo si è confermata la teoria del Guillermond sull'origine condriomale dei cloroplasti. Nel caso speciale del clorocondrioma di *Ginkgo biloba* ho potuto dimostrare che esso non è unito, o per lo meno non è saldamente unito, al reticolo submicroscopico polipeptidico del protoplasma, ma da esso è indipendente. Il cromocondrioma si presenta sotto forma quasi esclusiva di granuli, raramente di bastoncelli, assai più piccoli di quelli che costituiscono il clorocondrioma e come questi dimostrano una grande affinità per il verde Janus. Il leucocondrioma è ancora più minuto, ha le medesime proprietà tintoriali degli altri due, ma, per la scarsità in cui ho potuto ottenerlo, non mi è stato possibile eseguire su esso esami chimici. È sicuro che il leucondrioma è la formazione originale da cui derivano gli altri due, ma non è rigorosamente escluso che il clòro- e il cromocondrioma siano due differenziazioni parallele. Dagli esami chimici è risultato che il clorocondrioma è costituito da clorofilla *a* e *b*, carotenoidi, xantofilla, da un pigmento flavonico, da albumina, globulina, prolamina e da frazioni proteiche solubili in idrossido di potassio diluito o in acidi diluiti o del tutto insolubili; inoltre uniti al clorocondrioma si trovano grassi, lecitine, steridi. La compo-

(*) Nella seduta dell'11 giugno 1947.

sizione del cromocondrioma è simile, però in esso mancano completamente le due clorofile. Si è anche stabilito che il pigmento giallo è un flavone dalle seguenti caratteristiche: solubile in alcool metilico, benzina, cloroformio, alcool etilico, acetone, etere di petrolio, etere etilico ed alcool al 60 %; non è solubile in acqua neppure bollente, è solubile invece nelle soluzioni diluite bollenti di idrossido di potassio o di sodio ove si ha un viraggio del colore al rosso. Questo pigmento in soluzione cloroformica o in benzina anidra, trattato con tricloruro di antimonio, si colora in giallo oro; per presenza di acido solforico la colorazione diviene rosso sangue, in soluzione idroalcoolica, per presenza di cloruro ferrico, si ha una colorazione giallo-verdastra, e, per trattamento con acetato di rame in acido acetico, una colorazione verde diversa dal complesso clorofilla-rame. Il fatto biologico importante è che questo flavone non è disperso o sciolto nei liquidi cellulari ma è unito a strutture citologiche morfologiche. Quindi ho potuto dimostrare che tutti i pigmenti del protallo di *Ginkgo biloba* sono riuniti a quelle formazioni ben specifiche del protoplasma note con il nome complessivo di condrioma, pur trattandosi nel caso nostro di un condrioma particolarmente differenziato; ed inoltre che la clorofilla, per unirsi al condrioma, necessita sempre dei pigmenti gialli, mentre questi possono anche formarsi indipendentemente da quella. Questi tre tipi di condriona, per mantenere inalterate le loro caratteristiche morfologiche e biochimiche, necessitano di essere in relazione con i liquidi intraplasmatici; infatti qualsiasi aggiunta di altra sostanza altera più o meno le loro dimensioni ed alcuni loro stati fisico-chimici, come più volte ho constatato durante le varie manipolazioni. Perchè il condrioma si possa mantenere in condizioni simili a quelle in cui si trova nella cellula è necessaria per lo meno la presenza di alcuni sali e di globuline. La presenza della clorofilla nel clorocondrioma di *Ginkgo* è del tutto indipendente dalla luce, perchè essa si trova localizzata in maggior quantità in quelle parti che sono più profonde, e nello stesso tempo hanno la medesima costituzione citologica di quelle superficiali. La struttura del cromo- e del clorocondrioma dimostra la complessità propria della sostanza vivente e quindi in nessun modo è ammissibile un'origine per separazione dovuta ai soli fenomeni fisico-chimici finora conosciuti. Esso ha infine capacità altamente biologiche, tra le quali quella della formazione dei pigmenti.

Il lavoro originale con l'indicazione della tecnica dell'isolamento e dell'individuazione dei singoli componenti con le relative diagnosi differenziali e la discussione critica dei singoli reperti sperimentali verrà pubblicato nel prossimo volume per le onoranze al prof. G. Gola.

Fisiologia vegetale. — *Escreti fungini e mitosi cellulari* (*). Nota III di F. M. Gerola, presentata (**) dal Socio G. Gola.

Ho proseguito le ricerche, che ho già descritto nelle mie Note precedenti (1), esaminando più particolarmente alcune proprietà delle sostanze tossiche contenute nei liquidi di cultura.

Mi riferisco senz'altro a quanto ho già riportato antecedentemente sia per la tecnica delle culture, sia per il metodo delle colorazioni.

A) *Termolabilità.* – Si è ricercato innanzi tutto se i fattori tossici contenuti nei liquidi fossero termostabili. Si sono riscaldati perciò a bagnomaria i filtrati di cultura per 35 minuti a 70°, e quindi fu esaminata nel solito modo la loro azione. Il riscaldamento non ha causato alcun intorbidamento dei liquidi.

Riporto i risultati (2) sull'azione esercitata da tali filtrati sull'allungamento e sul processo mitotico delle radici di giovani piantine di frumento immerse in essi:

	24 ore		72 ore	
Contr. in H_2O	281–104–0,9 =		= 230–148–4,5 =	
A) 2376	0 – 0 – 0 =	(119– 77–0) =	124– 78–1,1 =	(250–186–1,4)
B) 1077	0 – 0 – 0 =	(0 – 0 –0) =	0 – 0 – 0 =	(0 – 0 – 0)
1064	95– 59– 0 =	(195–173–0) =	0 – 0 – 0 =	(115–107– 0)
C) 1047	197– 96– 0 =	(327–246–0) =	165–105–1,8 =	(181– 88–2,4)
1056	50– 30– 0 =	(110– 77–0) =	138– 96–0,3 =	(94– 69–0,1)

La sostanza mitoclasica dei filtrati appare essere perciò termostabile non solo, ma anche maggiormente attiva in seguito al riscaldamento. Si vede infatti che col 1064 non si hanno più mitosi dopo 72 ore, col 1056 in numero inferiore a quello ritrovato per i filtrati non trattati, col 2376 all'inizio nessuna mitosi e solo in seguito in numero limitato.

Si potrebbe supporre che la sostanza tossica sia in presenza di un'altra sostanza, termolabile, ad azione opposta.

B) *Dialisi del filtrato di cultura.* – Si è eseguita la dialisi attraverso cellofan dei liquidi di cultura. Dopo 120 ore di dialisi, il liquido rimasto nella cella ha dato i seguenti risultati:

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Padova.

(**) Nella seduta del 10 maggio 1947.

(1) F. M. Gerola, *Escreti fungini e mitosi cellulari.* « Rendic. Acc. Naz. Lincei », 1946; Id., id. Nota II. « Rendic. Acc. Naz. Lincei », 1947.

(2) In questa tabella ed in quelle successive il primo numero indica il numero totale delle mitosi, il secondo il numero delle metafasi, il terzo un punto di merito sulla crescita in lunghezza delle radici. I numeri posti tra parentesi si riferiscono ai risultati avuti con i liquidi di cultura tal quali. Ricordo che il numero 2376 corrisponde ad un *Penicilium* del gruppo *expansum*; il 1077 a un *Mucor* (*Rhizoyus*); il 1064 ad un *Mucor* del gruppo *Racemosus*; il 1047 ad un micelio rimasto sterile; il 1056 ad *Alternaria*.

	24 ore	72 ore
Contr. in H_2O	288–187–0,1	= 217–135–4
A) 2376	92– 61– 0	= 130– 83–3
B) 1077	0 – 0 – 0	= 0 – 0 –0,1
1064	16 – 12– 0	= 108– 56–0,5
C) 1047	36 – 23– 0	= 74– 37–2,3
1056	72 – 45– 0	= 146– 87–0,6

Anche mediante il processo di dialisi si ottiene un'azione più intensa dei liquidi sui nuclei dell'apice radicale. Pure in questo caso, come già per il riscaldamento, si potrebbe invece ritenere che attraverso al setto di cellofan sia dializzata la sostanza che limiterebbe l'azione tossica dei liquidi, mentre queste sostanze tossiche non passerebbero attraverso ad esso.

C. *Azione di adsorbenti.* – I filtrati di cultura vennero trattati parte con bentonite e parte con caolino per 96 ore. La miscela fu poi centrifugata, e la parte liquida fu esaminata nel solito modo. I risultati sono stati i seguenti:

Caolino:

	24 ore		72 ore	
Contr. in H_2O	310–203–0,7 =		= 285–157–3,4 =	
A) 2376	230–121– 0	= (119– 77–0)	= 345–224–1,6	= (250–186–1,4)
B) 1077	0 – 0 – 0	= (0 – 0 –0)	= 0 – 0 – 0	= (0 – 0 – 0)
1064	0 – 0 – 0	= (195–173–0)	= 0 – 0 – 0	= (115–107– 0)
C) 1047	318–144– 0	= (327–246–0)	= 284–192–1,4	= (181– 88–2,4)
1056	138– 77– 0	= (110– 77–0)	= 98– 65– 0	= (94– 69–0,1)

Bentonite:

A) 2376	254–153– 0 =	= 225–165– 1 =	
B) 1077	17– 11– 0 =	= 132–102–0,4 =	
1064	283–159–0,2 =	= 149– 89– 1 =	
C) 1047	271–132– 0 =	= 215–155–1,4 =	
1056	112– 82– 0 =	= 167–102–0,2 =	

Appare subito evidente la mancanza di azione del caolino quale adsorbente delle sostanze tossiche dei filtrati, in quanto i valori riportati corrispondono a quelli del filtrato non trattato.

La bentonite al contrario dimostra di avere un potere adsorbente notevolissimo: la parte liquida dei filtrati, trattati con bentonite, dà luogo col 2376 come i controlli, (in opposizione a tutte le altre prove più sopra riferite) ad un numero di mitosi normale e decrescente regolarmente col tempo, col 1064, dal blocco alla metafase o addirittura mitoinibizione, al ritorno alla normalità; col 1077 alla presenza di un certo numero di mitosi, e alla

scomparsa della sua forte azione carioclasica; più elevate in numero anche le cariocinesi col 1056. Da notare infine la presenza in questi due ultimi casi di un numero maggiore di mitosi dopo 72 ore di immersione nel liquido anzichè dopo 24 ore.

Il principio mitoclasico risulta pertanto fissabile dalla bentonite ed inerte rispetto al caolino: questo potrà essere un metodo per l'estrazione.

D) *Assuefazione al fattore mitoclasico.* – Se diamo uno sguardo ai risultati avuti in questa serie di esperienze e nelle precedenti sull'azione dei filtrati di cultura, possiamo notare come in complesso si passi per gradi, a seconda della concentrazione dei liquidi, dall'effetto carioclasico, a quello mitoinibitorio, a quello arrestante la mitosi alla metafase. Ad un limite di tossicità dei liquidi inferiore a quello determinante l'arresto della mitosi, e prima di ritornare a valori corrispondenti ai controlli, si ha una assuefazione delle piantine alle sostanze tossiche.

Questa assuefazione appare evidente dalla ripresa della crescita in lunghezza delle radici, dopo un primo arresto (ho già messo in evidenza la presenza, nella zona del primitivo arresto, della crescita della radice, di cellule a caratteri particolari, e cioè prive di peli radicali e che non hanno subìto alcun processo di distensione), e dalla ripresa del normale processo mitotico per frequenza e tipo di cariocinesi, dopo un primo periodo di mitonibizione o mitodepressione. Tale ultimo fatto risulta evidente dal conteggio delle mitosi: queste sono, dopo 72 ore di immersione nei liquidi, in numero superiore a quelle che si notano dopo sole 24 ore di immersione.

Vediamo così col 2376 una forte azione mitonibitoria dei liquidi concentrati, ed una assuefazione invece nelle altre prove, ad eccezione dell'esperienza con bentonite, ove, in causa della fissazione della sostanza tossica, si ha un normale svolgimento fin dall'inizio del processo mitotico. Ancora più evidente il graduale passaggio dalla carioclasi alla assuefazione delle piantine ai liquidi tossici, a seconda della concentrazione, si ha col 1077 (ed in maniera meno accentuata col 1064): solo l'azione della bentonite (con l'adsorbimento del fattore tossico) e la diluizione ad 1/2 danno la possibilità alla piantina di riprendere la crescita (numero di mitosi superiore dopo 72 ore a quello dopo sole 24 ore di immersione nei liquidi). Il 1047 normalmente inattivo, mostra solo una certa azione se concentrato o dializzato; in questi casi di limitata tossicità le mitosi sono più numerose dopo 72 ore. Col 1056 è quasi sempre presente una certa azione mitodepressiva, ma spesso la crescita delle radici può riprendere, ed in questi casi le mitosi sono in maggior numero dopo 72 ore.

Questo particolare caso di assuefazione fa pensare ad un processo immunitario corrispondente a quello messo in evidenza dalla Zoia [3] per le piantine di *Triticum* fatte germinare in estratti acquosi di *Helminthosporium*.

E) *Possibilità di escrezione delle sostanze mitoinibitrici.* – Il feltro dei miceli che avevano dato luogo alla formazione delle sostanze attive pre-

(3) A. Zoja, *L'immunità nelle piante.* «Atti Ist. Bot. Univ. Pavia», 2, ser. 3-1924.

cedentemente descritte, fu pressato in torchio a notevole pressione, per ricavarne il contenuto cellulare. Questo succo, filtrato per carta da filtro, fornì verso gli apici vegetativi i seguenti risultati.

	24 ore	72 ore
Contr. in H_2O	264–183–1,7 =	= 205–131–4,3 =
A) 2376	140– 80–0,1 = (119– 77– 0)	= 198–114–0,5 = (250–186–1,4)
B) 1077	76– 41– 0 = (0 – 0 – 0)	= 96– 53–0,1 = (0 – 0 – 0)
1064	160–128– 1 = (195–173– 0)	= 150–104–3,3 = (115–107– 0)
C) 1047	10– 8 –0,3 = (327–246– 0)	= 0 – 0 –0,5 = (181– 88–2,4)
1056	207–140– 0 = (110– 77– 0)	= 50– 36– 0 = (94– 69–0,1)

Aggiungo che nelle esperienze col 1047 dopo 72 ore molti nuclei erano in degenerazione, e così pure (in maniera però più limitata), col 1056. Col 1077 invece le radici, quantunque colpite nelle mitosi nucleari degli apici, erano in grado, dopo un primo arresto iniziale, di riprendere l'allungamento; ciò anche col 2376.

Ponendo in ordine, secondo la tossicità decrescente, i funghi considerati, si ottengono queste due serie:

Filtrato di cultura: 1077 · 1064 · 2376 · 1056 · 1047

Pressato del micelio: 1047 · 1056 · 1077 · 2376 · 1064

Appare subito evidente la non corrispondenza tra la misura dell'azione del filtrato di cultura e quella del pressato del micelio. Si può dire anzi che i risultati ottenuti siano in un certo senso opposti: nel 1077 e 1064, infatti, si ha una tossicità del pressato del micelio molto minore di quella dei filtrati tanto che era possibile, dopo un certo tempo, la ripresa della crescita delle radici immerse in essi (1077); all'incontro il pressato miceliare delle culture a liquidi inattivi o quasi, manifesta una tossicità elevata, spesso anche tale da determinare la degenerazione dei nuclei (1047 e 1056), che ho già descritto.

Le due serie più sopra riferite appaiono esattamente opposte (con l'unica eccezione del 1077 che risulta un po' spostato), tanto da far ritenere, *grosso modo*, (per i funghi da me considerati), che la somma delle tossicità degli escreti di ciascuna specie fungina e del suo contenuto plasmatico raggiunga valori circa corrispondenti. Pure essendo quindi pari la tossicità, sembrerebbe che una differenza notevole si abbia nelle capacità o meno di escrezione di tali prodotti.

Le ricerche delle quali ho riferito riflettono la possibilità di azione mitoinibitrice da parte di miceli di una serie di specie fungine o presenti nella rizosfera di piante micorriziche (*Mucor*, *Penicillium*, *Rhizoyus*), o costituenti probabilmente delle micorrize stesse (ifomiceti sterili). Ho delineato le moda-

lità ed i limiti entro i quali esse esercitano l'azione inibitrice, ed ho anche accennato ad alcune proprietà di questi principî attivi.

Oltre a questi numeri che ho considerati come stipiti tipici, ho esaminato altre forme, isolate dalla rizosfera o dalle radici di altre piante micorriziche e manifestanti azioni analoghe a quelle da me riportate.

Queste ricerche sono state eseguite anzitutto con lo scopo di studiare il meccanismo dell'azione inibitoria nei batteri, in quanto ritengo possibile ravvicinare l'azione ormai ben nota del blocco della divisione cellulare di tali organismi, alle turbe che ho descritto nel processo mitotico delle cellule delle piante superiori.

In secondo luogo io ho scelto le forme fungine da studiare, con la finalità di indagare l'importanza di tali organismi nelle normali interazioni tra essi e le radici delle piante a micorriza.

Quanto ho messo in evidenza mi permette di far rilevare alcuni fatti che possono interessare questo problema:

A) Riportandoci a quanto è ormai acquisito nello studio della micorrizia, io vorrei far rilevare alcune corrispondenze tra quanto ho riferito sulle presenti ricerche e quanto è di comune dominio nella conoscenza dei rapporti tra radici e miceli nelle micorrize ectotrofiche (nel senso di Peyronel).

1° La penetrazione del micelio solo nelle *radici corte*, « Kurzwurzel », attribuito per lo più alla maggior facilità di attacco da parte del fungo sulle radici a lento accrescimento;

2° l'assenza di peli radicali nelle micorrize ectotrofiche, considerata più come una manifestazione finalistica, avendo assunto le ife fungine una azione vicariante ai peli;

3° la forma particolare variamente ramificata di molte micorrize (*micorrize ramificate*, « Gabelmykorrhiza », e *micorrize a tubercolo*, « Knollenmykorrhiza »), ritenuta genericamente dipendente dall'attacco fungino;

4° la forma *semplice* di altre micorrize, originata, secondo l'opinione di molti autori, da una scarsa virulenza del micelio, o considerata come una fase iniziale delle altre micorrizie sopramenzionate.

Nelle radici immerse nei filtrati o nei pressati del micelio ho notato infatti le seguenti corrispondenze:

a) blocco della crescita della radice; *b*) assenza assoluta di peli radicali in particolari zone della radice; *c*) abbondante emissione di bozze radicali, anche voluminose, nelle radichette rimaste bloccate nella crescita; *d*) semplice rallentamento nella crescita delle radici immerse nei liquidi meno tossici.

B) Nelle micorrize ectotrofiche, che hanno raggiunto il loro grado finale di sviluppo, lo stabilirsi di un rapporto di immunità da parte delle cellule della pianta superiore verso la penetrazione delle ife fungine (che dopo la fase che direi di *fagomicosi* risultano localizzate negli spazi intercellulari) trova analogia con quanto ho rilevato sulla assuefazione delle radici di frumento ai liquidi tossici, assuefazione ricordante una immunità acquisita.

C) L'azione tossica nella micorrizia ectotrofica avviene in tre fasi successive: 1) fase di intossicazione escretiva, mentre il fungo è ancora esterno, nella rizosfera, ed appena esso penetra nell'ospite: 2) fase di *fagomicosi*, per la quale il contenuto fungino, indipendentemente dal fatto escretico, viene a passare nel plasma della cellula che l'ha fagocitato; 3) nuova fase di intossicazione esclusivamente di origine escretiva, quando il fungo, nel successivo equilibrio simbiotico, resta confinato negli strati radicali più esterni, tra le cellule.

Nelle micorrize endotrofiche, in dipendenza della vita intracellulare del micelio e della soppressione delle connessioni con l'esterno, la terza fase assume un carattere particolare: le cellule invase saranno soggette oltre ad una intossicazione di origine escretiva, anche alla sottrazione delle sostanze che sono assorbite come nutrimento dalle ife fungine. In queste micorrize inoltre assume un ruolo molto notevole la seconda fase (di *fagomicosi*).

Comunque in entrambi i tipi di micorrizia si verifica un assorbimento dei veleni fungini da parte della pianta ospite, con preponderanza di quelli contenuti negli escreti per le ectotrofiche, o di quelli presenti nel plasma miceliare nelle endotrofiche.

La modificazione di colorabilità e di forma dei nuclei all'atto della invasione del fungo e della *fagomicosi* sono alle volte notevoli, e possono trovare pure riscontro, in parte, con le modificazioni nucleari da me poste in evidenza.

Vi sono quindi motivi per indagare più profondamente la biologia dei funghi della rizosfera e micorrizici e per studiarne il comportamento rispetto alle piante ospiti.

Zoologia. — *Ricerche zoologiche nel Canale di Suez e dintorni.* – I. *Echinodermi.* Nota di E. TORTONESE, presentata (*) dal Socio F. SACCO.

Durante il 1944 e 1945 ripetuti, anche se non lunghi, soggiorni sulle rive del lago Timsah e del Grande Lago Amaro, attraversati dal canale di Suez, mi permisero di occuparmi dell'interessante fauna che li abita. L'estrema modestia dei mezzi a mia disposizione non mi permise ricerche molto approfondite, nè la conservazione di tutto il materiale. Gli Echinodermi, su cui qui brevemente riferisco, erano numerosissimi come individui, ma scarsi come specie: non ne riscontrai che cinque, una delle quali rappresenta però una famiglia ed un genere non ancora noti nel canale. La letteratura relativa all'echinofauna di quest'ultimo si riduce essenzialmente al lavoro di Mortensen (1), in cui sono registrate 13 specie raccolte nel canale dalla spedi-

(*) Nella seduta del 10 maggio 1947.

(1) « Trans. Zool. Soc. London », XXII, 1926, part. I, pp. 117–131.

zione inglese dell'Università di Cambridge (1924), oltre alcune di Port Said e di Suez.

Le dirette osservazioni che potei fare confermarono la mia persuasione, già altra volta espressa [2], che il canale di Suez non costituisce una via per cui siano venute a mescolarsi le faune di Echinodermi del Mediterraneo e del mar Rosso: esse sono rimaste finora perfettamente distinte e il canale, a parte due forme cosmopolite, non è abitato che da specie provenienti dal secondo dei detti mari.

1. *Astropecten polyacanthus* Müll. Trosch. – Sembra essere questo l'unico Asteroide diffuso in tutto il canale, poichè *Asterina burtonii* Gray non mi risulta segnalata a nord dei laghi Amari. Sia in questi ultimi che nel Timsah lo rinvenni in grandissima abbondanza: sulle rive occidentali del Grande Lago Amaro si incontravano in breve tratto decine di esemplari spiaggiati. L'abbondante materiale esaminato si dimostrò nel complesso assai uniforme. $R = 24–68$ mm., $r = 6–16$: diametro degli adulti in generale di 12–15 cm. Un esemplare era regolarmente esamero. Una o più braccia sono spesso parzialmente rigenerate, risultandone una disuguaglianza a volte spiccata. Come di solito, nei piccoli individui il rapporto R/r ha un valore un po' minore: anche in essi i caratteri dell'armatura sono ben definiti e gli aculei margino–dorsali sono sempre lunghi e robusti, mentre gli esemplari più grandi possono averli assai più piccoli, più conici e del tutto bianchi, anzichè bruni nella metà basale. Simili variazioni nell'armatura margino–dorsale riscontrai sopratutto nel lago Amaro: esse erano tuttavia rare e quasi mai tali da alterare anche di poco la caratteristica fisonomia di questa specie. Le grandi ed appariscenti macchie brune che adornano il lato dorsale hanno una disposizione assai costante, formando alcune larghe fascie sulle braccia e cinque V sul disco, in corrispondenza dei cinque angoli interraggiali; esse sono però variabili per tono ed intensità e solo in un caso le trovai assenti. Caratteri morfologici affatto simili rilevai in materiale avuto dalla baia di Suez.

Nel Timsah queste Stelle di mare vivono infossate appena sotto la superficie sabbiosa del fondo, anche nell'immediata vicinanza della sponda. Non mancano nelle praterie di *Halophila*, mentre sono rare fra le Alghe. Si muovono assai rapidamente e si seppelliscono nella sabbia muovendo i pedicelli ed affondando verticalmente: primo a venire coperto è il margine del corpo, poi le braccia ed infine la parte centrale. Sulla rena rimane un'impronta ben netta del sottostante animale. Simili osservazioni ricordano quelle fatte da Verrill [3] sulla *Luidia clathrata* (Say) delle isole Bermude. Nello stomaco trovai Molluschi vari (*Cerithium*, *Mytilus*, ecc.) e, in un caso, un giovane Granchio (*Neptunus pelagicus*) intero.

Di questa specie, tradizionalmente ritenuta diffusissima dal Mar Rosso al Sud Africa, alle Hawai, Doderlein [4] annoverò una sottospecie (*burbo-*

(2) « Ann. Mus. Civ. Storia Nat. Genova », LIX, 1936, p. 206.
(3) « Trans. Connecticut Acad. Arts Sci. », XI, 1901, pp. 36.
(4) « Siboga–Exped. Mon. », XLVI a, 1917, pp. 135 e 179.

nicus) dell'Oceano Indiano e tre (*edwarsi*, *ensifer*, *samoensis*) del Pacifico. Attualmente pare che le differenziazioni regionali siano assai più profonde, cosicchè la sinonimia generalmente ammessa fin dai lavori di Perrier e di Sladen deve essere riveduta. In ogni caso, vive nel canale di Suez la forma tipica presente nel mar Rosso, cioè quella raffigurata da Savigny (5). Fisher (6) accennò a differenze geografiche suscettibili di far scindere la presente specie, a proposito della quale H. L. Clark (7) rilevò come un esemplare del Natal si scostasse da quelli tipici. Particolare importanza hanno poi le considerazioni di Mortensen (8) sulla pluralità di specie che furono riunite col nome *A.polyacanthus*, in quanto gli furono suggerite dalla sua scoperta che il *polyacanthus* del mar Rosso differisce dagli altri *Astropecten* per avere le gonadi disposte in serie (come in *Tethyaster*, ecc.). Nel Museo di Torino esistono alcuni esemplari di Hong Kong (Cina) in apparenza identificabili come *A.polyacanthus*. Rispetto a quelli del canale di Suez essi presentano aculei margino-dorsali più robusti e colore uniforme (forse per effetto della conservazione); inoltre, a parità di dimensioni, le piastre margino-dorsali sono meno numerose (27-30 invece di 31-35). *A.polyacanthus* venne già segnalato, come tale, a Hong Kong (Mortensen (9)).

2. *Ophiothrix savignyi* (Müll. Trosch.). – Raccolsi pochi esemplari fra le Alghe, su grossi sassi presso la riva nord-est del Timsah. Disco (diametro mm. 9) coperto di brevi bastoncini, di colore aranciato vivo volgente al bruno nel centro, bruno marcato sui lati degli interraggi; sottili linee brune seguono l'orlo delle piastre radiali. Braccia giallastre chiare con molte anellature più scure e con aculei bruni all'apice. Mancando di aculei sul disco, queste graziose Ofiure corrispondono alla fig. 2, pl. 2 di Savigny (loc. cit.): tali aculei possono però essere presenti, come risulta dalla fig. 1 di detto A. e da quanto riferisce Mortensen (1926, loc. cit., p. 122) a proposito del materiale di vari punti del canale, che egli esaminò.

3. *Nudechinus scotiopremnus* H. L. Clark. – Sulla spiaggia africana del Grande Lago Amaro trovai in grandissima quantità i gusci, con o senza aculei, di questo piccolo Echinoide che sembra essere la sola specie presente nel canale. Nel Timsah, al contrario, mi parve scarsissimo.

4. *Holothuria impatiens* (Forsk.). – Quest'Oloturia ben nota per la sua larga diffusione nei mari tropicali fu descritta su tipi di Suez ed è comune sia nel mar Rosso, sia nel Mediterraneo. Nè questa, nè altre specie congeneri erano però state finora rinvenute nel canale, che risultava abitato solo da Sinaptidi. Io raccolsi parecchi individui, lunghi fin 20 cm., fra i sassi e le

(5) « Descr. Egypte. Echinod. », 1809, pl. 4, fig. 1.
(6) « U. S. Nat. Mus. Bull. », 100, 3, 1919, pp. 63-64.
(7) « Ann. South Afr. Mus. », XIII, 1923, n. 12, p. 249.
(8) « Mém. Acad. Roy. Sci. Lett. Danemark », 9, VII, n. 1, 1937, pp. 42-43.
(9) « Hong Kong Natur. Suppl. », n. 3, 1934, p. 4.

alghe presso le rive nord–est del Timsah: avevano colore giallo grigiastro, più chiaro sul ventre, talora con due serie di macchie brune dorsali poco appariscenti. Non si può accertare se questo Echinoderma sia entrato nel canale da nord o da sud: propendo però a crederlo immigrato dal mar Rosso perchè, sebbene noto in varie località mediterranee, esso non risulta segnalato lungo le coste egiziane.

5. *Synaptula reciprocans* (Forsk.). – Lungo le rive del Timsah e di alcune lagune da esso dipendenti, sul lato asiatico, rinvenni questo Sinaptide in estrema abbondanza. Dai dati della spedizione di Cambridge risulta che esso ha popolato il canale da Suez al Timsah e che vi raggiunge una statura maggiore che in mar Rosso: io riscontrai una lunghezza massima di cm. 50 circa. Questi animali, che spiccano per il loro colore in apparenza nero, in realtà bruno rossastro scuro, si trovano talora sulla sabbia ma molto più spesso fra le alghe, alla superficie di sassi e rocce, o nelle praterie di *Halophila* delle lagune, anche sotto pochi decimetri d'acqua. Restano a lungo quasi immobili e strisciano lentamente coi tentacoli espansi e in movimento. Non fuggono affatto la luce e anche nelle ore calde si vedono sparse a dozzine fra le alghe, in zone battute dal sole cocente. Molte presentano il corpo tutto o in parte diviso da strozzature in segmenti più o meno numerosi, uguali o no. Un simile peculiare comportamento fu già osservato in altri membri della famiglia, ma la letteratura non ci fornisce in proposito che pochissimi cenni: secondo Ludwig [10] si tratta di un dispositivo per la locomozione. Non condivido questa opinione, non avendo scorto alcun rapporto tra lo spostarsi degli animali e l'insorgere della deformazione. Ci si può domandare se quest'ultima, suscettibile di comparire con variabilissima intensità, è soggetta alla volontà o esprime una reazione ad influenze esterne, forse a stimoli sfavorevoli. Io non riuscii ad intravedere le cause della temporanea deformazione e ricordo solo che la osservai in Sinapte di ogni dimensione, ferme o in movimento, libere e in cattività, e che in ottobre, nelle prime ore del mattino, con acqua più fredda, quasi tutte le Sinapte apparivano come anellate o moniliformi. In cattività questi Echinodermi sono più attraenti delle *Holothuria*, perchè più vivaci: erigono spesso la parte anteriore del corpo e muovono continuamente i tentacoli, senza mai espanderli tutti insieme. Trovai l'intestino, dalle pareti sottili e delicate, pieno di fini detriti giallastri.

(10) « Bronn's Klass. Ordn. Tierreichs », II Bd. 3 Abt. 1889–1892, p. 414.

Zoologia. — *Note araneologiche.* – XXVI. *Del modo con cui i Ragni dei gen.* Scytodes *e* Loxosceles *catturano la preda.* Nota (*) di B. MONTEROSSO, presentata (**) dal Socio A. RUSSO.

Nel 1927 mi accorsi (1) che i Ragni del genere *Scytodes* adoperano un mezzo del tutto speciale per catturare la preda: spruzzano una sostanza glutinosa, prodotta da particolari ghiandole cefalotoraciche, la quale dissecca, appena venuta fuori, rimanendo in forma di fili sottili aderenti al corpo, alle membra dell'animaletto colpito e alla superficie su cui questo si spostava, allorchè fu preso di mira dal Ragno. Il fatto, del tutto nuovo ed inatteso (2) fu da me sottoposto ad accurata analisi (3), sicchè potei mettere in evidenza i più importanti caratteri etologici, connessi con la capacità di eseguire lo spruzzo, nonchè i fondamenti anatomici, che rendono possibile la formazione e il lancio della sostanza glutinosa. Di fronte a manifestazione così peculiare, e in considerazione della particolare forma e struttura della ghiandola cefalotoracica, la quale evidentemente altro non è che il comune apparato del veleno, esistente in tutto l'Ordine dei Ragni, ma qui adattato a funzione del tutto nuova, volli indicare questa formazione con un attributo, che mi parve non superfluo nè arbitrario, e la denominai *ghiandola glutinifera*: bastava difatti pensare che in nessun'altra specie di Ragno l'organo velenifero produce tale e tanto secreto – anche se s'intenda prescindere da altri particolari caratteri di natura morfologica e specialmente strutturale e funzionale. Ma la denominazione, da me proposta, non ebbe fortuna, ciò che va forse attribuito all'influenza, esercitata sugli araneologi da uno scritto (4), che J. Millot, sull'argomento da me trattato, pubblicò poco dopo l'annunzio del mio reperto. In tale Nota, ma specialmente in due successivi lavori (5) il Millot, pur confermando in modo esplicito ed ampio le mie osservazioni, volle tuttavia dimostrare, in disaccordo con me, che solo una parte degli elementi anatomici, presenti nella ghiandola di *Scytodes thoracica* produce

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata e Zoologia dell'Università di Catania.

(**) Nella seduta del 10 maggio 1947.

(1) B. MONTEROSSO, *Osservazioni preliminari sulla biologia del genere «Scytodes».* «Rend. R. Acc. Naz. Lincei», vol. VI, sem. 2, fasc. 5, pp. 171–174 (1927).

(2) L. BERLAND, *Les Arachnides* Paris (1932) p. 249: «Monterosso a trouvé recemment, «chez les *Scytodes* un rôle tout à fait surprenant, insoupçonnè et inattendu, du venin des «ces Araigneés, ou plutôt une modification de l'appareil venimeux», ecc.

(3) B. MONTEROSSO, *Note araneologiche. La biologia degli Scitodidi e la ghiandola glutinifera di essi.* «Arch. Zool. It.», vol. 12, fasc. 1, pp. 63–122 (1938).

(4) J. MILLOT, *Sur la glande céphalothoracique d'une Araignée* («*Scytodes thoracica*» *Latr.*), «C. R. Acc. Sc.», vol. 189, pp. 119–120, (1929).

(5) J. MILLOT, *Glandes venimeuses et glandes sérigènes chez les Sicariides.* «Bull. Soc. Zool. de France», T. 52, p. 150 (1930); J. MILLOT, *Les glandes venimeuses des Aranéides.* «Annales des Sc. Nat. Zool.», T. XIV, fasc. I (1931).

la sostanza glutinifera, mentre il resto secerne del veleno, sicchè trattasi di una ghiandola « mista » che per ciò stesso non cessa di essere l'apparato velenigero, presente in tutti i Ragni. Distingueva pertanto in essa una porzione « sericigena », così detta perchè formata di elementi simili a quelli delle ghiandole addominali, e una porzione « velenosa ». Il chiaro A. aggiungeva che la proporzione reciproca delle due parti era variabilissima, tanto da poter trovarsi esemplari in cui l'ultima era rappresentata solo da « quelques amas de cellules, situés dans le fond de l'ampoule ». Ciò non ostante egli discuteva la convenienza di indicare l'apparato degli Scitoidei con il nome di « glutinifero » trattandosi di « un organe de transition entre une glande sérigène et une glande venimeuse ». L'opinione del Millot è prevalsa, sicchè la denominazione di « ghiandola velenosa » è rimasta, mentre quella, da me primitivamente data, non è stata adoperata da nessuno (6). Ciò anche perchè particolari circostanze mi hanno fino ad oggi impedito di ritornare sull'argomento, che tanto interesse suscitò fra i biologi, specialmente fra gli araneologi (7). Ora però ho ripreso in nuovo più approfondito ed esteso esame le varie questioni inerenti alla intima struttura e alla forma della ghiandola glutinifera degli Scitodidi; nuovo esame, cui non potevo definitivamente rinunciare, perchè ho raccolto altri dati e materiale più adatto di quello, adoperato precedentemente. Ma fin da ora debbo dichiarare che, anche ammettendo la presenza di elementi veleniferi, continuo a ritenere giustificato quel titolo di « glutinifera », conferito alla tipica ghiandola cefalotoracica, che ho descritto in quei pochi rappresentanti del gen. *Scytodes*, dei quali ho disposto.

Oggi più che mai, del resto, son portato a credere che lo « spruzzo » sia prerogativa di tutte le specie di questo genere; specie, molto più numerose di quanto non risulti dalla bibliografia attualmente esistente. Prova di ciò è data, fra altro, dal fatto che, esplorando appena un nuovo distretto geografico, il Millot recentemente ha avuto occasione di descrivere nuove forme del genere (8). Sarebbe certamente opinione insostenibile *a priori* quella, che limitasse la capacità di « spruzzare » a *Scytodes thoracica* e ad un'altra specie

(6) GERHARDT u. KAESTNER, in KÜKENTHALL, *Handbuch d. Zoologie*, III Bd., 2 Hälfte, 2 Teil. p. 464 (1937) chiamano *Gift-Drüse* la ghiandola glutinifera degli Scitodidi. Ciò dopo averne esposto la struttura e la speciale funzione, secondo i reperti di Monterosso e di Millot, nel riferire i quali, del resto, non attribuiscono con assoluto rigore quanto è dovuto all'uno e all'altro autore.

(7) BERLAND, op. cit., p. 249, alla descrizione riassuntiva del modo, con cui le *Scytodes* catturano la preda, secondo le mie ricerche, aggiunge: « Cette découverte fort intéressante etc. ». FAGE, in *litteris* scrive: « . . . un fait tout à fait nouveau et d'un grand interet ». MILLOT (op. cit): « De tels faits sont sans exemple dans le groupe des Aranéides ». Senza moltiplicare le citazioni, aggiungerò solo che lo stesso MILLOT nei suoi lavori ha fatto risaltare la importanza eccezionale del reperto, al quale ha voluto apportare ampio contributo di ricerche, veramente interessanti.

(8) J. MILLOT, *Les Araignées de l'Afrique Occidentale Française*. « Mem. de l'Acad. des Sc. de l'Inst. de France », t. 64, pp. 1–50 (1940). L'A. su sei specie, raccolte in alcuni punti di questo territorio, ne ha riscontrato due nuove.

del genere, vivente in Sicilia (Catania), che fin oggi non è stata identificata, e forse è nuova, specie che mi è servita per accertare il fenomeno in modo definitivo ed inequivocabile. Difatti, tutti gli Scitodidi veri e propri presentano il cefalotorace molto convesso superiormente, carattere che, almeno nelle forme da me studiate, è in relazione con l'enorme sviluppo della ghiandola glutinifera. Ma ora, per di più, sono in grado di portare un nuovo argomento, che è validissimo, secondo me, per ritenere la detta prerogativa posseduta anche da altri generi del gruppo *Sicariidae*, e quindi *a fortiori* immancabile in tutti gli Scitodidi.

Scopo precipuo, anzi, della presente Nota è quello di rivelare un nuovo reperto, alla cui realizzazione miravo da tempo, senza averla potuto raggiungere per diverse ragioni, tra le quali la difficoltà di procurarmi il materiale, vivente e in condizioni di piena efficienza, che occorreva. Intendo appunto riferirmi ai rappresentanti del gen. *Loxosceles*.

Data la loro affinità con *Scytodes*, fin dal momento, in cui scopersi il modo da questi seguìto nella cattura della preda, pensai che anche i *Loxosceles* potessero godere di simile prerogativa. Non disponendo nè di soggetti vivi nè di esemplari morti, mi rivolsi allora a Ludovico di Caporiacco e ne ebbi un individuo, fissato in alcool (*L. rufescens*). Ma la cortesia del chiaro Collega non valse a darmi la certezza, che i Loxoscelidi eseguissero lo spruzzo: lo studio morfologico, fatto in quell'unico esemplare, non mi rivelò insomma caratteri tali, da farmi confermare, senz'altro, la proprietà ricercata, anzi quasi mi fece escludere nel genere *Loxosceles* la facoltà, propria agli Scitodidi [9]. Lo stesso capitava a J. Millot, che aveva affrontato lo studio morfo-istologico della ghiandola cefalotoracica dei Loxoscelidi, trovandovi la struttura tipica di un apparato velenifero, quantunque qua e là avesse rinvenuto alcuni elementi « légèrement anormaux ». Sicchè concludeva a riguardo di essi: « . . . il est tentant d'admettre qu'ils sont, soit le vestige, soit l'annonce d'une transformation, comparable à celle, que subit actuellement la glande céphalothoracique du Scytode » [10].

Orbene, avendo potuto disporre finalmente di alcuni piccoli esemplari viventi di *Loxosceles sp.* [11], che si sono accuratamente allevati in laboratorio fino a portarli allo stato adulto, la capacità di eseguire lo spruzzo si è manifestata in modo indubbio [12]. Studierò in Memoria più ampia i caratteri morfologici ed istologici della ghiandola glutinifera, da essi posseduta, nonchè

(9) B. MONTEROSSO, op. cit. (1928) p. 109.

(10) J. MILLOT, op. cit. (1930), p. 163.

(11) Non volendo sacrificare ancora alcuno di questi pochi esemplari, ne ho fatto la diagnosi in vita. Sembrami trattarsi di *L. rufescens* (L. Dufour); tuttavia, riserbandomi di accertarne i caratteri più profondamente, lascio sospesa l'indicazione della specie fino alla morte di qualcuno di essi.

(12) Mi è gradito ringraziare a questo riguardo la dott.ssa Carmelina Ronsisvalle, per la sua attiva collaborazione. Devo anzi dichiarare che nell'allevamento di questa specie e nello accertamento della capacità, posseduta dai Loxosceli, di eseguire lo spruzzo, la dott.ssa Ronsisvalle mi ha prestato un aiuto particolarmente valido.

i caratteri etologici, che, del resto, mostrano notevole analogia con quelli degli Scitodidi. Mi basta dire qui, che lo spruzzo dà luogo a fili molto più esili, di quelli formati con analogo mezzo dagli Scitodidi, e meno regolari per disposizione.

Esso viene lanciato altresì da una distanza sensibilmente inferiore e seguìto subito dall'aggressione della vittima mediante le zampe e i cheliceri. Anche per questa specie le prede preferite sono animaletti atteri, ma camminatori, ovvero insetti alati, ove siano fermi o incedano sul terreno.

Lo sbocco dell'apparato glutinifero è, al pari di *Scytodes*, nell'uncino (*unguis chelarum*) il quale, com'è noto, nei Loxoscelidi si presenta relativamente lungo, arcuato (convessità esterna) e dalla base all'apice va gradatamente assottigliandosi. Tale sbocco è rappresentato da un ben distinto foro ovale, con l'asse maggiore nel senso della lunghezza dell'uncino. Al contrario di quanto si osserva in *Scytodes* (cfr. p. 81 della mia Memoria del 1928) lo sbocco dunque non è costituito da una protuberanza chitinosa a forma di tubicino, ma da un'apertura, presente sulla superficie dell'*unguis* e posta un po' più anteriormente. Nei rappresentanti di ambedue i generi citati l'apertura dell'apparato glutinifero è sul *margine esterno* dell'uncino carattere degno di grande rilievo, perchè in tutti gli altri Ragni, secondo l'affermazione concorde degli Autori, il forellino, da cui emerge il veleno, prodotto dalla ghiandola relativa, si trova costantemente presso l'apice dell'*unguis*, ma dal lato *interno*.

A questo riguardo sarebbe opportuno rivedere tutti i Sicariidi, per controllare la posizione dello sbocco in parola, potendosi ammettere, almeno in linea provvisoria, salvo ulteriore conferma mediante osservazione in vita, che siano capaci di « spruzzare », soltanto quelli, il cui foro d'uscita della ghiandola cefalotoracica si trovi non sul margine interno dell'uncino, ma sul margine esterno.

Eugenio Simon divideva la famiglia dei *Sicariidae* in sei sottofamiglie e queste in diversi generi [13]. Io ho potuto studiare in vita solo qualche rappresentante del gen. *Scytodes* e del gen. *Loxosceles*, ricavandone la certezza, che essi adoperano lo « spruzzo » per fermare la preda. Ritengo pertanto lecito avanzare l'ipotesi, che tale facoltà debba essere, se non generale per tutta la famiglia, almeno diffusa a molti dei gruppi subordinati. Purtroppo, lo studio morfologico non è sufficiente a dimostrare l'attendibilità di tale ipotesi, sicchè bisognerebbe sottoporre ad attenta osservazione i rappresentanti viventi dei diversi generi, dei quali purtroppo molti sono esotici.

(13) E. Simon, *Histoire naturelle des Araignées*, 2ª éd., T. I, p. 264, Paris, 1892.

Biologia. — *Le grandezze nucleari nella spermatogenesi e la « sesquifase » nella intercinesi spermatogoniale.* Nota di G. SCHREIBER, presentata (*) dal Socio G. GOLA.

Con lo studio cariometrico della serie dei poliploidi di *Coffea* e stato chiarito che, quando si tenga conto di eventuali fattori genetici, della forma geometrica del nucleo e delle variazioni del volume nucleare durante l'accrescimento interfasico, la correlazione tra volume nucleare e numero di cromosomi è perfetta. Specialmente l'ultima delle condizioni necessarie ci sembra fondamentale; cioè, quando si confrontino tra loro soltanto le tappe dell'accrescimento interfasico e non le fasi di « movimento » di questo periodo, che presenta un ritmo discontinuo di variazione volumetrica.

Un'altra dimostrazione di questo fatto ci vien data dallo studio cariometrico della serie spermatogenetica nella quale troviamo nuclei con multipli esatti del genoma aploide, perfettamente controllabili citologicamente e che hanno il vantaggio di non presentare accrescimento intercinetico. In queste cellule per ciò possiamo considerare con sufficiente esattezza le curve di frequenza come curve « normali ». Questa situazione vale specialmente per gli spermatociti di secondo ordine e gli spermatidi. Questi ultimi prima della loro trasformazione in spermatozoi. Gli spermatociti di primo ordine rientrano in questa categoria soltanto nelle ultime fasi della loro evoluzione, cioè dopo cessato l'accrescimento auxocitario. Gli spermatogoni invece presentano una situazione diversa avendo un ciclo di moltiplicazione mitotica indipendente dal processo meiotico.

Già vari Autori avevano precedentemente esaminato il problema cariometrico della spermatogenesi (Jacobi, Sauser, Freerksen, G. Hertwig, Wermel ecc.) e già dalle ricerche iniziali di Jacobi era risultata abbastanza chiaramente una correlazione diretta tra volume nucleare e numero di cromosomi. Abbiamo ritenuto necessario riprendere questo campo di ricerche sia per controllare con un più rigoroso metodo statistico le conclusioni degli autori precedenti, sia per analizzare il problema dello spermatogonio che nessuno aveva abbordato dal punto di vista quantitativo (Schreiber [1]. L'accrescimento auxocitario era stato già oggetto di ricerca citometrica da Levi e Terni [2] e sarà considerato in un lavoro successivo. Noi abbiamo nel testicolo la fortunata combinazione di aver contemporaneamente incluso nella stessa compagine istologica due tipi di cellule: il primo, quello della serie meiotica, senza accrescimento interfasico e con variazione quantitativa del genoma rigorosamente controllata, il secondo, lo spermatogonio, in attiva riprodu-

(*) Presentata nella seduta del 10 maggio 1947.

(1) « Revista Brasil. Biol. », *6*, 1946, 199.

(2) « Arch. It. Anat. Embr. » X, 19...

zione mitotica con accrescimento interfasico che presenta una escursione dal valore diploide del gonio a riposo a quello tetraploide della profase goniale. In questa ricerca, i valori volumetrici dei nuclei dello spermatocite di I e II ordine e dello spermatide assumono il significato di pietre miliari che segnano i volumi corrispondenti ai valori multipli interi del genoma aploide.

Non abbiamo assolutamente nessun elemento che ci induca a considerare differenti i fattori che influenzano i rapporti tra genoma e volume nucleare nella serie meiotica o nell'interfase goniale, né si presentano qui possibilità di variazioni dovute a fattori di ordine tecnico (desidratazione, inclusione ecc.) tra le due serie di nuclei.

Le presenti ricerche son state condotte all'Istituto Butantan approfittando del ricchissimo materiale ofiologico che viene inviato continuamente

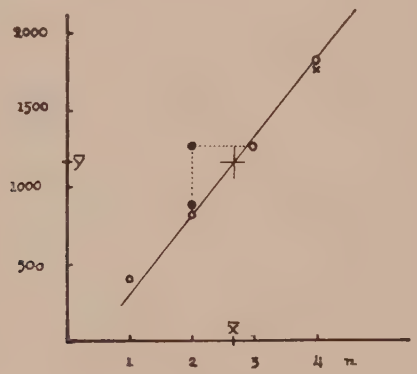


Fig. 1 – Correlazione tra numero di cromosomi e volume nucleare.

Ascisse: valore multiplo del genoma aploide.
Ordinate: Volumi nucleari (medie tra 11 specie, dei valori modali del volume).
○ spermatociti I. II e spermatidi
● spermatogoni (I e II moda)
× profasi degli spermatogoni.

da tutte le parti del Brasile, e vennero sovvenzionate da una Borsa dei « Fundos Universitarios » dell'Università di São Paulo.

Vennero considerate 11 specie di Ofidi appartenenti alle tre Famiglie di *Boidae*, *Colubridae* e *Crotalidae* ed ai seguenti generi: *Constrictor*, *Herpetodryas*, *Pseudoboa*, *Thamnodynastes*, *Tomodon*, *Phylodryas*, *Trimeridurus Bothrops* e *Crotalus*. Di parecchie specie venne misurato più di un esemplare e talvolta in epoche differenti del ciclo sessuale. Di ogni testicolo vennero misurati dai 100 ai 300 nuclei di ogni categoria di cellule. Le curve di frequenza vennero costruite coi valori del diametro nucleare e di queste calcolati i valori modali che vennero poi trasformati in volumi. Coi valori modali volumetrici venne costruito il diagramma avente in ascisse i valori multipli del genoma aploide, e in ordinate i volumi nucleari corrispondenti. Venne calcolata la equazione di regressione e l'Errore medio di stima (Sy) che per-

mette di giudicare l'attendibilità degli scarti tra i valori reali e quelli teorici dati dalla equazione di regressione.

Diamo qui la Tabella I ed il diagramma (figura 1) corrispondente costruito sui valori della media aritmetica dei valori modali di 14 individui appartenenti a 11 specie differenti. Nel lavoro in extenso pubblicato nelle Memorie dell'Instituto Butantan (1947) saranno dati tutti i valori individuali.

TABELLA.

Volumi nucleari della serie spermatogenetica.

Stadio	Volume	Genoma	Volume/genoma	Rapporto tra i volumi ed il volume aploide	Rapporti teorici
Spermatide	414	n	414	1	1
Spermatocite II . . .	825	$2n$	410	1,99	2
Gonio I^a moda	884	$2n$	440	2,14	2
Gonio II^a moda . . .	1271	$(3n)$	423	3,08	3
Gonio profase	1765	$4n$	440	4,2	4
Spermatocite I	1824	$4n$	455	4,5	4

In tutte le specie esaminate senza eccezione alcuna i fenomeni appariscono perfettamente costanti e da questi possiamo dedurre due fatti fondamentali:

1° la assoluta e rigorosa correlazione del volume nucleare degli elementi della serie meiotica coi corrispondenti valori multipli del genoma. I nuclei degli spermatociti di primo ordine, di II ordine e spermatidi stanno fra loro come 4 : 2 : 1.

2° Lo spermatogonio presenta in tutti i casi una moda ad un valore corrispondente a $3n$. In alcuni casi esiste una moda minore al valore $2n$. In tutti i casi il volume nucleare delle profasi goniali presenta il valore corrispondente a $4n$.

Nel diagramma questi fatti sono di una evidenza che dispensa da qualsiasi ulteriore commento. I valori degli spermatogoni sono indicati alla ascissa $2n$ con i punti pieni. Il valore indicato col punto vuoto a $3n$ corrisponde alla moda principale del gonio che come si vede discorda assolutamente dal valore teorico di $2n$. La consistenza statica di questa differenza è data dall'Errore medio di stima.

La conclusione che ci sembra maggiormente importante in questa ricerca è quella che si riferisce allo spermatogonio. Dai presupposti teorici delle ricerche cariometriche che abbiamo discusso nelle Note precedenti, apparisce che il valore di massima frequenza in un gruppo di nuclei omogenei, corri-

sponde ad una tappa nell'accrescimento interfasico. Possiamo quindi dal complesso dei valori statistici rilevati sullo spermatogonio ricostruire il ritmo del suo accrescimento interfasico nei seguenti termini: tra una divisione e la successiva il nucleo cresce da un volume basico $2\,n$ a quello $4\,n$ della fase avendo un arresto al valore corrispondente a $3\,n$. *Cioè l'accrescimento interfasico del gonio si fa in due cicli interrotti da una tappa il cui volume corrisponde a un genoma di* $3\,n$.

I rapporti tra i volumi nucleari di queste tre tappe sono esattamente 1,5 e 1,33, vale a dire assai prossimi a quelli che abbiamo trovato per le differenti classi di nuclei nei tessuti embrionali dei girini e che Brummelkamp [3] e G. Hertwig [3] hanno incontrato nell'esame comparativo di moltissimi tessuti normali e patologici considerandolo eguale a 1,41. Rimandiamo ai lavori precedenti [3] la discussione sull'apprezzamento teorico di questo valore. Qui vogliamo soltanto far notare che nel caso dello spermatogonio la tappa dell'accrescimento interfasico, che abbiamo denominato « *sesquifase* » (da sesqui Lat. una volta e mezza) si presenta con una chiarezza notevolissima e soprattutto nell'analisi di un'unica categoria di cellule durante la interfase. Per ciò questo caso è perfettamente confrontabile con quello studiato da Wermel e Portugalow [4] che cinematografando ad intervalli di tempo successivo e calcolando poi il volume i nuclei di cellule coltivate in vitro hanno verificato l'esistenza di un accrescimento a cicli ad « S » successivi i cui volumi terminali stanno tra loro nel rapporto 1: 1,5.

L'esistenza di due valori modali dello spermatogonio può, naturalmente far sorgere il dubbio che si tratti di due categorie diverse di spermatogoni e non di stadi di accrescimento della stessa cellula. Riteniamo di poter escludere questa obbiezione anzitutto per perfetta omogeneità morfologica di tutti gli spermatogoni negli Ofidi e secondariamente perchè sia nel testicolo adulto immaturo, sia in quello di embrioni avanzati gli spermatogoni hanno le stesse dimensioni di quelli dell'adulto in attività sessuale (moda a $3\,n$) e non vi sono quelle generazioni successive di spermatogoni di grandezze diverse che si incontrano in altre classi di Vertebrati.

Contemporaneamente a questa conferma della esistenza della sesquifase nel ciclo mitotico, le presenti ricerche confermano le conclusioni generali sulla validità del rapporto tra volume e numero di cromosomi. Nella serie meiotica questo fatto apparisce con estrema chiarezza non essendoci l'interferenza dell'accrescimento interfasico. Negli Ofidi inoltre dobbiamo commentare che questi risultati sono oltremodo chiari data la perfetta sfericità dei nuclei, anche di quelli degli spermatogoni che nei Mammiferi per esempio sono spesso schiacciati.

Nel corso di queste ricerche apparirono inoltre altri fenomeni interessanti il problema cariometrico. Così per esempio l'esistenza di tre divisioni

(3) « Revista de Agricoltura (Piracicaba) », 1943, *18*, 458; e questi « Rendiconti », Note precedenti.

(4) « Z. Zellf. », 1935, *22*, 133.

successive e il rapporto 8 : 1 tra i nuclei degli spermatociti di primo ordine e gli spermatidi (*Pseudoboa*). Altro fatto che è frequente in molte specie è una nitida « dimegalia » degli elementi della serie spermioistogenetica e che è probabilmente in relazione con un ciclo endomitotico supplementare della auxocita e la formazione di nuclei aploidi con cromosomi dimeri e da ciò la terza divisione (Hertwig [5] Spuhler) [6]. Questi fatti furono comunicati nella 1ª Riunione delle Società di Biologia del Brasile in São Paulo nel settembre 1946.

Biologia. — *L'assunzione di ossigeno durante lo sviluppo larvale e la metamorfosi di Bufo vulgaris* [*]. Nota di M. P. TARANTA, presentata [**] dal Corrisp. G. COTRONEI.

Un interessante problema è quello del metabolismo degli Anfibi durante la metamorfosi, specie negli Anuri, in cui, durante tale periodo, avvengono dei profondi mutamenti organici che permettono il passaggio dalla vita strettamente acquatica a quella terrestre. Vi sono organi che vengono eliminati, organi che si formano ex novo ed organi che subiscono profondi mutamenti strutturali.

La determinazione più facile del metabolismo respiratorio è quella della assunzione di ossigeno, e pur questa, data, l'entità degli scambi respiratorî di un girino, presenta non piccole difficoltà. Già altri autori si sono occupati degli scambi respiratorî degli Anfibi durante la metamorfosi ma i risultati ottenuti non sono concordi sopratutto a causa della poca sensibilità dei mezzi tecnici usati per cui si era resa necessaria la misura sulla attività respiratoria di un certo numero di individui contemporaneamente. Chi ha una qualche pratica di allevamento degli anfibi si rende conto della assoluta importanza di seguire nello sviluppo un solo individuo alla volta poichè tra i girini di una stessa deposizione gli stadi raggiunti nello stesso tempo possono essere anche molto diversi pur mantenendo gli animali nelle stesse condizioni; così si possono paragonare animali dello stesso aspetto morfologico e delle stesse dimensioni che hanno età molto diversa ed un metabolismo diverso.

Ho pertanto ripresa l'indagine su questo problema prendendo come materiale il *Bufo vulgaris*. Ho iniziate le misure delle assunzioni di O_2 dallo stadio di pinna codale estendendole sino oltre la metamorfosi usando come strumento di misura il microrespirometro di Stefanelli che mi ha permesso di determinare il consumo di ossigeno di un solo animale alla volta; mi è

(5) « Z. mikr. anat Forsch », *33*, 1933.

(6) « Z. Zellf. mikr. Anat. », 1936, *23*, 442.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata « G. B. GRASSI » della Università di Roma.

(**) Nella seduta del 10 maggio 1947.

stato così possibile, a differenza degli altri autori, costruire delle curve individuali, sperimentando sempre sugli stessi soggetti.

Gli esperimenti sono stati ripetuti in due annate: 1943 e 1945. In ogni anno sono state fatte determinazioni della curva di assunzione O_2 di un certo numero di animali derivanti dalla stessa deposizione di uova, raccolte in condizione di cordone gelatinoso. I girini sono stati nutriti con tuorlo d'uovo sodo e, negli stadi più avanzati anche con poltiglia di lombrichi; i rospetti con afidi.

La tecnica usata è simile a quella adoperata da Stefanelli nel suo lavoro sulla assunzione di ossigeno da parte dell'uovo e dell'embrione di rospo [1]: questo lavoro rappresenta pertanto un completamento di quel lavoro così

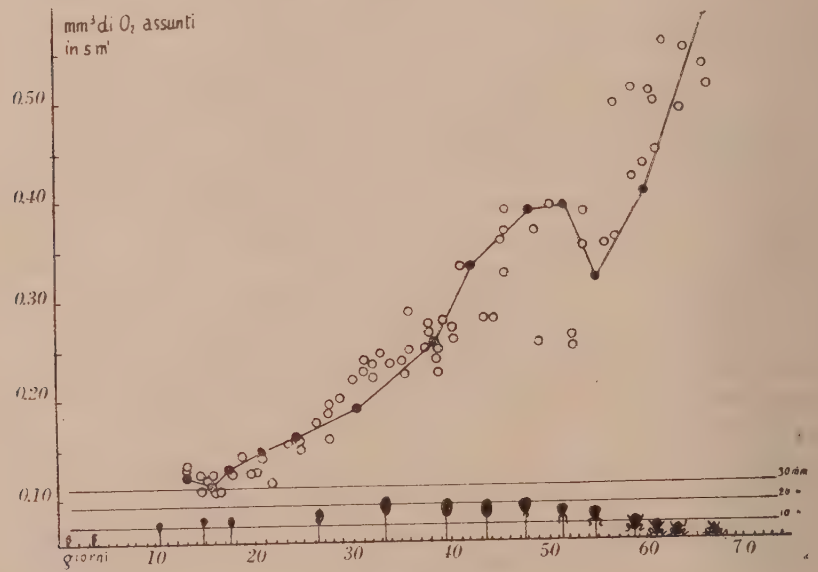


Fig. 1.

da offrire un quadro completo della assunzione di ossigeno da parte degli Anuri sino alla metamorfosi [2].

L'acqua della vasca in cui veniva immerso il microrespirometro era regolata a 20 C°. Ogni determinazione veniva ripetuta tre volte e ne era ricavato il valore medio. Si è cercato di diminuire al massimo la durata degli esperimenti per non compromettere la vitalità degli animali dato che le letture successive venivano fatte sempre sugli stessi animali (in qualche caso in cui l'animale è morto è stato sostituito da un fratello dello stesso stadio e dello stesso peso e dimensione). In ambedue le serie di esperimenti ho eseguito, per ogni misurazione, il disegno su carta millimetrata dell'animale,

(1) «Arch. Sc. Biol.» 1938, vol. 24.

(2) Ringrazio il prof. Alberto Stefanelli per la guida e l'aiuto datomi nello svolgimento di queste ricerche.

per potermene servire nelle curve relative allo stadio, e ne è stato determinato il peso fresco con una bilancia Sartorius al decimo di milligrammo, per le curve relative al peso. Ho rinunciato alla determinazione del peso secco e dell'azoto proteico perchè, facendo ciò, non avrei potuto fare le curve servendomi sempre dello stesso animale, condizione che ritengo assai più importante da un punto di vista biologico di quelle misure che in ultima analisi non sono pur esse espressione di quantità di materia vivente.

Non mi è possibile riportare qui i protocolli delle mie esperienze e mi limito invece ad illustrarle con dei grafici riassuntivi delle esperienze delle due annate in cui sono segnate le determinazioni di diversi animali e in cui solo i punti di un individuo sono collegati da una spezzata per non complicare troppo il disegno. Sulle ordinate sono indicati i consumi in mm^3 di ossigeno in minuti primi e sulle ascisse i giorni di sviluppo dallo stadio di pinna codale e gli stadi della esperienza i cui punti sono riuniti dalla spezzata. Le determinazioni degli altri individui sono riportate a parità di stadio (e non di tempo che è diverso per ognuno). Nella fig. 2 gli stessi valori della fig. 1 sono riferiti per un milligrammo di peso fresco in un'ora.

Dall'insieme di queste misure risulta che l'assunzione di ossigeno va aumentando con lo sviluppo sino ad uno stadio precedente la metamorfosi quando ancora non sono emesse le zampe anteriori. Da questo stadio sino al quasi completo riassorbimento della coda, cioè durante la prima fase della metamorfosi, vi è una notevole caduta di detto consumo, più evidente nelle esperienze del 1943 che in quelle del 1945, per poi risalire verso la fine del processo di metamorfosi deducibile dall'aspetto esteriore. Negli esperimenti del 1945 tale risalita appare assai più notevole. Ritengo che la caduta nella assunzione di ossigeno agli inizi della metamorfosi sia da mettersi in relazione al processo di atrofia delle branchie quando ancora non sono entrati in azione i polmoni, all'impiccolimento dell'animale con conseguente riduzione della superficie esterna sopratutto causata dalla atrofia della coda che con la sua ricca vascolarizzazione ha certamente importanza nei processi respiratorî.

La curva della assunzione di ossigeno relativa ad un milligrammo di peso presenta invece un andamento caratteristico ad U. La prima parte della curva scende sino allo sviluppo delle zampe posteriori per poi risalire, con un distinto flesso *poco prima* della metamorfosi sino a raggiungere un andamento pressochè parallelo alle ascisse a metamorfosi avvenuta. E presumibile che la discesa della prima parte della curva sia in relazione all'aumento di peso dovuto ad idratazione e la risalita alla disidratazione che accompagna i processi del differenziamento dei tessuti e degli organi durante la metamorfosi.

Confrontando le curve degli anni 1943 e 1945 si notano delle notevoli differenze pur concordando nell'andamento generale. Ciò è da attribuirsi a diverse condizioni di esperimento. Infatti nel 1945 l'acqua in cui i girini sono stati allevati conteneva una notevole quantità di cloro, immesso nell'acquedotto di Roma a scopo sterilizzante; inoltre il lotto di uova del 1945 è stato deposto assai più presto di quello del 1943 ed ha iniziato quindi lo sviluppo

in una stagione più rigida. Ambedue queste condizioni possono essere state causa della maggiore lentezza dello sviluppo larvale che si è avuto nel 1945; infatti, mentre nel 1943 dallo stadio di bottone codale all'emissione delle zampe anteriori passano appena 30 giorni, nel 1945 invece i due stadi sono distanziati da circa 60 giorni (fig. 3). Questo rallentamento della velocità di sviluppo ha messo in evidenza delle particolarità delle curve che, per la loro breve durata, nel 1943 non avevano potuto manifestarsi sufficientemente. Ancora nel 1945, proprio poco prima della metamorfosi (nella prima metà di maggio) si è avuto uno straordinario, improvviso aumento di temperatura del tutto eccezionale in questo mese (fino a trenta gradi) che deve aver con-

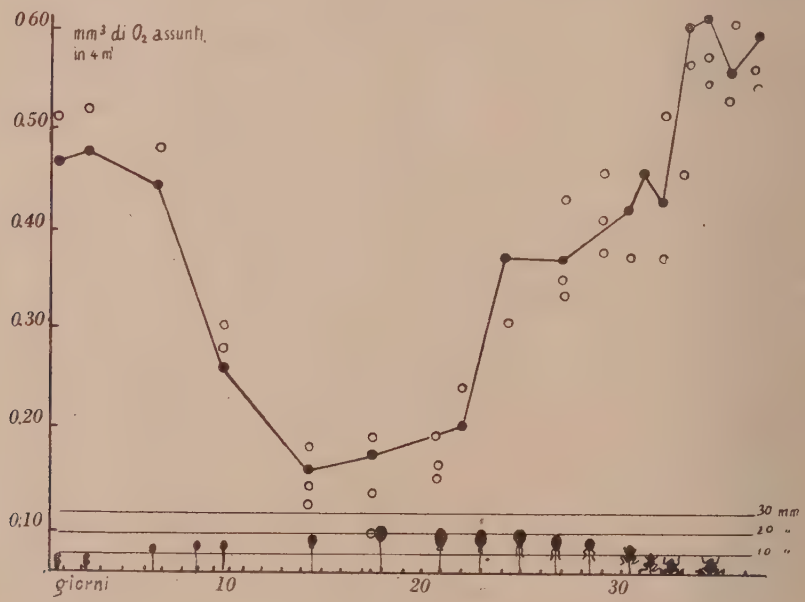


Fig. 2.

tribuito, evidentemente, a determinare un'elevazione del metabolismo in quel momento. Gli animali, infatti, benchè siano stati tenuti durante le misurazioni sempre a 20°, pure hanno vissuto ordinariamente in ambiente a temperatura variabile, risentendo quindi dell'andamento di questa. Infatti, proprio in questo periodo, sia la curva dell'assunzione di O, in relazione allo stato di sviluppo che quella in relazione al peso salgono rapidissimamente tanto da mascherare in quest'ultima la caduta relativa al periodo di atrofia delle branchie. Il più alto metabolismo che osserviamo specie in quest'ultima parte della curva del 1945 rispetto a quella dell'1943 e che ha portato a valori assoluti e relativi molto più elevati anche dopo la metamorfosi, può essere dovuto, oltre che alla più alta temperatura, anche alla maggiore lunghezza del tempo di sviluppo per cui, al momento della metamorfosi, gli esemplari del 1945 hanno un'età assai maggiore di quelli dell'1943: ci veniamo insomma a tro-

vare, nei due anni, di fronte ad individui che, pur presentandosi allo stesso stadio, non sono ugualmente giovani e ciò sicuramente deve influire sul loro metabolismo tanto più che, con l'aumentare dell'età, diminuisce il contenuto in acqua.

Anche Grobbles [3], che sperimentò su *Rana temporaria* col microrespirometro di Warburg, trova che gli animali che subiscono la metamorfosi più tardi hanno un consumo di ossigeno superiore a quelli che metamorfosano prima. Dai suoi studi risulta inoltre una curva del consumo relativo di ossigeno che soltanto nella prima parte concorda con quella da me ottenuta, dato che egli trova che all'inizio dello sviluppo si ha il maggior consumo

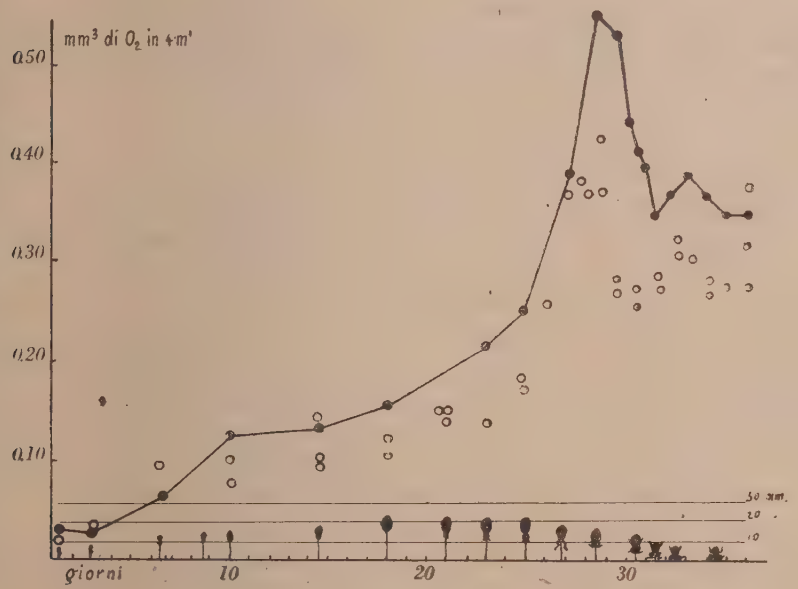


Fig. 3.

relativo di O_2 per poi diminuire, ma in seguito il consumo rimarrebbe costante, tranne in alcuni gruppi degli animali d'esperimento (egli li sottopone a regimi alimentari diversi) in cui si ha appena un leggero aumento prima della metamorfosi.

Una comparazione diretta non è possibile con i risultati trovati da Wills [4] dato che questo Autore (che usa i manometri Barcroft-Warburg) studia la respirazione in rapporto alla quantità di azoto proteico; egli trova che la curva scende dopo l'inizio della nutrizione per risalire durante la metamorfosi. Anche Helff [5] fece uno studio analogo, usando il metodo Winkler, sull'assunzione di ossigeno da parte di esemplari di *Rana pipiens*, sia in

(3) F. GROBBLES, « Pflyger's Arch. », 208–718 (1925).
(4) I. WILLS, « Journal of experimental zoology » *73* (1936).
(5) O. M. HELFF, « Journal of experimental zoology », *45* (1926).

modo assoluto che in relazione al peso fresco. Sebbene questo Autore abbia sottoposto gli animali d'esperimento a metamorfosi precoce mediante trattamento con tiroide e diiodotirosina, pure l'andamento delle sue curve concorda in linea generale con le mie, ma egli incomincia gli esperimenti solo dallo stadio in cui sono già visibili gli abbozzi delle zampe posteriori e quindi, da tale stadio in poi, nota un continuo aumento tranne la stessa caduta da me osservata e descritta nelle varie curve nel momento in cui, mentre sono ben sviluppate le zampe posteriori, ancora non spuntano quelle anteriori. Ma egli rimane perplesso di fronte a tale caduta e, supponendo che in condizioni normali essa non si presenti, tende a considerarla una anomalia dovuta all'alimentazione particolare cui egli ha sottoposto gli animali d'esperimento che, accelerando la metamorfosi, li indebolisce in modo particolare in questo periodo critico. Dai risultati delle mie ricerche si può invece senz'altro concludere che tale caduta non è certo causata da somministrazione di tiroide e diiodotirosima, dato che essa si presenta molto evidente nelle mie curve pur non avendo io mai fatto uso di queste sostanze.

Risultati opposti a questi e ai miei sono stati ottenuti da Etkin [6] per ciò che riguarda il consumo di ossigeno relativo al peso dato che questo Autore (che sperimentò su esemplari di *Rana catesbiana* in metamorfosi normale, con metodo Winkler) trova che, mentre il consumo assoluto di O aumenta man mano che il girino cresce per diminuire poi subito dopo la metamorfosi, il consumo in rapporto al peso fresco rimane sempre approssimativamente costante a cominciare dallo stadio in cui sono già visibili gli abbozzi delle zampe posteriori e a partire dal quale egli inizia gli esperimenti. Ritengo che questo risultato debba considerarsi senz'altro errato perchè, come si può rilevare da un rapido sguardo ai miei grafici, sia del 1943 che del 1945, a partire dallo stadio considerato si ha un così rapido e forte aumento da non lasciare alcun dubbio sulla sua esistenza. Non comprendo come all'Etkin sia potuto sfuggire un aumento così evidente, ma ciò probabilmente sarà in parte dovuto alla tecnica da lui adoperata e alla scarsa sensibilità del suo apparecchio, tanto che era costretto ad usare dieci individui alla volta per ogni misurazione.

In conclusione, da queste esperienze sulla assunzione di O_2 del rospo durante lo sviluppo larvale e la metamorfosi, risulta come essa vada aumentando durante lo sviluppo larvale per subire un decremento con l'inizio dei processi della metamorfosi per poi riaumentare nella seconda parte di questa e durante l'accrescimento del rospetto. Questo decremento, molto evidente nelle curve del 1943 e meno accentuato in quelle del 1945, è da mettersi in relazione con i processi di distruzione e di atrofia di molti organi, specie delle branchie, alla diminuzione della superficie corporea, in relazione sopratutto alla atrofia della coda, ed anche alla perdita di peso. Infatti, costruendo il grafico per unità di peso fresco, la curva della assunzione di O_2 presenta un andamento ben diverso: subisce un notevole abbassamento durante la prima

(6) W. Etkin, « Phisiological zoology », VII, 129 (1934).

parte dello sviluppo larvale per poi risalire rapidamente nella seconda parte, durante lo sviluppo delle zampe posteriori. All'inizio della metamorfosi presenta un leggero decremento e quindi riprende a salire sino alla fine del processo, stadio in cui la curva respiratoria tende a decorrere quasi parallelamente alla ascisse, con salita più o meno accentuata. La curva ad U della assunzione di O_2 in rapporto all'unità di peso è in relazione nella prima parte alla grande assunzione di acqua e nella seconda, di rapida ascesa, a fenomeni di perdita di acqua oltre che al più elevato metabolismo inerente alla maggiore complessità organogenetica.

Biologia (Biochimica). — *Il comportamento batterico in presenza delle etanolamine e della colina* (*). — Nota di M. Aloisi e P. Buffa, presentata (**) dal Corrisp. G. Vernoni.

Nella vasta letteratura sul metabolismo batterico esistono dati assai scarsi riguardanti il comportamento dei germi nei confronti delle amine derivate dall'etanolo e della colina che biologicamente oggi si può considerare come il derivato trimetilato della monoetanolamina. Ciò che di più importante si sa su questo argomento è la funzione di fattore di crescita esercitata dalla colina per il *D. pneumoniae* (Tipo III) e per alcuni ceppi mutati di *Neurospora* (Badger, Horowitz e Beadle). Per il pneumococco la colina può essere sostituita, sempre come fattore di crescita, dalla monoetanolamina (colamina), fatto che invece non si verifica per i mutanti di *Neurospora*. Anche altre etanolamine e loro derivati, come derivati della colina (metil- ed etilderivati) riescono a funzionare come fattori di crescita per il pneumococco. Sembra che la colina non venga usata dal pneumococco come substrato per la transmetilazione e venga invece utilizzata come tale per la sintesi lipidica. Una sostituzione o un legame a livello del gruppo alcoolico rende inattiva la molecola. Non ci risulta esistano nella letteratura dati concernenti l'attività respiratoria dei germi in presenza di siffatti composti.

Abbiamo voluto studiare questo per seguire per quanto fosse possibile il destino di questi composti aminati di fronte a germi in fase « resting » e le condizioni della loro utilizzazione. In questa Nota diamo i primi risultati delle nostre ricerche che si riferiscono alla monoetanolamina, alla dietanolamina, alla trietanolamina e alla colina. Tutte e tre le etanolamine furono preparate secondo Knorr e purificate con distillazioni frazionate. La colina era il prodotto puro cloridrato della Casa Roche.

Si sono usate le seguenti specie batteriche; *Bact. paradysenteriae* (Flexner), *Bact. vulgare* (X 19), *Diplococcus pneumoniae*, *Eberthella typhosa*, *Escherichia coli*, *Pseudomonas aeruginosa*, *Serratia marcescens*, *Staph. albus*, *Ace-*

(*) Ricerche eseguite nel Centro per lo Studio della Fisiopatologia del C.N.R. presso l'Istituto di Patologia generale dell'Università di Roma, diretto dal prof. G. Vernoni.

(**) Nella seduta del 10 maggio 1947.

tobacter xylinum (Brown, Bergey et al.), *Acetobacter sp.* Meno che per queste due ultime specie possiamo dire che tutti i germi presentavano netta prevalenza di fase S.

I germi erano coltivati su piastra di agar comune a 37° C per 18–24 ore; l'*Acetobacter xylinum* (B. B.) in agar malto, l'*Acetobacter sp.* in agar vino per 36–48 ore a 25° C. La patina batterica venica lavata due volte in soluzione fisiologica dove finalmente si sospendeva ad una concentrazione che corrispondesse a circa mg. 0,25–0,26 di N per cc (Kjeldahl); 1 cc di questa sospensione veniva posta in vaschette di Warburg insieme a 1,5 cc di una soluzione tampone di fosfati (M/15, pH 7,4). A parte veniva posto il substrato (etanolamine e colina): 0,3 cc di una soluzione M/25. Le soluzioni delle etanolamine erano neutralizzate con HCl. Si stabilivano naturalmente anche i controlli senza substrato. La temperatura era 38° C, il gas l'aria. Le prove di respirazione venivano protratte per 2–4 ore. Il consumo di O_2 veniva riportato a 1 ora per mg di N (Q_{O_2}/N).

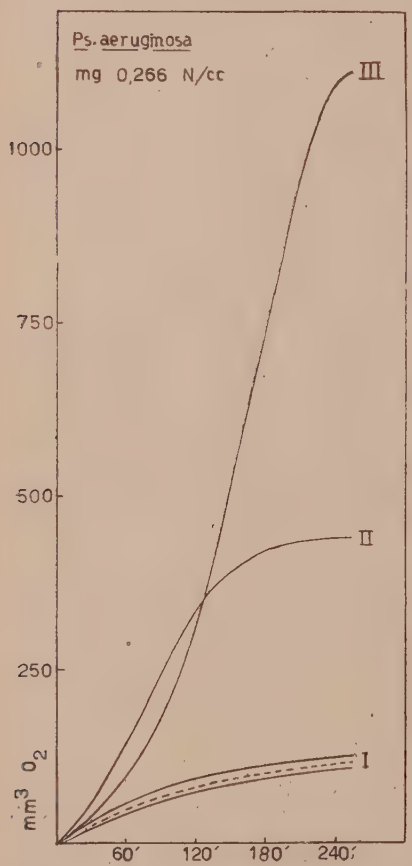


Fig. 1. – Consumo di O_2 da parte della *Ps. aeruginosa* in presenza di etanolamine e di colina (0,012 mMole).

I = curve rappresentanti la respirazione del controllo (tratteggiata) e quelle con di- e tri- etanolamina; II = con monoetanolamina; III = con colina.

I risultati si possono così riassumere:

La maggioranza dei germi provati non dimostra, nelle nostre condizioni sperimentali, una capacità di utilizzare le etanolamine e la colina in via ossidativa: I valori di consumo di O_2 ottenuti in presenza di questi substrati e quelli avuti dal controllo non differiscono per quantità significative, specie tenendo conto delle variazioni inerenti agli errori del metodo che sono pure stati valutati per ogni germe in occasione di altre ricerche del genere (Cfr. Bonetti e Aloisi in questi stessi « Rendiconti »). L'*Escherichia coli* ha dimostrato un lieve aumento di consumo di O_2 uniforme per tutti e quattro i substrati che oscillava intorno ai 30–35 mm³ per 1 ora e per mg di N. L'uniformità di questo aumento non consente particolari osservazioni. Lo *Staph. albus* ha dato un modesto incremento nel consumo di O_2 in presenza di trietanolamina (extra $Q_{O_2}/N = 53$) e ancora più scarso riguardo agli altri substrati.

Invece si sono ottenuti risultati molto interessanti con la *Ps. aeruginosa* la quale, sia in presenza di monoetanolamina (colamina), sia in presenza

di colina ha dato fortissimi valori di O_2 che al 60° minuto erano rispettivamente (extra Q_{O_2}/N) 400 mm³ e 200 mm³, mentre dopo 2 ore erano di 985 e 960 mm³ e dopo 4 ore 1/4 di 1250 mm³ per la colamina e di 3770 mm³ per la colina, dimostrando con ciò che mentre la colina viene ossidata più lentamente della colamina nelle fasi iniziali della esperienza, in seguito la respirazione in sua presenza si fa molto più attiva di quella in presenza di colamina (fig. 1).

Un simile comportamento e l'andamento della curva rappresentante la respirazione del germe in presenza di colina ci fece sorgere il sospetto che a contatto con questo substrato la *Ps. aeruginosa* riuscisse a moltiplicarsi e cioè che quell'andamento non fosse più l'espressione della respirazione in fase « resting ». La curva infatti tende ad avere, almeno in una sua parte, un andamento esponenziale dimostrato dalla curva dei logaritmi che dal 30° minuto fino al 120° si mantiene infatti lineare. Naturalmente non poteva in alcun modo essere tale in tutta l'estensione per l'eccessiva popolazione iniziale dei germi e per la relativamente scarsa quantità di substrato.

Si è voluto allora provare se effettivamente la *Ps. aeruginosa* può svilupparsi in un terreno artificiale composto esattamente come il mezzo in cui erano stati eseguiti gli esperimenti di respirazione: tampone ai fosfati pH 7,4 M/15 e cloridrato di colina M/250 (nelle prove al Warburg la colina era in definitiva a questa concentrazione). Si è potuto così dimostrare che effettivamente un tale terreno artificiale e molto semplice permette la crescita del germe. Da principio si ha uno sviluppo stentato che però diviene sempre più pronto ed abbondante nei passaggi successivi. Una condizione molto favorente la crescita è la presenza di NaCl nel mezzo (nonostante che vi esistano già per i fosfati e per il cloridrato di colina gli joni Na e Cl) tanto che solo con terreni contenenti anche questo elettrolita si può avere una rapida crescita della *Ps. aeruginosa*. Già al V° passaggio si ha ottimo sviluppo in 24 ore. Data la scarsezza del materiale organico in un simile terreno la crescita per altro si arresta anche presto.

Analoghe prove fatte con la etanolamina nella stessa concentrazione e neutralizzata con HCl hanno avuto invece esito negativo. Solo prelevando i germi del ceppo abituato alla crescita in terreno alla colina (IV° passaggio) e coltivandoli nello stesso terreno, ma con aggiunta anche di etanolamina (neutralizzata con HCl) si è potuto poi passarli in terreno costituito dai soli fosfati, etanolamina e HCl e avere un certo sviluppo che rimane però piuttosto scarso.

Riferimenti bibliografici

E. Badger, « J. Bact. », *47*, 509 (1944).
E. Badger « J. Biol. Chem. », *153*, 183 (1944).
N. H. Horowitz e G. W. Beadle, « J. Biol. Chem. », *150*, 325 (1943).
L. Knorr, « Ber. Deut. Chem. Ges. », *30*, 909 (1897).

Biologia. — «*Gregarina dimorpha*» *n. sp. parassita di* «*Chlaenius vestitus*» *Payk con osservazioni sulla sua variabilità e sul suo dimorfismo sessuale* (*). Nota di A. Filipponi, presentata (**) dal Socio A. Russo.

Introduzione. – Esemplari di *Chlaenius vestitus* Payk (*Coleoptera*: *Carabidae*), raccolti in grande quantità nei dintorni di Roma durante i mesi di aprile e maggio del corrente anno, sono risultati parassitati da una gregarina della famiglia *Gregarinidae* Labbé, che dallo studio fattone e dal raffronto con le diagnosi di tutte le specie finora note della famiglia, mi è risultata nuova e qui descrivo col nome di *Gregarina dimorpha*.

Materiale e tecnica. – Estratto dall'insetto l'intestino, lo dilaceravo in Ringer, provocando con delicati scuotimenti la fuoruscita del parassita che resta a volte accollato tra le pliche del bordo interno delle cripte di rigenerazione. Nella stessa soluzione studiavo il comportamento in vivo. Preparati in toto furono allestiti mediante strisci a fresco e colorati con emallume di Mayer o carminio cloridico alcoolico. Alcuni intestini, fissati in Carnoy o Schaudinn, inclusi in paraffina, furono sezionati con 7 μ di spessore e colorati con ematossilina Delafield, Mallory ed Heidenhain.

Descrizione del parassita. – 1) *Sporonti*. Gli sporonti si trovano prevalentemente in associazione di due individui (Fig. I, 1, 2, 3). Solo una volta mi è occorso di osservare una triassociazione giovanissima. I due satelliti non formavano catena, ma erano fissati entrambi al primite. L'associazione è assai precoce; le più piccole biassociazioni infatti hanno una lunghezza totale pari a un sesto circa delle massime biassociazioni osservate.

Il primite è cilindrico, il satellite ovale. Il protomerite del primite è ovale con l'asse maggiore trasverso. La sua larghezza è di poco minore di quella del deutomerite; anzi nelle forme più giovani può eguagliarla, raramente anche sorpassarla. Al setto si restringe. Il deutomerite del primite è costantemente cilindrico con la porzione posteriore arrotondata. La sua lunghezza può superare di 4 volte la sua larghezza.

Il protomerite del satellite ha l'aspetto di una lente biconvessa nelle forme adulte, con tendenza ad una forma piano convessa nelle più giovani. Sulla sua superficie anteriore, in rapporto all'agganciamento al primite si forma anteriormente una estroflessione anulare (Fig. I, 4). Tale estroflessione, che indicherò col nome di ventosa di accoppiamento, è una formazione stabile e costante. Provando a distaccare in soluzione fisiologica dal primite il satellite, sebbene sopravvivano entrambi a lungo muovendosi continuamente, la ventosa rimane inalterata. Essa appare nelle biassociazioni giovanissime come una semplice plica dell'epicito, trasparente, a sezione triangolare.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia dell'Università di Roma.
(**) Nella seduta dell'11 giugno 1947.

Facendosi la plica più consistente nelle biassociazioni a mano a mano più adulte, anche il sarcocito accompagna l'estroflessione, per cui, vista in sezione, la ventosa mostra un cuneo di sarcocito, ricoperto nella faccia interna ed esterna da un'esile lamina di epicito.

Il deutomerite del satellite è ovale. Nelle forme più adulte la sua larghezza tende ad eguagliare la sua lunghezza, superandola nei massimi esemplari. Il restringimento al setto, accentuato nelle forme giovanissime, si attenua rapidamente nello sviluppo, per scomparire completamente nelle forme adulte.

L'epicito è esile e finemente striato in direzione longitudinale; le sezioni mostrano il margine esterno regolarmente dentellato.

L'endocito, che è di color grigio, finchè la gregarina è immersa nel succo intestinale, appare bianco, non appena questa si passa in Ringer. In Lugol debole l'endocito mette in evidenza la sua struttura granulare. I granuli nel protomerite sono piccoli, nel deutomerite hanno dimensioni maggiori e sono più concentrati attorno al nucleo.

Il nucleo è rotondo o lievemente elissoidale con circa μ 24 di diametro nelle forme adulte e presenta un unico cariosoma di circa μ 11.

È' stato a lungo osservato il comportamento della gregarina in Ringer. Appena posti in questa soluzione, sia le biassociazioni, che primiti e satelliti separati, si spostano con movimento di slittamento, di tratto in tratto interrotto per qualche secondo. La media di 10 misure mi ha dato per la biassociazione una velocità di 21 μ/sec.

Tipico è anche il movimento di flessione limitato al solo primite, essendone il satellite impedito per la sua forma massiccia. Il protomerite si flette da un lato, quasi invaginandosi parzialmente nel deutomerite. Questo al suo terzo inferiore forma un solco profondo piegandosi verso il satellite. Nelle sezioni tutte le biassociazioni mature si presentano in questa posizione.

Il movimento di flessione, oltre che permettere una maggiore utilizzazione di spazio, è senza dubbio in rapporto con l'incistidamento. Infatti, dopo due ore di prolungata osservazione su di una biassociazione matura, che si spostava nel liquido, ho potuto vedere il primite iniziare la flessione dapprima a scatti, poi in maniera permanente, senza peraltro sostare nel suo moto di slittamento, derivandone un moto circolare. Dopo alcuni secondi di questa manovra, il primite accollava il suo protomerite alla porzione posteriore del deutomerite del satellite. Il moto cessava. Una massa gelatinosa ricopriva i due sporonti formando la cisti.

2) *Cisti.* – La cisti è subsferica, bianca, lattiginosa, avvolta da un involucro gelatinoso. La media di 6 cisti mi dà le seguenti misure: μ 130 × 140. Lo spessore dell'alone dipende dal suo contenuto in acqua e varia da 12 a 15 μ.

Le cisti, raccolte dalle feci, furono poste in soluzione al 2‰ di salicitato di sodio, montate su vetrino a goccia pendente lutato con vasellina e mantenute in termostato a 25°. Il salicitato attenua lo sviluppo delle muffe senza affatto disturbare il processo sessuale in atto nella cisti. Dopo due giorni circa questa sporifica emettendo da due a quattro sporidutti, i quali presentano un rigonfiamento nella parte basale e terminano ad ago da siringa nella

parte distale (Fig. I, 5). La lunghezza degli sporidutti è variabile: quando sono due raggiungono un massimo di 300 μ; se sono quattro non superano i 125 μ.

3) *Spore.* – Le spore sono cilindriche, smussate agli angoli, lunghe 5,5 μ larghe 2,7 μ (Fig. I, 6). Sono emesse a catena. Strisci di spore tenute a lungo in una soluzione di Giemsa concentrata non si colorarono.

4) *Trofozoiti* – Ho tentato di determinare le prime fasi di sviluppo attraverso l'esame di un ingente numero di sezioni. Purtroppo sotto questo

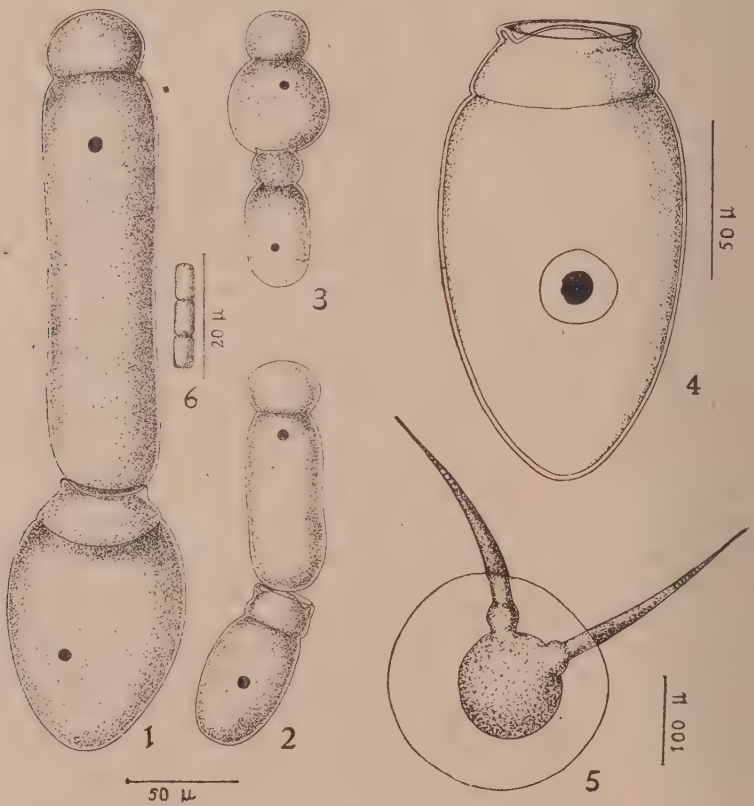


Fig. I. – *Gregarina dimorpha* n. s.:

1, 2, 3, biassociazioni in stadi diversi di accrescimento tutte alla stessa scala; 4, satellite con ventosa di accoppiamento; 5, cisti con sporidutto; 6, tre spore in catena.

riguardo le mie ricerche sono state meno fortunate. Occorre tener presente che la percentuale degli ospiti trovati parassitati non supera il 20 %; e, dovendo includere gli intestini senza nessun criterio selettivo, scarsa è la probabilità di imbattersi nelle fasi volute.

I trofozoiti furono sempre osservati liberi nel lume intestinale, prevalentemente nel primo tratto dell'intestino medio. Il più piccolo esemplare ha una lunghezza totale di 32 μ, è accollato col suo protomerite agli estremi lembi di due cellule epiteliali e sporge con il suo deutomerite nel lume intestinale. Nessuna traccia di epimerite.

Bisogna ammettere che la specie in questione sia sprovvista di epimerite, e che abbia eventualmente uno sviluppo endocellulare, a somiglianza di quanto avviene, secondo la Moriggi [1], nel genere *Endocryptella* da lei creato? Non posso escluderlo, ma neppure mi sento di affermarlo. Ulteriori reperti potrebbero dimostrare la presenza di epimerite in cefalonti più piccoli di quelli osservati. D'altro canto, l'esame attentissimo di tutte le sezioni delle cripte di rigenerazione non mi ha mai rivelato la presenza di stadi endocellulari.

Ho iniziato un allevamento di *Chlaenius vestitus* con l'intento di infestarli sperimentalmente. Se il tentativo riuscisse, tornerò ad affrontare il problema, spero, con maggiore probabilità di successo.

Osservazioni biometriche. – Dilacerato l'intestino, gli esemplari venivano immediatamente passati in formolo picricato (formolo al 5 %, pp. 10, Bouin, p. 1) e misurati qualche ora dopo. Dal controllo con le misure in vivo la gregarina non risulta alterata, inoltre l'acido picrico conferisce una delicata colorazione alle strutture interne, mettendo in evidenza nucleo e cariosoma negli individui meno adulti.

Per ciascuno individuo furono prese 5 misure: lunghezza totale = LT, lunghezza protomerite = LP, lunghezza deutomerite = LD, larghezza protomerite = WP, larghezza deutomerite = WD. Da queste misure furono calcolati i seguenti rapporti LP: LD, WP: WD, LD: WD, LP: WP.

Si misurarono complessivamente 269 individui, di cui 131 primiti, 126 satelliti e 12 trofozoiti. L'elaborazione di questo materiale statistico, unitamente a quello ricavato da altre specie in istudio, formerà oggetto di un successivo lavoro, limitandomi in questo a riferire i dati essenziali necessari a definire la specie, e a fare alcune considerazioni preliminari.

Intendendo per adulti gli individui delle maggiori biassociazioni osservate, tutte dell'ordine di grandezza di quella vista incistidarsi, riporto nella tabella I un quadro delle misure micrometriche di 25 biassociazioni e relativi rapporti.

Tabella I.

		LT	LP	LD	WP	WD	LP:LD	WP:WD	LD:WD	LP:WP
Primiti	media di 25 adulti	282	37	245	56	75	1:6,6	1:1,34	3,27	0,66
	massimo adulto	392	41	351	57	90	1:8,5	1:1,57	3,9	0,72
Satelliti	media di 25 adulti	154	29	125	84	120	1:4,3	1:1,43	1,04	0,35
	massimo adulti	197	39	158	110	159	1:3,9	1:1,44	0,99	0,35

lunghezza totale biassociazioni	media 25 biassociazioni	436
	massima	589

(1) *Nuove gregarine policistidee parassite di carabidi italiani*, «Arch. Protist.», *96*, 221–233 (1943).

Preferisco indicare i valori riferiti ai soli adulti, come già fece il Bush [2] perchè ritengo che abbiano un significato biometrico più preciso. Purtroppo non è facile di solito nelle gregarine discriminare ad un semplice esame morfologico gli stadi adulti da quelli giovanili in accrescimento. Ne consegue che i valori medi assoluti, ricavati peraltro da uno scarso numero di esemplari, come è uso frequente presso i sistematici, hanno lo stesso significato per esempio, della statura media di una popolazione umana desunta da misure promiscue di giovani e di adulti. È vero che ad ovviare questo inconveniente si è preferito sostituire ai valori assoluti quelli dei rapporti, che sono senza dubbio meno variabili; ma ben pochi autori si sono preoccupati di indagare l'entità di tale variabilità.

Orbene, si prenda in esame il comportamento dei rapporti LD:WD ed LD:LP quale risulta dalla Tabella II, ove primiti e satelliti vengono considerati come due popolazioni distinte.

TABELLA II.

Rapporto	Popolazione	Numero individui	Media	Scarto quadratico medio	Ampiezza assoluta del campo di variazione
$\frac{LD}{WD}$	Primiti	131	2,82	0,503	3,30
	Satelliti	125	1,37	0,245	1,30
$\frac{LD}{LP}$	Primiti	131	5	1,43	6,5
	Satelliti	125	4,29	0,95	4,8

I dati delle ultime due colonne stanno a dimostrarci la grande variabilità dei due rapporti. Nel primite, ad esempio, il rapporto LD:LP oscilla da 2 a 8,5; ed è evidente che la media da sola non avrebbe alcun valore discriminativo. Se la rilevante variabilità dei rapporti riscontrata in questa specie fosse comune, seppure in grado minore ad altre gregarine, come studi in corso su altre specie mi vanno sempre più confermando, si impone la necessità di associare all'esame morfologico uno studio statistico delle dimensioni assai più accurato di quanto non si sia fatto finora, soprattutto allorquando, ignorando gli altri stadi del ciclo biologico, si pretenda creare specie nuove [3]. È sorprendente come si possa aver trascurato lo studio biometrico in questo

(2) *A study on the gregarines of the grasshoppers of Pietermaritzburg.* « Natal. Ann. Natal Mus. », VI, 97–168 (1928).

(3) Nel caso in cui, per insufficienza di materiale, sia giocoforza limitarsi alla misura di uno scarso numero di esemplari è preferibile riportare i valori riferiti ai massimi esemplari osservati, accompagnati dall'indicazione dei limiti entro cui oscillano i valori dei rapporti, come del resto lodevolmente già si fa da qualche autore.

gruppo, quando in diversi casi l'unico criterio differenziale tra specie e specie è rappresentato dalle dimensioni.

Ma i valori dello scarto quadratico medio e dell'ampiezza assoluta del campo di variazione ci dicono inoltre che per i due rapporti la variabilità nel primite è maggiore che nel satellite. Ciò è dovuto al fatto che, accrescendosi la gregarina, il deutomerite nel primite si sviluppa più intensamente in lunghezza; nel satellite al contrario l'accrescimento in larghezza è più accentuato di quello in lunghezza. Difatti disponendo in ascissa le lunghezze totali e in ordinate i valori del rapporto LD:WD, si mette in evidenza quest'altro particolare interessante: Per i satelliti i valori massimi sono dati dagli individui più piccoli; per i primiti i più giovani dànno invece i valori minimi. I massimi dei primi sono all'incirca identici ai minimi dei secondi, e i valori degli uni e degli altri oscillano entro gli stessi limiti; per cui i punti di distribuzione, partendo da un'area comune si dispongono lungo una linea ascendente per i primiti e discendente per i satelliti. Dunque il dimorfismo tra primite e satellite è l'effetto di una diversa legge di accrescimento.

L'inizio dell'accrescimento differenziale risale probabilmente al primo momento dell'associazione. Lo scarso numero di trofozoiti misurati non mi permette di poter stabilire, se fin da questo stadio si distinguano in due gruppi differenti, in quanto i valori dei rapporti per loro calcolati rientrano nel campo di variazione comune ai minimi primiti e satelliti.

Dimorfismo sessuale. – La netta differenza di forma tra primite e satellite è riferibile a un dimorfismo sessuale? Credo che non vi possa esser dubbio.

Se è presumibile che le prime associazioni, soprattutto se multiple, come la giovanissima triassociazione osservata, possano avere un carattere transitorio e non siano in immediato rapporto con il processo sessuale, ciò non è più ammissibile per le biassociazioni adulte. Qui più che di biassociazioni si dovrebbe parlare di autentico accoppiamento permanente, come lo comprova la stabilità dell'unione, assicurata dalla ventosa di accoppiamento, e il fatto decisivo d'averle viste incistitarsi.

Orbene fino ad oggi non si conosce nelle policistidee un caso di dimorfismo sessuale indiscusso. Léger [4], che fa un accurato studio della sporogenesi nel genere *Stylocephalus* Ellis, non nota alcuna differenza di forma e dimensioni tra i due sporonti in accoppiamento. In *Stenophoridae* Léger e Duboscq [5] accennano a un dimorfismo per varie specie, come in *Stenophora silene* Léger e Duboscq ed altre, distinguendo forme allungate e forme globose; ma la Watson [6] non si dichiara molto convinta, osservando che le contrazioni dei mionemi, molto attive in quelle specie, possono far assumere

(4) *La réproduction sexuée chez les Stylorhynchus*. «Arch. Protistenk», *3*, 303-358 (1904).

(5) *Nouvelles recherches sur les Grégarines et l'épithélium intestinal des Trachéates*. «Arch. Protistenk.», 4, 335-383 (1904).

(6) *Studies on the Gregarines*. «Biol. Illinois», *2*, 255 pp. (1916).

alle forme allungate l'aspetto delle altre. Nelle Policistidee biassociate si rileva dai vari autori divario di forma e di rapporti tra primite e satellite, soprattutto a carico del protomerite di quest'ultimo; si tratta però di solito di differenze lievi, non sempre stabili, che potrebbero essere interpretate come conseguenza di un fenomeno puramente meccanico di compressione. Comunque non si è mai parlato di dimorfismo sessuale.

L'unico caso dell'ampia letteratura sulle Gregarine, che è a mia conoscenza, in cui si parli espressamente di dimorfismo sessuale, è quello della *Gregarina cis* Foerster (7), parassita del *cis boleti* Scop. Questa gregarina è una specie assai affine a quella qui descritta, come si dirà appresso. L'autore dopo aver osservato che la differenza tra le due forme è distinguibile anche in individui non ancora associati, afferma « es liegt vielleicht nahe, diese Differenzierung auf sexuelle Unterschiede zurückzuführen ». Ma soggiunge « oft konnte ich aber auch festellen dass sich 2 Tiere vereinigt hatten, die beide das Aussehen des Satelliten, also die ovale Form zeigten, obwohl auch noch " freie Primite " vorhanden waren ». Per cui conclude che tale reperto « lässt wiederum Zweifel aufkommen ob es sich um eine geschlechtliche Differenzierung handelt ».

Se i due supposti satelliti in associazione rappresentano una biassociazione giovanissima, come parrebbe dedursi dal contesto, sebbene non sia detto esplicitamente, il dubbio va allontanato.

Si considerino le figg. 1, 2, 3. La prima rappresenta una biassociazione quasi adulta e il dimorfismo è evidente. Nella biassociazione assai più giovane della fig. 2 le differenze tra i due individui vanno attenuandosi e diventano quasi nulle in biassociazioni più piccole. Nella fig. 3 i rapporti tra primite e satellite sembrano invertiti; peraltro la presenza della ventosa di accoppiamento, appena accennata nel secondo, ci fa presumere trattarsi di un satellite.

Perchè questa inversione di rapporti? I futuri primiti e futuri satelliti, che si assomigliano moltissimo, non essendo ancora iniziato l'accrescimento differenziale, da quanto almeno è lecito dedurre dai fatti finora osservati, hanno tuttavia un proprio campo di variabilità, che oscilla, come fu detto, entro limiti comuni. Orbene un futuro primite a deutomerite più largo potrà unirsi ad un futuro satellite a deutomerite più stretto e darci la biassociazione della fig. 3. Ma esiste anche la possibilità contraria, come infatti ho potuto constatare in un'altra biassociazione minima. Il Foerster potrebbe essersi trovato di fronte ad un caso intermedio con primite e satellite a deutomerite egualmente largo, ed essere stato indotto a considerarli due satelliti.

Concludendo, con molta probabilità anche per la *Gregarina cis* Foerster, come per la specie qui descritta, dobbiamo ammettere un evidente dimorfismo sessuale; né lo escludo per le altre. Questo dimorfismo, che si manifesta essenzialmente in una differenza costante e rilevante di rapporti tra le

(7) *Gregarinen in schlesischen Insekten.* « Z. Parasitenk. », *10*, 193 (1938).

varie dimensioni nel primite e nel satellite, è conseguenza di una diversa legge di accrescimento differenziale, posseduta dai due sessi.

POSIZIONE SISTEMATICA. – Sebbene non si conoscano i primi stadi del ciclo biologico, la forma tipica delle spore, il modo di sporificazione e infine il tipo di associazione rendono pressoché sicura l'attribuzione della nuova specie al genere *Gregarina*.

Rimangono da definire i rapporti con la *Gregarina cis*. L'aspetto morfologico complessivo è così somigliante, che ho dubitato a lungo potersi trattare della stessa specie. Purtroppo il Foerster non vide né cisti nè spore, nè dà i valori assoluti delle misure.

La legge di accrescimento differenziale, sopra illustrata, porta come conseguenza che sia il primite che il satellite vanno cambiando la loro morfologia con la crescenza, per cui si rende necessario anche nella descrizione morfologica riferirsi ad uno stadio ben determinato, quale può essere quello adulto; diversamente, caso non certo raro nella sistematica delle Gregarine, il ricercatore successivo si troverà in serio imbarazzo nello stabilire l'identità o meno della sua specie con quella precedentemente descritta.

Secondo il Foerster, il protomerite del satellite ha la forma «eines gewölbten Kegelstumpfes». Ora, soprattutto negli individui giovani, anche nella *Gregarina dimorpha* il complesso del protomerite e della ventosa di accoppiamento può dare l'idea di un tronco di cono; però quest'ultima formazione è così tipica, che è assai inverosimile che possa essere sfuggita all'osservazione dell'A., se fosse stata presente.

Il rapporto LP:LT dà al Foerster per il primite ed il satellite rispettivamente 1:5; 1: 6. Si è già rilevata l'insufficienza discriminativa di tali rapporti medi. I valori riferiti rientrano infatti nel campo di variabilità dei corrispondenti rapporti da me calcolati, come potrebbero del resto rientrarci quelli desunti da molte altre gregarine; tuttavia il valore medio del rapporto nel satellite a me risulta leggermente superiore a quello nel primite, contrariamente a quanto avviene per la *Gregarina cis*. Parimenti nel primite la larghezza del protomerite supera quella del deutomerite solo raramente e negli individui giovani, mentre per il Foerster ciò avviene spesso.

Infine è altamente improbabile che il *Cis boleti*, differente per posizione sistematica, per habitat e tipo di alimentazione da *Chlaenius vestitus* possa essere parassitato dalla stessa gregarina, quando numerosi esemplari di altri carabidi, anche dello stesso genere, viventi nel medesimo ambiente e raccolti sotto lo stesso sasso, sebbene parassitati da altre gregarine, risultarono sempre immuni da questa, che parrebbe quindi possedere una notevole specificità di ospite.

L'insieme di tali considerazioni mi inducono quindi a ritenere che si tratti di due specie distinte, giustificando l'assegnazione della gregarina da me ritrovata in *Chlaenius vestitus* ad una nuova specie, la cui diagnosi può così riassumersi:

Gregarina dimorpha n. sp. – Sporonti in genere biassociati, raramente triassociati. Lunghezza massima dell'associazione μ 589. Primite cilindrico,

deutomerite 2,3–8,5 volte più lungo del protomerite; lunghezza del deutomerite 0,9 4,2 volte la sua larghezza, massimo valore negli adulti. Satellite ovale, deutomerite 2,3–7 volte più lungo del protomerite; lunghezza del deutomerite 2–0,7 volte la sua larghezza, valore minimo negli adulti. Cisti subsferiche di μ 135 × 139. Sporificazione per 2–4 sporidutti. Spore cilindriche di μ 5,5 × 2,7, emesse a catena. Epimerite non osservato.

Osp. *Chlaenius vestitus* Payk;

Patria: Italia, Dintorni di Roma.

Biologia (Microbiologia). — *Riviviscenza di germi patogeni e non patogeni dopo trattamento con ammoniaca.* Nota di F. Di Raimondo, presentata (*) dal Corrisp. V. Puntoni.

Le presenti ricerche sono state promosse dal fatto che taluni Autori hanno potuto riattivare alcuni batteriofagi e ripristinare la virulenza di virus vegetali (mosaico del tabacco, necrosi del tabacco), dopo averli sottoposti a trattamento con formaldeide, ricorrendo al lavaggio per diluizione. Ricordiamo a tal proposito i lavori di Wahl (1), Schultz e Gebhardt (2), e di Kendall e Colwell (3) sul batteriofago, di Ross e Stanley (4) sulla virus–proteina del mosaico del tabacco e di Manil (5) sul virus a questa simile detto necrosi del tabacco. Questo fenomeno, di cui è inutile sottolineare l'interesse e l'importanza, è stato considerato da Stanley come uno dei caratteri che differenzierebbero le cosiddette virus–proteine dai microbi propriamente detti, e che farebbero propendere per una natura di esse non vitale, inserendole piuttosto nel grande mondo dei complessi enzimatici.

Ma in effetti riviviscenze furono osservate da tempo anche per i batteri a proposito di altri disinfettanti ed in modo speciale del sublimato. Già nel 1908 H. Chick (6) scriveva, nel suo fondamentale lavoro sulle leggi della disinfezione, che tracce anche piccole di sublimato determinano una netta inibizione sulla crescita batterica; se però si interviene successivamente con un eccesso di solfuri, si può assistere ad un ricupero della vitalità del germe, purchè si associno larghe diluizioni del mezzo ambientale. Gegenbauer (7) nel 1921 riferiva che lo stafilococco aureo, trattato con sublimato, ricupera la propria vitalità se viene sottoposto all'azione dell'idrogeno solforato per un periodo di tempo non inferiore alle 72 ore.

(*) Nella seduta dell'11 giugno 1947.

(1) R. Wahl, «Compt. Rend. Soc. Biol.», vol. 131 (32), IIII.

(2) E. W. Schultz e L. P. Gebhardt, «Proc. Soc. Exp. Biol a. Med.», *32*, IIII, 1935.

(3) Kendall e Colwell, «Journal of infect. Dis.», *63*, 81 (1938).

(4) W. M. Stanley e D. M. Ross, «Journal of gen. Physiol.», vol. 22 (2), 165 (1938).

(5) P. Manil, «Compt. Rend. Soc. Biol.», *127*, 1464 (1938).

(6) H. Chick, «The Journal of Hygiene», VIII, I, 92 (1908).

(7) «Gegenbauer. Arch. Hyg.», *90*, 23 (1921).

Anche Ottolenghi [8] adottò nel 1908 il metodo della neutralizzazione del sublimato, ricorrendo al solfuro di ammonio al 3%. In tal modo egli riuscì a stabilire esattamente il limite minimo di azione del $HgCl_2$, non più reversibile.

Nessuna traccia di lavori invece abbiamo trovato, che denuncino il verificarsi di un simile fenomeno nei riguardi della formaldeide posta ad esercitare la sua azione su forme batteriche, vegetative o sporulate.

Abbiamo pertanto ritenuto interessante affrontare un tale argomento, sopratutto per stabilire se vi sia una reale diversità di comportamento tra batteriofagi e virus da un lato e batteri da un altro. Mentre i precedenti lavori sugli ultragermi prendevano in considerazione soltanto il fenomeno del ricupero dell'attività litica o virulenta dopo diluizioni della formaldeide impiegata, abbiamo inteso invece esaminare per tutti i microrganismi a cominciare dai batteri, la possibilità di annullare con neutralizzazione chimica il potere lesivo della formaldeide stessa.

Parte sperimentale. – Per la esecuzione delle nostre ricerche [9], invece di ricorrere alle diluizioni abbiamo ritenuto più opportuno valerci della combinazione chimica della formaldeide con NH_3; pensavamo infatti che, in analogia a quanto già riferito per il sublimato in unione con i solfuri (H_2S, NH_4S_2), si potesse ottenere con tale mezzo una reversibilità dell'azione biologica. Come è noto, il composto che deriva da tale combinazione è una sostanza cristallina, biancastra, definita chimicamente come esametilentetrammina, in commercio nota con il nome di urotropina.

In ricerche preliminari abbiamo voluto anzitutto stabilire, per ognuno dei germi scelti per le esperienze, la resistenza a soluzioni di NH_3 a diverso titolo. Allestite così delle soluzioni di NH_3 pura per analisi all'1–2–5–10 % venivano posti 10 c.c. di ognuna di tali soluzioni in provette sterili, in cui si immettevano poi 1–2 gocce di sospensione batterica, ottenuta da una patina di agarcultura (di 24 h, per le forme vegetative e di 72 per le sporificate), stemperata in 10 c.c. di acqua distillata sterile, filtrata poi per carta, e controllata infine morfologicamente.

Ad 1–2–4 ore veniva seminata una grossa ansata (diametro di 3–4 mm.) in brodo semplice. Le letture venivano eseguite a 24 a 48 ore. Nella tabella I vengono riportati i risultati definitivi.

Se ne deduce che soluzioni di NH_3 all'1 % per il B. coli e fino al 5 % per lo stafilococco aureo e per le spore carbonchiose, non sono lesive per la vitalità dei germi rispettivi. Lo streptococco venne eliminato perchè di troppo scarsa resistenza.

(8) B. Ottolenghi, « Desinfection, Jahrg. », 5, 211 (1908); *Trattato di Igiene*, vol. III, p. 216 e sgg.

(9) Svolte nell'Istituto d'Igiene dell'Università di Roma.

TABELLA I.

GERMI	NH_3 %	Tempo di contatto con NH_3 espresso in h		
		1	2	3
B. Coli	10	+	—	—
	5	+	—	—
	2	+	—	—
	1	+	+	+
Stafilococco Aureo	10	+	+	+
	5	+	+	+
	2	+	+	+
	1	—	+	+
Carbonchio e B. subtilis	10	+	+	+
	5	+	+	+
	2	+	+	+
	1	+	+	+
Streptococco emolitico	10	+	—	—
	5	+	—	—
	2	+	—	—
	1	+	+	+

Iniziammo allora una serie di esperienze di cui diano in succinto le modalità tecniche. Allestivamo provette sterili contenenti 5 c.c. di formalina del commercio (contenente formaldeide al 30 % [10]) nelle soluzioni volute per ogni singolo germe usato, ed una serie di tubi per il controllo contenenti brodo semplice.

Allestivamo i seguenti materiali:

A) Provette sterili contenenti 5 cmc. di una diluizione di formalina a titolo doppio di quello che si desiderava saggiare;

B) sospensioni batteriche ottenute come sopra si è descritto;

C) provette sterili contenenti cmc. 4 di soluzione di ammoniaca ai titoli desiderati per gli esperimenti;

(10) Titolo determinato all'inizio delle esperienze.

D) tubi di brodo.

L'esperimento veniva condotto nel seguente modo:

1° cmc. 5 della sospensione batterica da saggiare (*B*) venivano introdotti in una provetta contenente la diluizione di formalina (*A*);

2° prelevamenti a tempi determinati con un'ansa di 4 mm. di diametro e semina della grossa ansata in tubo di brodo;

3° immediato prelevamento, dopo agitazione, di cmc. 1 dalla provetta *A* ed introduzione in provetta con ammoniaca (*C*);

4° due ore di contatto in ammoniaca;

5° prelevamento dalla provetta con ammoniaca di un'ansata di 4 mm. di anello e semina in altro tubo di brodo;

6° incubazione a 37° dei tubi di brodo e letture le più frequenti possibili, fino a 72 ore, per svelare il tempo di sviluppo.

Con tali osservazioni ci si poteva render conto:

a) se al momento della messa a contatto con NH_3 del germe dopo tempi variabili di formolizzazione, questo fosse ancora capace di moltiplicazione diretta.

b) se il contatto per 2 ore con NH_3 desse luogo ad una riviviscenza del germe, ed in quali limiti, laddove il contatto con il solo formolo aveva determinato morte apparente od almeno inibizione alla crescita;

c) se il tempo di sviluppo, laddove il solo formolo non aveva impedito lo sviluppo stesso, fosse influenzato dall'NH_3.

Ed ecco in tabelle separate i risultati riguardanti i singoli germi adoperati: si sperimentò sullo Stafilococco aureo e sul B. coli per le forme vegetative, sul B del carbonchio e sul B. subtilis per quanto riguarda le forme sporificate. I singoli germi furono esaminati due volte ciascuno ed i tempi riportati rappresentano le medie delle due osservazioni.

Furono adottati, dopo alcune esperienze di orientamento che per brevità non vengono riportate, i tempi di contatto con il formolo che sono riportati nelle tabelle.

I tempi indicati per lo sviluppo sono naturalmente approssimativi, poichè le letture venivano per semplicità fatte ad ore stabilite per tre giorni consecutivi contati dall'ora delle semine.

Osservazioni. – Come risulta dalla 2ª e 3ª colonna della tabella II da 30′ a 2 h sviluppo pressochè contemporaneo (il b. non ha ancora sofferto sensibilmente dell'azione della formaldeide): da 2 h 30′ fino a 5 h progressivo ritardo nella crescita dei germi formolizzati in confronto a quelli che sono stati poi trattati con NH_3. Dalle 5 alle 24 h mancanza di sviluppo dei germi trattati con solo formolo e riviviscenza dopo trattamento con NH_3. Dalla 48ª ora irreversibilità dell'azione lesiva della formaldeide, con presunta morte effettiva dei germi.

TABELLA II.

Tempi di contatto con formalina	Momento di sviluppo dopo contatto con sola formalina espresso in h	Momento di sviluppo dopo trattamento con NH_3 espresso in h
30′	22	20
60′	21	29.30′
$1^h30'$	21	19
2^h	20.30	19
$2^h30'$	73.30′	27.30′
3^h	29	17
$3^h30'$	43	16.30′
4^h	42	16
5^h	67.30′	20.30′
6^h	-	14
24^h	-	22
48^h	-	-

Esperienza n. 4 – 13 marzo 1947 – Germe usato: carbonchio sporificato. Stipite: carbonchio cavia (Collezione dell'Istituto d'Igiene di Roma). Formalina: 4 % (pari a formaldeide 1,20 %). NH_3: 5 %.

TABELLA III.

Tempi di contatto con formalina	Momento di sviluppo dopo contatto con sola formalina espresso in h	Momento di sviluppo dopo trattamento con HN_3 espresso in h
30′	21	21
60′	30	40
$1^h30'$	40	42
2^h	29	40
$2^h30'$	48	21,30
3^h	48	21
4^h	41	18
5^h	—	17

Esperienza n. 5 – 18 marzo 1947 – Germe: Stafilococco aureo. Stipite: Oxford. Formalina: 4 % (pari a formaldeide 1,20 %). NH_3: 5 %.

OSSERVAZIONI. – Fino a 2 h scarsa differenza di sviluppo; da $2^h30'$ a 4 progressivo ritardo nello sviluppo dei germi semplicemente formolizzati; dalla 5ª ora in poi compimento dell'azione lesiva del disinfettante, neutralizzata però ancora dalla NH_3.

Tabella IV.

Tempi di contatto con formalina	Momento di sviluppo dopo contatto con sola formalina espresso in h	Momento di sviluppo dopo trattamento con HN_3 espresso in h
30′	23	21
60′	23	21
1h30′	23	21
2h	23	21
2h30′	23	21
3h	23	21
3h30′	22	21
4h	—	17.45′
5h	18.45′	16.45′
7h	—	13.45′
24h	—	24.30′
48h		72

Esperienza n. 7 – 18 aprile 1947 – Germe B coli. Stipite: Morvo (collezione dell'Istituto d'Igiene di Roma). Formalina: 1% (pari formaldeide 0,30%). NH_3: 1%.

Osservazioni. – Da 30′ a 3h30′ contemporaneità di sviluppo, dalla 4ª ora morte apparente dei germi formolizzati.

Alla 5ª ora sviluppo paradosso dei germi semplicemente formolizzati. Dalla 7ª ora in poi morte dei germi trattati con solo formolo e sviluppo sempre più tardivo di quelli sottoposti anche ad ammoniaca.

Tabella V.

Tempi di contatto con formalina	Momento di sviluppo dopo contatto con sola formalina espresso in h	Momento di sviluppo dopo trattamento con HN_3 espresso in h
30′	23	20
60′	23	19.30′
1h30′	48	19
2h	58	19
3h	19	17
4h	19.30′	17.30′
5h	21	16.30′
6h	50	13
12h	—	24
24h	-	20.15′
48h		—

Germe: B. *subtilis* sporificato. Formalina: 4% (pari a formaldeide) 1,20%) NH_3: 5%.

Osservazioni. – Fino alla 6ª ora ritardi variabilmente notevoli nello sviluppo dei germi semplicemente formolizzati con un massimo di 37h; poi morte apparente e riviviscenza con NH_3 fino alla 24ª ora di contatto; indi perdita irreversibile della vitalità.

Il quadro dei dati sperimentali indica dunque il verificarsi, a nostro giudizio, di un complesso di fenomeni che ci sembrano abbastanza interessanti:

1° l'azione della formaldeide, prima di uccidere realmente batteri o spore, determina in essi una morte apparente, che è reversibile;

2° tale reversibilità si ottiene facilmente procedendo ad una neutralizzazione in via chimica dell'azione lesiva della formaldeide con HN_3 a vario titolo;

3° la reazione procede sempre con i suoi componenti posti in eccesso;

4° la riviviscenza dei germi dopo trattamento con NH_3 mette in evidenza che l'azione della formaldeide procede per gradi, esercitando nelle prime ore un ritardo progressivo sul momento di sviluppo delle brodoculture di controllo e determinando infine un arresto totale della crescita. Tale arresto può essere fino ad un certo punto rimosso con l'azione dell'ammoniaca: se tale intervento è troppo tardivo, la morte del germe si trasforma da apparente in reale.

5° il fenomeno della riviviscenza si verifica con maggior chiarezza e regolarità di risultati sperimentali nelle forme sporificate che in quelle vegetative.

Discussione dei risultati. – Ci è sembrato che questi fatti possano rivestire una duplice importanza, teorica e pratica.

Nel campo speculativo è interessante la deduzione che con questi risultati si può stabilire un comportamento univoco tra microbi comunemente detti ed ultragermi di fronte al fenomeno della riviviscenza. Ci riserviamo conclusioni più dettagliate e documentate, dopo aver esaurito il piano di ricerche che ci siamo proposto, comprendente studi analoghi sul batteriofago e su qualche virus filtrabile. Ci accontentiamo per ora di accennare che i risultati da noi ottenuti, come ebbe a dire il prof. Puntoni [11] nella sua relazione sulla natura dei virus filtrabili presentata all'Accademia dei Lincei, annullano le deduzioni di Stanley e Ross, ed anche di Krueyer e Baldwin [12] che si valevano del fenomeno di reversibilità per appoggiare l'ipotesi di una natura enzimatica non vitale della virus-proteina del mosaico del tabacco.

Concetti simili a questi da noi enunciati erano anche espressi in un lavoro di Wahl (lav. cit.) ove è detto testualmente: «si esclude che il fenomeno della inattivazione reversibile avvicini, come dicono Krueger e Baldwin il batteriofago (che è un tipico ultragerme) alle diastasi, perchè è propria anche di microbi»; tuttavia gli esempi riportati a questo proposito

(11) V. Puntoni, Relazione sui virus filtrabili tenuta il 9 maggio 1947 all'Accademia dei Lincei, Classe di Scienze Fisiche, matematiche e naturali.

(12) Krueger a. Baldwin. « Journal of gen. Physiol. », vol. 17 (4), 499 (1934).

dal Wahl stesso si riferivano a fenomeni di pura ripresa dei germi trattati con dosi modeste di sublimato o di formaldeide nello spazio di molti giorni, associando opportune diluizioni del mezzo ambientale.

Pur senza ulteriormente approfondire il meccanismo di azione della formaldeide, che sarà preso più ampiamente in considerazione nelle note successive, non ci sembra da trascurare l'osservazione che il fenomeno della riviviscenza dopo NH_3 è assai più nettamente presentato dalle forme sporificate che non da quelle vegetative.

Nel campo pratico ci è parso utile cogliere alcuni momenti in cui va tenuto presente il fenomeno da noi osservato. Ad esempio nell'uso di formaldeide nella disinfezione di stalle, latrine, ed altri locali dove si svolgono abbondantemente processi di fermentazione urinosa o si genera comunque NH_3, è ovvio supporre che almeno parte della formaldeide impiegata possa andare inutilizzata allo scopo voluto perchè chimicamente neutralizzata. Nè la formazione di urotropina ha importanza alcuna; è noto infatti che soltanto in ambiente acido, a determinato pH, si può da questa liberare nuova formaldeide, ma proprio negli ambienti suddetti l'eccesso di NH_3 libera assicura un ph nettamente alcalino.

Ed ecco una seconda deduzione pratica dei nostri risultati: quando si usa urotropina a scopo antisettico in affezioni delle vie urinarie, specialmente là dove si presume un pH alcalino per l'entità dei processi batterici svolgenti ammoniaca, occorre tenere presente che le dosi utili non dovranno essere quelle desunte dal calcolo teorico della quantità di formaldeide liberata in un certo tempo nelle vie urinarie, ma certamente superiori. È ciò perchè parte della formaldeide che si libera dall'urotropina viene ad essere bloccata dall'ammoniaca presente nel mezzo.

Tale deduzione viene ad illuminare il significato di una osservazione fatta fin dal 1929 da Thomas e Wang [13] in un lavoro sugli antisettici delle vie urinarie. Nelle conclusioni essi affermano infatti che l'azione della formaldeide liberata dall'urotropina in vescica infetta da B.coli esercita su questo un potere batteriostatico che è dimostrato dallo sviluppo di subculture, previa rimozione per centrifugazione della formaldeide stessa. Ora tale potere, calcolato in base alla percentuale dei germi ancora vitali, risulta essere assai inferiore a quello della stessa urotropina in mezzo acquoso. Gli autori fecero conoscere il fenomeno senza darne una spiegazione esauriente. La questione ci sembra interessante sì da poter dare spunto a controlli sperimentali, alla luce di queste nuove acquisizioni.

Merita un cenno anche come si debba considerare controindicata la pratica invalsa di cospargere ammoniaca sulle pareti ove si è usata formaldeide allo stato gassoso a scopo disinfettante, e ciò per la possibilità che parte di questa sia sottratta alla sua azione antimicrobica che necessita, per un suo efficace svolgimento, di un tempo relativamente notevole.

(13) Thomas a. Wang, cit. in M. C. Cultloch, *Disinfection and Sterilitation*, Ed. Kimpton, 1936, London, p. 376 e sgg.

Un altro fatto vogliamo sottolineare e cioè che, nonostante l'uso di soluzioni relativamente concentrate di formalina (dall'1 al 4 %, corrispondenti a formaldeide al 0,30–0,60–1,20 %) il fenomeno della neutralizzazione si è manifestato con diversi limiti di tempo, ma sempre e ben chiaramente per tutti i germi adoperati; il che indica che il potere antisetico o disinfettante della formalina, pur in condizioni ottimali di tempo e di ambiente, è assai più lento di quello comunemente creduto, tanto da permettere la riviviscenza di spore anche dopo 24 ore (vedi tabella II) e di germi dopo 48 di morte apparente.

Patologia. — *Ricerche chimico-biologiche sulla composizione del curaro Makú.* Nota II. di E. Biocca e M. Ippolito, presentata(*) dal Corrisp. V. Puntoni.

Nella precedente Nota avevamo mostrato come il curaro preparato in nostra presenza e che chiameremo « curaro imperfetto », fosse differente per alcune proprietà fisiche e biologiche dal curaro raccolto da noi già pronto nella stessa zona dell'Alto Rio Negro. Le differenze principali consistevano in un colore del « curaro imperfetto » molto più chiaro, in una consistenza molto meno pastosa e in una azione curarizzante molto più debole. L'attività tossica era caratterizzata da un lungo periodo agonico degli animali, accompagnato da tremori e lievi convulsioni, sintomatologia questa ben diversa dal curarismo classico provocato, nelle stesse condizioni di esperimento, dal curaro controllo. L'inoculazione endocerebrale, nei topini, di soluzioni di « curaro imperfetto » aveva provocato convulsioni che non ci era stato possibile differenziare da quelle prodotte dal curaro controllo.

Queste osservazioni ci avevano indotti a pensare che la preparazione del curaro da parte degli Indi non fosse una semplice estrazione e concentrazione di alcaloidi, ma una vera operazione chimica, durante la quale i principî attivi contenuti nelle piante venissero estratti, concentrati e trasformati in una sostanza con azione enormemente più tossica e curarizzante.

I diversi curari venivano e ancor oggi vengono spesso classificati in base ai recipienti in cui son contenuti (curaro in vaso, in tubo, in « cabaça »). Questa classificazione, che a noi non sembra molto giustificata, è basata sul fatto che ognuno di questi curari possederebbe alcaloidi con proprietà un poco differenti. Più attivo sarebbe il curaro contenuto in vasetti, più debole quello contenuto in tubi: abbonderebbe in quest'ultimo la curina (base di ammonio terziaria) molto simile alla curarina (base di ammonio quaternaria), senza le fortissime proprietà curarizzanti di quest'ultima.

La letteratura scientifica sulla preparazione del curaro è, come abbiamo precedentemente ricordato, limitatissima. La ragione di ciò è dovuta al fatto

(*) Nella seduta del 10 maggio 1947.

che pochissimi ricercatori avevano potuto assistere alla preparazione del veleno nel bosco, raccogliere e studiare le piante. Al contrario gli studi sulla composizione chimica del curaro erano molto progrediti già dal secolo scorso, perchè il curaro preparato dagli Indi era stato ottenuto con facilità e analizzato in molti dei più perfezionati laboratori chimici del mondo.

Le ricerche sulla costituzione chimica del curaro si sono ulteriormente perfezionate nell'ultimo decennio e sono stati isolati e purificati alcaloidi diversi. Nel 1946 Dutcher (1) ha pubblicato lo studio eseguito su una quantità enorme di curaro Serpa (il curaro portato dall'esploratore Gill): in queste ricerche sistematiche l'A. ha studiato separatamente il gruppo di alcaloidi estraibili con etere e cloroformio e il gruppo di quelli non estraibili con etere e cloroformio. Gli alcaloidi estraibili con etere e cloroformio (5 % in peso) erano dotati di fiacco potere curarizzante, che invece era posseduto in altissimo grado dagli alcaloidi non estraibili con questi solventi. La ricerca sul curaro Serpa era stata seguìta anche da uno studio separato di diversi alcaloidi delle varie frazioni. La pianta fondamentale con la quale gli Indi avrebbero preparato il curaro Serpa sarebbe stato il *Chondodendron tomentosum*, che non risulta nella nostra collezione di piante usate dagli Indi Makù per la preparazione del curaro.

Di ritorno dal nostro viaggio di studio nell'Alto Rio Negro ci trovavamo nella fortunata condizione di possedere sia le piante usate dagli Indi Makù per la preparazione del curaro, sia il curaro imperfettamente preparato, sia il curaro attivo della stessa regione. Ci siamo perciò proposti:

1° di studiare la composizione quantitativa e le proprietà biologiche dei diversi gruppi di alcaloidi del curaro Makù, seguendo lo stesso metodo di ricerca usato da Dutcher col curaro Serpa;

2° di ripetere le stesse ricerche usando le radici e i tronchi delle piante usate dagli Indi per la preparazione del curaro Makù (cioè conoscere la composizione quantitativa e le proprietà biologiche dei diversi gruppi di alcaloidi).

Un confronto tra i risultati ottenuti dall'analisi del curaro già preparato e quelli ottenuti dall'analisi delle piante usate per la preparazione dello stesso curaro, ci avrebbe probabilmente indirizzato verso ulteriori ricerche atte a porre in evidenza il meccanismo di preparazione del curaro e quindi le eventuali trasformazioni di indole chimica a cui sarebbero stati sottoposti gli alcaloidi delle piante, per ottenere il curaro.

Metodo. – Nelle presenti ricerche abbiamo seguìto il metodo usato da Dutcher. Abbiamo usato 3 grammi di curaro secco, la cui attività curarizzante corrispondeva, per ogni grammo, a circa 5000 dosi minime letali per topini di 20–25 grammi inoculati endomuscolarmente (muscoli della coscia).

(1) I. D. Dutcher, *Curare alkaloids from « Chondodendron tomentosum ». Ruiz and Pavon.* « Journ. Am. Chem. Soc. », *68*, 419 (1946).

Nota: Ringraziamo il prof. Q. Mingoja per il suo generoso e costante aiuto chimico prestatoci nel corso di queste ricerche, e il prof. G. Bargellini per le sue importanti indicazioni.

Abbiamo aggiunto ai 3 grammi di curaro secco cm³ 50 di acido tartarico all'1 %, lasciando sciogliere un giorno a 60° C ed agitando di tanto in tanto. Successivamente abbiamo filtrato; la parte insolubile è stata di nuovo lungamente agitata con abbondante quantità della stessa soluzione di acido tartarico e filtrata. Questa stessa operazione è stata ripetuta una terza volta, dopo di chè è stato determinato quantitativamente il residuo insolubile. I tre filtrati sono stati riuniti e concentrati a meno di 80° C, fino a un volume di cm³ 100. La soluzione è stata alcalinizzata con carbonato di sodio e versata in un imbuto separatore, procedendosi a varie estrazioni successive con piccole quantità di etere; l'etere è stato evaporato in una capsula e successivamente è stato determinato il residuo etereo. Dopo l'estrazione con etere si è proceduto, nella stessa maniera, all'estrazione con cloroformio. Terminata l'estrazione con etere e con cloroformio, la soluzione è stata acidificata con acido solforico al 10 %, usando come indicatore il Rosso Congo e filtrata. Gli alcaloidi ancora esistenti sono stati precipitati aggiungendo al liquido una soluzione acquosa satura di acido picrico (circa 1,43 g in 100 cm³ di acqua) fino ad avere una precipitazione completa (sono stati necessari approssimativamente 50 cm³ della soluzione satura di acido picrico). Il precipitato è stato filtrato rapidamente alla pompa e seccato: si è così ottenuto il picrato degli alcaloidi non solubili in etere e cloroformio. Per ottenere il cloridrato sono stati sciolti questi picrati in 50 cm³ di acetone, 50 cm³ di etere e 10 cm³ di HCl N/2, versando la soluzione in un imbuto separatore. L'acido picrico è stato poi estratto agitando con piccole quantità di etere, finchè la frazione eterea non era più colorata di giallo. Si è infine evaporata lentamente la soluzione e si è ottenuto il cloridrato.

TABELLA I.

Risultati ottenuti con curaro Makù.

	Percentuali delle diverse frazioni	Attività curarizzante (d. m. l. per topini inoculati endomuscolarmente)
Curaro Makù		1/5 mg = 1 d. m. l.
Residuo etereo	0,29 %	— — —
Residuo cloroformico	0,45 %	1/2 mg = 1 d. m. l.
Cloridrato basi non estraibili con etere e cloroformio	11,41 %	1/20 mg = 1 d. m. l.

Come si può osservare nella Tabella I, l'attività curarizzante del curaro Makù, calcolata come dose minima letale nei topini maschi di circa 20 grammi, inoculati endomuscolarmente, corrispondeva a circa 5000 d.m.l. per grammo

Il residuo dell'estrazione eterea (0,29 %) non presentava una apprezzabile attività curarizzante. Otto milligrammi non provocavano la morte dei topini inoculati endomuscolarmente. Il residuo cloroformico (0,45 %) di colore marrone mogano, uccideva per curarismo circa 2000 topini per grammo. Infine la frazione costituita dalle basi non estraibili con etere e cloroformio, considerata sotto forma di cloridrati (11,41 %), di colore scurissimo, quasi nero, dimostrava, un'azione curarizzante molto più elevata di quella del curaro originale: 1 g uccideva per curarismo circa 20.000 topini inoculati endomuscolarmente. (Probabilmente la precipitazione di queste basi non è stata totale, il che spiegherebbe la perdita di parte di attività del curaro durante le manipolazioni).

Da questa prima serie di osservazioni, che fondamentalmente dimostrano l'analogia di composizione del curaro Makù e del curaro Serpa, risulta:

1ª che il curaro Makù possiede una piccola frazione di sostanze estraibili con etere e con cloroformio (0,74 %), dotata di debole potere curarizzante (nel curaro Serpa questa frazione è molto più abbondante);

2° che la maggior parte del potere curarizzante del veleno è posseduta dalla frazione non estraibile con etere e con cloroformio;

3° che, dopo l'estrazione con etere e cloroformio, è possibile ottenere, per mezzo della precipitazione con acido picrico, basi dotate di un potere curarizzante molto superiore a quello del curaro stesso.

Tabella II.

Piante	Alcaloidi
Considerate meno importanti dagli Indi:	
1) Strychnos, sp. indet.	+
2) » »	+
3) » »	—
4) Malpighiaceae indet.	—
5) Rubiaceae: Palicourea o Psychotria	—
Considerate più importanti dagli Indi:	
1) Strychnos, sp. indet.	—
2) Menispermaceae: Abuta (Grisebachii ?) Triana e Planchon	+
3) Menispermaceae: Anomospermum (?)	+

Conosciute così in maniera schematica le proporzioni e le attività biologiche delle diverse frazioni del curaro Makù, abbiamo rivolto il nostro studio

alle piante usate dagli Indi per la preparazione dello stesso curaro, con il fine di mettere in evidenza le eventuali differenze tra la composizione e le attività biologiche delle diverse frazioni estrabili dalle piante e di quelle estraibili dal curaro.

Come prova preliminare abbiamo voluto conoscere quali delle piante da noi raccolte contenessero alcaloidi, pereliminare da ulteriori ricerche quelle eventualmente sprovviste.

Il segno + significa presenza di alcaloidi e il segno — assenza. La ricerca degli alcaloidi è stata eseguita qualitativamente sui tronchi e sulle radici delle diverse piante dal prof. Q. Mingoja, usando il reattivo di Bouchardat, il reattivo di Mayer, e il reattivo di Fröhle.

Le piante, che nelle prove preliminari hanno dimostrato di possedere alcaloidi, sono state sottoposte a un trattamento analogo a quello descritto per la estrazione delle diverse frazioni del curaro. Per facilitare le estrazioni, i tronchi e le radici sono stati ridotti prima in una fine poltiglia.

TABELLA III.

PIANTE	Residuo etereo-cloroformico	Cloridrato basi non estraibili con etere e cloroformio
Considerate meno importanti dagli Indi:		
1) Strychnos, sp. indet.	0,15%	—
2) » »	0,22%	—
Considerate più importanti dagli Indi;		
1) Strychnos, sp. indet.	—	—
2) Menispermaceae: Abuta (Grisebachii ?) Triana e Planchon	0,12%	2,83%
3) Menispermaceae: Anomospermum (?)	—	—
Controllo: Curaro Makù	0,74%	11,41%

Per semplificazione abbiamo considerato insieme il residuo etereo e cloroformico e non abbiamo trascritto i valori delle estrazioni inferiori a 0,10%.

Dall'esame delle Tabelle II e III risulta che alcune piante (Loganiaceae e Menispermaceae) contengono alcaloidi in quantità rilevanti. Tra tutte le piante da noi raccolte però, una Menispermacea, l'Abuta (Grisebachii ?) Triana e Planchon, appartenente al gruppo considerato dagli Indi come più importante, è particolarmente ricca di alcaloidi, sopratutto della frazione non

estraibile con etere e cloroformio. Questa frazione di alcaloidi è precisamente quella che nel curaro Makù è dotata della più forte azione curarizzante.

Abbiamo perciò voluto confrontare l'attività curarizzante delle stesse frazioni estratte con lo stesso metodo dal curaro Makù e dalle piante usate dagli Indi per la preparazione del curaro Makù.

Le proprietà curarizzanti degli estratti etereo-cloroformici di tutte le piante (comprese quelle delle quali non sono riferiti i dati sulla Tabella III) sono state praticamente nulle. L'inoculazione di parecchi milligrammi (5-10) del residuo etereo-cloroformico di queste piante, nei muscoli della coscia dei topini, non ha provocato, in nessun caso, la morte degli animali.

Nella seguente Tabella IV perciò sono riportati solamente i risultati delle prove biologiche eseguite con gli alcaloidi dell'Abuta, non estraibili con etere e cloroformio, paragonandoli con i risultati ottenuti con gli alcaloidi del curaro Makù, estratti con la stessa tecnica.

Tabella IV.

Cloridrato delle basi non estraibili con etere e cloroformio.

	Percentuali	Attività curarizzante
Curaro Makù	11,41 %	1/20 mg = 1 d. m. l.
Abuta (Grisebachii ?)	2,83 %	7 mg = 1 d. m. l.

La dose minima letale, come sempre, si riferisce ai topini inoculati endomuscolarmente.

Con nostra sorpresa abbiamo osservato come l'attività curarizzante delle basi non estraibili con etere e cloroformio dell'Abuta sia enormemente inferiore all'attività delle stesse basi estratte con la stessa tecnica dal curaro Makù. Infatti, mentre la dose minima letale per i topini, determinata usando le basi estratte dal curaro Makù, corrisponde a 1/20 mg, la dose minima letale determinata usando le basi estratte dall'Abuta corrisponde a 7 mg. Infine, particolare secondo noi importante, l'intossicazione provocata dagli alcaloidi estratti dall'Abuta si differenzia dal curarismo classico, perchè l'agonia degli animali è più prolungata e accompagnata, sopratutto nei primi minuti dopo l'iniezione, da intensi tremori diffusi degli arti e del muso.

Concludendo, molte delle piante da noi raccolte nel bosco brasiliano e usate dagli Indi per la preparazione del curaro posseggono alcaloidi; tra esse l'Abuta (Grisebachii ?) è particolarmente ricca in basi non estraibili con etere e cloroformio. L'attività biologica curarizzante di queste basi è enor-

mente inferiore a quella delle basi estratte, con lo stesso metodo, dal curaro Makù. Queste ricerche indubbiamente confermano la nostra supposizione che la preparazione del curaro da parte degli Indi non sia una semplice estrazione di alcaloidi, ma una complessa operazione chimica, con trasformazione delle proprietà fisiche–chimiche e biologiche degli alcaloidi stessi.

Nella prossima Nota saranno riferiti gli studi da noi eseguiti nel tentativo di ripetere in laboratorio il lavoro chimico di trasformazione degli alcaloidi praticato empiricamente dagli Indi.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Castelnuovo apre la seduta comunicando che solo in questi giorni l'Accademia ha avuto notizia della morte del Socio Angelo Menozzi avvenuta il 5 gennaio 1947. Egli era fra i Soci più anziani dell'Accademia in quanto fu nominato Corrispondente nel 1902 e Nazionale nel 1904. Tutta la sua attività si svolse presso la Scuola Superiore di Agraria di Milano dove occupò la cattedra di Chimica agraria. Portò molti importanti contributi alla chimica organica e specialmente in quella parte che trova applicazione nell'agricoltura. Fu un grande Maestro e un grande organizzatore. L'Accademia invia un commosso saluto alla Sua memoria. La Presidenza curerà che Egli venga degnamente commemorato in una delle prossime Sedute.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente comunica quindi all'Assemblea un voto presentato dalla Classe di Scienze Morali e redatto dal Socio Mancini perchè l'Accademia, d'intesa con l'Istituto Storico del Risorgimento, si faccia iniziatrice di una celebrazione del 1° centenario del 1848 nella quale sia messa in valore l'importanza europea del complesso movimento di pensiero che sboccò nell'anno glorioso.

Il Presidente illustra il voto presentato e la Classe unanime lo approva.

PRESENTAZIONI DI LIBRI

Il Socio Panichi presenta in omaggio le tre prime annate dei «Rendiconti della Società Mineralogica italiana» da lui diretta.

Il Socio Silvestri presenta in omaggio una Memoria del suo assistente dott. Vincenzo Lupo sulla «Anomala ausonia var. neapolitana Reitt.».

Il Socio Cassinis presenta in omaggio la seconda edizione del volume «Note di Fotogrammetria» pubblicata in collaborazione con L. Solaini.

Presenta anche due relazioni: una della Commissione permanente dell'Associazione Geodetica Internazionale, ed un'altra del Comitato internazionale dei pesi e misure.

Il Socio Silva presenta tre sue Note pubblicate negli Atti Accademici di varie Società: « Sulla traiettoria dei satelliti rispetto al Sole »; « Contributo allo studio di alcuni enti geometrici nei punti di una linea sghemba »; « Concavità, convessità e curvatura di una linea relative a un punto dato e a una data direzione ».

Il Socio Sacco presenta in omaggio due sue Note: « Schema geologico della Calabria » e « Origine del sistema solare » della quale parla brevemente, accennando dapprima alle due teorie prevalenti: quella endogena del Kant-Laplace e quelle esogene, dualistiche o mareali, che non paiono accettabili e fa le seguenti considerazioni:

a) Il *Sole* pur essendo una stella nana, in via di estinzione, presenta ancora, oltre alle palpitazioni undecennali, del tipo di certe *Stelle variabili*, getti eruttivi fotosferici, alti anche più di un milione di chilometri, per cui è probabile che anticamente avesse un'attività enormemente superiore.

b) Le *Stelle Novae* sono il prodotto, non dell'urto di due astri, ma di esplosioni per causa intratomica, originando attorno alla stella centrale un'immensa atmosfera cosmica che spesso scompare in seguito, ma che può durare anche per anni (come nella *N. Pictoris*, nella *N. Aquilae*, ecc.) formando quasi passaggio alle:

c) *Nebulose anulari* o planetarie, nelle quali, attorno alla Stella centrale esistono per lo più due zone o fascie, una interna più densa, forse talora meteoritica (come negli anelli di Saturno), ed una esterna tenuissima.

Comparando tali fatti con quanto presenta il nostro Sistema solare, così ne delinea l'origine:

I) fase di *Nebulosa* condensatasi lentamente in:

II) *Stella gigante* continuante a condensarsi e riscaldarsi sino a 40-50.000° (fase *argoniana* dell'evoluzione stellare) e presentante condizioni tali da originare, per esplosione, una:

III) *Stella Nova* o *Supernova* tanto grandiosa ed importante da conservare a lungo, attorno alla Stella centrale una doppia fascia o zona, cioè costituire una;

IV) *Nebulosa* (meglio *Stella*) *anulare* solare, di cui, col tempo, la zona interna (detta *geica*) si condensi nei pianeti Mercurio, Venere, Terra e Marte, ora in vario stato di evoluzione, mentre la zona esterna, grande e tenuissima (*Iovica*), si condensi nei grandi e tenui pianeti Giove, Saturno, Urano e Nettuno. Gli elementi astrali minori o più lontani dal Sole, come Plutone, i Pianetini, i Bolidi, le polveri meteoriche, ecc. si raffreddarono ed irrigidirono più presto nelle varie regioni del Sistema solare.

L'Accademico Segretario presenta i libri giunti in dono segnalando un notevole gruppo di pubblicazioni inviate in omaggio dal prof. Alessandro Trotter; due fascicoli della Rivista Internazionale *Marcellia* di cui il Trotter è redattore; e una breve Memoria del Socio Silvestri su una specie di Termitofili del Brasile.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Il Socio Silvestri presenta per la pubblicazione negli Atti Accademici una sua Memoria dal titolo: « Prodromo di una monografia dei Diplopodi penicellati » e la Memoria di D. V. Zanon dal titolo: « Diatomee di Buenos Aires ».

Presentano infine Note per i Rendiconti i Soci Perucca, G. Levi, Panichi, Brunelli, Silvestri, Gola, Carnera, Cassinis, Silva, Bianchi, Bompiani.

L'Accademico Segretario legge l'elenco delle Note inviate.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

BRUNELLI G., « Su alcune caratteristiche del Mare Mediterraneo ».

FANO G., « Su alcuni lavori di W. L. Edge ».

PANICHI U., « Osservazioni ottiche e mineralogiche sulle leggi di Brewster ».

RUSSO A., « Problemi connessi alla chiusura e alla riattivazione delle tonnare ».

BAIADA E., « Confronto e dipendenza dai parametri degli integrali delle equazioni differenziali » Nota I (pres. dal Corrisp. G. SANSONE).

BAIADA E., « Confronto e dipendenza dai parametri degli integrali delle equazioni differenziali ». Nota II (pres. dal Corrisp. G. SANSONE).

BIOCCA E. e IPPOLITO M., « Ricerche chimico-biologiche sul metodo indio di preparazione del curaro Makù ». Nota III (pres. dal Corrisp. V. PUNTONI).

CITTERIO P. e RANZI S., « Sostanze modificanti lo sviluppo embrionale e viscosità di soluzioni contenenti macromolecole » (pres. dal Corrisp. G. BRUNELLI).

COSSU A., « Sulle connessioni affini e sul vettore di Einstein » (pres. dal Socio E. BOMPIANI).

D'AMATO F., « Agglutinazione cromosomica (« stickriness ») in *Alium Cepa* L. e altre Liliaceae » (pres. dal Corrisp. A. CHIARUGI).

DEAGLIO R., « Abbagliamento in luce gialla ed in luce bianca » (pres. dal Socio E. PERUCCA).

FRANCHETTA A., « Sulle curve appartenenti a una superficie generale d'ordine n. 4 dell'S^3 » (pres. dal Socio G. CASTELNUOVO).

FUMI F., « Celle elementari di Bravais e traslazioni primitive di Seitz » (pres. dal Corrisp. C. PERRIER).

GAETA F., « Sulle curve sghembe di residuale uno » (pres. dal Socio G. CASTELNUOVO).

GEROLA F. M., « Azione antimitotica dei prodotti del metabolismo fungino » (pres. dal Socio G. GOLA).

HORNICH H., « Il primo problema al contorno per il piano a più tagli » (pres. dal Socio E. BOMPIANI).

INZINGER R., « Sui diametri coniugati delle ovali a centro » (pres. dal Socio E. BOMPIANI).

LEVI-MONTALCINI R., « Ricerche sulle correlazioni nello sviluppo del sistema nervoso. Regressione secondaria del ganglio ciliare dopo asportazione della vescicola mesencefalica in embrione di pollo » (pres. dal Socio G. LEVI).

LEVI-MONTALCINI R., « Ricerche sperimentali sull'origine del simpatico toraco-lombare nell'embrione di pollo » (pres. dal Socio G. LEVI).

LONGO C., « Sui sistemi di ipersuperficie di S aventi lo stesso sistema primo polare » (pres. dal Socio E. BOMPIANI).

MANARA C. F. « Esistenza topologica di diramazioni negative per le curve doppie » (pres. dal Corrisp. O. CHISINI).

MAZZI V., « Attività secretoria nel nucleo magnocellulare preottico di *Trituris cristatus carnefex* (Laur)» (pres. dal Corrisp. N. BECCARI).

MIRANDA C., « Sul principio di Dirichlet per le funzioni armoniche » (pres. dal Corrisp. R. CACCIOPPOLI).

NICOLINI T., « Sulle variazioni di latitudine anteriori al 1890 » (pres. dal Socio L. CARNERA).

PETTINEO B., « Sulle funzioni integrabili secondo Picone-Stieltjes » (pres. dal Corrisp. M. CIPOLLA).

PETTINEO B., « Sulla sommabilità delle funzioni integrabili secondo Picone-Stieltjes ». Nota I (pres. dal Corrisp. M. CIPOLLA).

PETTINEO B., « Sulla sommabilità delle funzioni integrabili secondo Picone-Stieltjes ». Nota II (pres. dal Corrisp. M. CIPOLLA).

PETTINEO B., « Sulla sommabilità delle funzioni integrabili secondo Picone-Stieltjes ». Nota III (pres. dal Corrisp. M. CIPOLLA).

PETTINEO B., « Sul massimo e sul minimo integrale di una funzione secondo Picone-Stieltjes » (pres. dal Corrisp. M. CIPOLLA).

RADICATI L. A., « La funzione di Lagrange di alcune particelle elementari » (pres. dal Socio E. PERSICO).

RIEDEL A. e SCHIAVINATO G., « La differenziazione magmatica nelle rocce del M. Lonzina (Colli Euganei) » (pres. dal Socio A. BIANCHI).

SCHREIBER G., « Il Problema dell'accrescimento interfasico e delle variazioni volumetriche del nucleo durante lo sviluppo ». Nota I (pres. dal Socio G. GOLA).

SCHREIBER G., « Volume nucleare e poliploidismo ». Nota II (pres. dal Socio G. GOLA).

SCONZO P., « Teoria approssimata del pianetino (552) Sigelinde » (pres. dal Socio G. SILVA).

STAMPACCHIA G., « Sulla semicontinuità degli integrali doppi in forma ordinaria del calcolo delle variazioni » (pres. dal Corrisp. R. CACCIOPPOLI).

VACCARO G. « Le ipersuperficie d'ordine N con un punto $(n-2)$-uplo. Nota I: Genesi delle singolarità della varietà di diramazione » (pres. dal Socio E. BOMPIANI).

ZWIRNER G., « Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali alcune applicazioni ai problemi ai limiti per le equazioni differenziali ordinarie » (pres. dal Socio G. CASTELNUOVO).

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Amaldi, anche a nome del Socio Picone, legge la relazione con la quale si propone la pubblicazione della Memoria di G. Aquaro dal titolo: « Sull'integrazione dei sistemi di equazioni differenziali lineari ordinarie ».

Messa ai voti la proposta della relazione essa viene approvata con le solite riserve di carattere finanziario.

CONCORSI A PREMI

Il Socio Armellini, a nome della Commissione, legge la relazione per il conferimento di due premi ministeriali per i Professori degli Istituti Nautici. La relazione conclude con l'assegnazione di un premio al prof. Marletta.

La Classe approva la relazione.

TEMI PER DISCUSSIONI

Esaurita la prima parte dell'ordine del giorno il Presidente apre la discussione sul secondo punto e cioè sulla scelta dei temi di discussione per l'anno accademico prossimo.

Il Socio Vercelli fa presente che ricorre quest'anno il 3° centenario della morte di Torricelli e propone che si celebri tale data con una relazione alla quale potrebbero contribuire Gino Loria e altri Soci.

Il Socio Somigliana si associa alla proposta Vercelli.

Il Presidente osserva che l'idea è buona ma che per queste discussioni bisogna scegliere soprattutto dei temi riguardanti argomenti di attualità.

I Soci Armellini e Krall propongono come tema di discussione « La teoria della relatività ».

Il Presidente assicura che si terrà conto della proposta.

Ricorda anche che già nelle discussioni tenute all'inizio dell'anno accademico furono formulati già dal Socio Abetti due temi uno riguardante le relazioni fra fenomeni solari e terrestri, l'altro riguardante i raggi cosmici.

Il Socio Levi Giuseppe propone il tema « Ultrastruttura della sostanza vivente ».

Il Presidente comunica alla Classe anche la proposta fatta dal Socio De Ruggiero perchè si discutano dei temi di interesse generale, possibilmente a Classi riunite.

Il Corrispondente Brunelli propone come argomenti di discussione i due temi « Rapporti tra genetica ed evoluzionismo » e « Il 2° principio della termodinamica ».

Cassinis propone come tema il « Microscopio elettronico ».

Raccolti tutti i temi proposti il Presidente comunica alla Classe che sarà cura dell'Ufficio di Presidenza nominare un piccolo Comitato per la scelta di uno o più temi di discussione tra quelli proposti dai Soci.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta dell'11 giugno 1947

CASSINIS G. e SOLAINI L. — *Note di fotogrammetria. Esposizione riassuntiva di principî, strumenti e metodi.* 2ª ed. Milano, Libreria Editrice Politecnica, 1946. Pp. 191, in-8°, con figg.

CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE. — *La sessione 1946 del Comitato internazionale dei pesi e delle misure* (Parigi 22-29 ottobre 1946). Estr. da «Ricerca scientifica e Ricostruzione», a. 17° (1947), nn. 2-3.

— *Riunione della Commissione permanente dell'Associazione internazionale* (Parigi 5-8 agosto 1946). Estr. da «Ricerca scientifica e Ricostruzione», anno 16° (1946), n. 10.

DE ANGELIS D'OSSAT Gioacchino. — *Storia delle conoscenze sui tufi vulcanici e supposti «necks» dell'Alto Aniene.* Estr. da «Atti e Memorie della Società Tiburtina di storia e d'arte», vol. XXIV, 1946.

LUPO Vincenzo. — *Studio morfologico, anatomico ed istologico della Anomala ausonia var. neopolitana Reitt.* Estr. da «Bollettino del Laboratorio di Entomologia Agraria di Portici», vol. VII, maggio 1947.

Rendiconti della Società Mineralogica italiana. Anno I-III, Pavia, 1941-1946.

SACCARDO P. A. e TROTTER A. — *I funghi dell'Avellinese.* Censimento, distribuzioni e note critiche. Avellino, Stab. Tip. Ditta Maggi, 1920. Pp. XV-198, in-8°.

SACCO Federico. — *Origine del sistema solare. Evoluzione cosmica.* Estr. da «Atti della Accademia delle Scienze di Torino», volume 79, 1943-44.

— *Schema geologico della Calabria.* Estr. da «L'Universo», a. XXVI, n. 3, nov.-dic. 1946.

SILVA Giovanni. — *Concavità, convessità e curvatura di una linea relativa a un punto dato e a una data direzione.* Estr. da «Atti dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti», a. 1944-45, tom. CIV, parte 2ª.

SILVA Giovanni. — *Contributo allo studio di alcuni enti geometrici nei punti di una linea sghemba.* Estr. da «Atti dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti», tom. CIV, parte 2ª, 1945.

— *Sulla traiettoria dei satelliti rispetto al sole.* Estr. da «Memorie della Società Astronomica Italiana», vol. XVIII, 194.

SILVESTRI Filippo. — *Contributo alla conoscenza dei «Phoridae» (insecta, diptera) termitofili del Brasile.* Estr. da «Acta della Pontificia Accademia delle Scienze», vol. X, 1947, n. 25.

SOLAINI L. — Vedi CASSINIS G.

TROTTER Alessandro. — *Ancora sull'ipotesi dell'«Adria» nei rapporti con la corologia delle piante e degli animali.* Estr. da «La Geografia», a. V, 1917, n. 5-6.

— *Gli elementi Balcanico-orientali della flora italiana e l'ipotesi dell'«Adriatide».* Estr. da «Atti del R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli», s. 6ª, vol. IX.

— *Federico Cassitto florista avellinese ed il suo tempo. Notizie storico-erografiche* (con ritratto). Estr. da «Rivista economica della Provincia di Avellino», a. II, n. 12, 1909. - a. III, nn. 1-2, 1910.

— *Flora economica della Libia.* Statistica illustrata delle piante coltivate e delle spontanee utili della regione. Roma, Tip. dell'Unione Editrice, 1915. Pp. 375, in-16°, con tavv. (Manuali Coloniali pubblicate a cura del Ministero delle Colonie).

— *La ginestra.* Roma, Soc. An. «Arte della stampa», 1941. Pp. 274, in-8°, con tavv. e figg.

— *Marcellia.* Rivista internazionale di cecidologia. Avellino, vol. II-XXX, 1903-1942.

— Vedi SACCARDO P. A.

U. B.

INDICI DEL VOLUME

INDICE PER AUTORI

A

ABETTI G. – Altezza della cromosfera negli anni 1944–45–46 ed andamento del ciclo solare, *498*.

AGLIARDI N. – Adsorbimento attivato di anidride solforosa ed ossigeno su di un catalizzatore a base di vanadato d'argento, *617*.

AGLIARDI N., vedi NATTA G.

ALBERTINI G. – Sui brachiopodi di Val di Sogno nel Baldo occidentale e sul riferimento cronologico del loro giacimento, *456*.

ALOISI M. – L'ossidazione biologica della sfingosilfosforilcolina, *98*.

ALOISI M., vedi BONETTI E.

ALOISI M. e BUFFA P. – Il comportamento batterico in presenza delle etanolamine e della colina, *853*.

AMALDI E. e CACCIAPUOTI B. N. – Sulla dipendenza del raggio nucleare dal peso atomico, *243*.

AMERIO A. – Nuovo metodo per misurare la velocità della luce, *238*.

— Un'esperienza sulla teoria della relatività, *736*.

B

BAFFONI G. – Sulla trasformazione del sesso nei Crostacei Decapodi, *83*.

BAJADA E. – Le approssimazioni nella risoluzione delle equazioni differenziali ordinarie. – I. Teorema d'esistenza, *261*.

— Le approssimazioni nella risoluzione delle equazioni differenziali ordinarie. – II. Applicazioni, *398*.

BARDUCCI I. – Grandezze caratteristiche dei trasduttori elettromeccanici, *190*.

— Impedenza meccanica specifica dei tubi di piccola sezione, *431*.

BATTAGLIA E. – La « Semigamia », singolare comportamento del nucleo spermatico nelle uova diploidi delle specie apomittichè del genere Rudbeckia (Asteraceae) e conseguente embriogenesi di tipo chimerico, *63*.

BATTAGLIA E. – La natura verosimilmente ibrida e poliploide del « Laurus nobilis L. », rivelata dall'analisi citogenetica, *463*.

BELLANCA A. – Sulla simmetria della manganolangbeinite, *451*.

BELLINZAGHI F. – Sulla interazione tra semi vegetali in germinazione. Nota I, *205*.

— Sulla interazione tra semi vegetali in germinazione. – II. Interazione ed energia di posizione, *210*.

— Sulla interazione tra semi vegetali in germinazione. – III. Interazione e velocità di germinazione, *351*.

BELOTTI B. M., vedi BOCCHIOTTI S.

BERETTA U. e JANNELLI L. – Cinetica delle reazioni lente. – I. Acetilazione dell'alcole metilico, *197*.

— Cinetica delle reazioni lente. – II. Acetilazione dell'alcole etilico, *321*.

BIANCHI G. – Nuove esperienze sul trasporto elettrico degli ioni nei metalli liquidi e solidi. Sistema rame–mercurio e sistema ferro–mercurio, *58*.

— Comportamento anodico dello stagno in soluzione alcalina. Nota I, *623*.

— Il trasporto elettrico degli ioni nei metalli liquidi e solidi. Sistema rame–amalgama di rame, di zinco, di cadmio e di piombo, *627*.

— Comportamento anodico dello stagno in soluzioni alcaline. Nota II, *805*.

BIGI B. – La « piccola variazione » di una curva algebrica reale connessa, con speciale riguardo al caso di Harnack. Nota I, *27*.

— La « piccola variazione » di una curva algebrica reale connessa, con speciale riguardo al caso di Harnack. Nota II, *125*.

BIOCCA E. – Preparazione del curaro da parte degli Indi Makù. Piante usate. Attività. (Regione dell'Alto Rio Negro–Amazzoni). Nota I, *689*.

BIOCCA E. e IPPOLITO M. – Ricerche chimico–biologiche sulla composizione del curaro Makù. Nota II, *872*.

BIOCCA E. e NOBREGA P. – Osservazioni sull'immunità nella toxoplasmosi, *353*.

BIRINDELLI C. – Nuova trattazione di problemi al contorno di una striscia per l'equazione di Laplace in due variabili, *269*.

BOCCHIOTTI S., BELOTTI B. M. e DE LANGLADE E. – Su un fattore ipoglicemizzante dal duodeno di uccelli, *476*.

BOCCHIOTTI S. e ORUNESU M. – Sulla modificazione dell'attività diabetogena dell'allossana addizionata ad aminoacidi in vivo ed in vitro, *696*.

BOMPIANI E. – Sulle Jacobiane di una corrispondenza puntuale fra piani, *22*.

— Varietà prodotto topologico di spazi multipli, *493*.

BONETTI E. e ALOISI M. – Il metabolismo batterico del glicerolo e dei suoi derivati. – I. Importanza del numero e della posizione delle funzioni alcooliche, *701*.

BONETTI E. e SCAPELLATO L. – Le variazioni del tasso ematico di acido piruvico nella febbre, *680*.

BUFFA P., vedi ALOISI M.

C

CACCIAPUOTI B. N., vedi AMALDI E.

CAMICI L., vedi GOIDANICH G.

CAPETTI A. – Considerazioni sulle turbine a gas a ciclo semichiuso, *767*.

CARAFA M. – Risoluzione effettiva, mediante integrali definiti, dall'equazione differenziale binomia: $\frac{d^n y}{dx^n} - a(x)y = f(x)$, *152*.

— Risoluzione delle equazioni funzionali lineari nel campo analitico, mediante un numero finito di integrazioni, *521*.

CARBONE F. – Sulle superficie di terzo ordine aventi un punto doppio biplanare o uniplanare, *547*.

— Sulle superficie analitiche aventi un punto doppio biplanare o uniplanare, *551*.

CASADIO G. – Sulle trasformazioni puntuali che hanno direzioni inflessionali passanti per punti fissi, *555*.

CASTELNUOVO G. – Commemorazione del Socio FEDERICO ENRIQUES, *3*.

CASTOLDI L. – Operatori lineari nello spazio Hilbertiano suscettibili di riduzione a forma normale, *141*.

— Causalità e indeterminazione nei fondamenti della Meccanica quantica, *610*.

CATTANEO C. – Sull'attrito di rotolamento nei solidi elastici. Nota II, *285*.

CHECCHIA-RISPOLI G. – Sul genere « Brissopatagus » Cotteau, *516*.

— Sull'esistenza del Maestrichtiano nella Migiurtinia, *743*.

CERUTI A. – Isolamento in vitro– di un cloro– e di un cromocondrioma, *828*.

CIMINO M. – Ricerche sopra l'assorbimento atmosferico della radiazione solare a Roma, Nota II, *599*.

CODEGONE C. – Sul funzionamento degli eiettori, *799*.

COLACEVICH A. – Una camera per spettrografo ad alta luminosità, *181*.

CONVERSI M., PANCINI E. e PICCIONI O. – Sul comportamento dei Mesoni positivi e negativi alla fine del loro percorso, *54*.

COSTANZO A. – La statura degli italiani ventenni nati dal 1854 al 1920, *707*.

CROCCO G. A. – Il superamento della barriera del suono in aviazione. Nota IV, *113*.

D

DALLAPORTA N. – Teoria semiclassica dei processi multipli, *783*.

DE LANGLADE E., vedi BOCCHIOTTI S.

DE LERMA B. – Ricerche spettrofotometriche sulla luce emessa da batteri fotogeni. Nota II, *78*.

DELLA CORTE M. – Influenza del dispositivo sperimentale su alcune misure di sciami generati da fotoni, *311*.

DELORENZI E. – Fenomeni di correlazione statistica nel numero delle cellule gangliari spinali nei due antimeri, *89*.

DEMICHELIS F. – Dispositivo per determinare il piano della vibrazione luminosa di un fascio polarizzato rettilineamente, *797*.

DE RUGGIERO G. – Relazione sul viaggio compiuto negli Stati Uniti, *104*.

DI RAIMONDO F. – Riviviscenza di germi patogeni e non patogeni dopo trattamento con ammoniaca, *864*.

DULBECCO R. – Nuove ricerche sulla sterilizzazione di embrioni di pollo mediante irradiazione con raggi γ. Costante determinazione del sesso femminile negli embrioni irradiati, *659*.

F

FAEDO S. – Sulla stabilità delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari. Nota I, *564*.

FAEDO S. – Sulla stabilità delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari. Nota II, *757*.

FERRARI C. – Sulla teoria delle schiere di profili alari, *289*.

— Sulla determinazione del profilo «ottimo» per le pale dei compressori assiali, *576*.

FICHERA G. – Sui funzionali continui con la metrica di Fréchet, *174*.

— Sull'integrazione delle equazioni dell'elasticità, *403*.

— Sull'esistenza delle funzioni potenziali nei problemi della Fisica matematica, *527*.

FILIPPONI A. – «Gregarina dimorpha» n. sp. parassita di «Chlaenius vestitus» Payk con osservazioni sulla sua variabilità e sul suo dimorfismo sessuale, *856*.

FOGOLARI S. – Analisi pollinica dell'atmosfera di Venezia, *73*.

FORTI L. – Su alcuni aspetti del differenziamento del tessuto nervoso in condizione di espianto, *202*.

FRANCHETTA A. – Sulla curva doppia della proiezione di una superficie generale dell'S_4 da un punto generico su un S_3, *276*.

G

GEROLA F. M. – Escreti fungini e mitosi cellutari. Nota II, *651*.

— Escreti fungini e mitosi cellulari. Nota III, *830*.

GHEZZO S. – Sulla conservazione della esistenza di radici di un sistema di equazioni, nel passaggio al limite, *159*.

GHIZZETTI A. – Condizioni necessarie e sufficienti per i momenti di una funzione limitata, *533*.

— Un'osservazione sul metodo di Ritz ed applicazione al calcolo della frequenza fondamentale di una membrana circolare con foro circolare eccentrico, *559*.

GIACOMINI A. – Sulla misura delle lunghezze d'onda ultrasonore mediante due fasci di onde progressive, *791*.

GIOLITTI G. – Intorno all'azione dell'ormone follicolare sulle fermentazioni batteriche, *94*.

GIOVANNOZZI R. – Intorno alla trasmissione del moto fra assi sghembi mediante ruote elicoidali, *586*.

GOIDÀNICH G. e CAMICI L. – La «Macrophomina Phaseoli» (Maubl.) Ashby, diffusa come polifago parassita in Italia, *459*.

GROSSETTI E. – Sull'assorbimento delle onde ultrasonore da parte di miscugli di liquidi viscosi. Nota II, *606*.

I

IANDELLI A. – Le leghe fra praseodimio e indio, *327*.

IPPOLITO F. – Intorno ai criteri di ricerca per energia geotermica, *821*.

IPPOLITO M., vedi BIOCCA E.

J

JANNELLI L., vedi BERETTA U.

K

KRALL G. – Sulla formazione delle galassie, *221*.

— Statica dei mezzi elastici cosidetti «viscosi». Nota I, *233*.

— Statica dei mezzi elastici viscosi e sue applicazioni. Nota II, *371*.

L

LOMBARDO-RADICE L. – Sugli elementi eccezionali dell'algebra legata a un gruppo di ordine finito in un corpo a caratteristica p, *170*.

— Il difetto di regolarità di un gruppo finito rispetto a un divisore primo del suo ordine, *766*.

LOVERA G. – Sulla spaziatura dei granuli lungo traccie di particelle ionizzanti nelle lastre fotografiche, *51*.

— Sulle frequenze di oscillazione molecolari, *318*.

M

MACCAGNO A. M. – Sull'esistenza del Campaniano nella Migiurtinia, *639*.

MAGENES E. – Sopra un problema di T. Satô per l'equazione differenziale $y'' = f(x, y, y')$. Nota I, *130*.

— Sopra un problema di T. Satô per l'equazione differenziale $y'' = f(x, y, y')$. Nota II, *258*.

MANACORDA T. – Sul comportamento asintotico degli integrali dell'equazione: $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ quando $\lim_{x \to +\infty} q(x) = +\infty$. Nota I, *537*.

MANACORDA T. – Sul comportamento asintotico degli integrali dell'equazione: $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ quando $\lim_{x \to +\infty}(x) = +\infty$. Nota II, *752*.

MAXIA C. – Sulla tettonica del M. Circeo (Lazio), *632*.

MARCHESONI V. – Aspetti ecologici e fitogeografici della vegetazione algologica delle regioni desertiche libiche, *334*.

MARCUS F. – Sopra una classe di reti e di superficie, in relazione con le congruenze di rette di Waelsh, *408*.

— Sopra una classe di congruenze di rette proiettivamente applicabili, *764*.

MAZZI V. – Il nucleo intermedio e la regione pretettale del talamo in alcuni teleostei, *667*.

MIGNOSI G. – Risoluzione apiristica dei sistemi di equazioni algebriche nei corpi finiti, *250*.

MINGANTI A., vedi REVERBERI G.

MIRANDA C. – Problemi ai limiti per le equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine in forma parametrica, *164*.

MONTALENTI G. – L'assetto cromosomico e l'interferenza dei chiasmi nella spermatogenesi di « Simulium equinum L. » (Dipt. Simuliidae), *471*.

— L'interferenza dei chiasmi oltre il centromero, *656*.

MONTALENTI G. e VITAGLIANO G. – Assetto cromosomico e interferenza dei chiasmi in « Prionotropis appulum » (Orth. Acrid.), *474*.

MONTANARO GALLITELLI E. – Argillificazione del diabase e genesi di alcune argille scagliose rosse appenniniche, *815*.

MONTEROSSO B. – Note araneologiche. – XXIV. Nuovi dati sulla partenogenesi naturale degli Araneidi, *340*.

— Note araneologiche. – XXV. Considerazioni sul tipo di partenogenesi riscontrato negli Araneidi, *646*.

— Note araneologiche. – XXVI. Del modo con cui i Ragni dei gen. « Scytodes » e « Loxosceles » catturano la preda, *839*.

MORELLI C. – Su una correzione per i valori della gravità, *780*.

MORETTI G. – Turbolenza nelle scie piane, *299*.

MURA A. – Sul tempo di sensibilità della camera di Wilson, *314*.

MURA A., SALVINI G. e TAGLIAFERRI G. – Sulla presenza di una componente penetrante negli sciami estesi della radiazione cosmica, *437*.

N

NATTA G e AGLIARDI N. – Adsorbimento attivato e reazioni chimiche superficiali, *383*.

— Influenza di promotori sull'adsorbimento attivato dell'ossido di zinco, *387*.

— Adsorbimento attivato del deuterio sull'ossido di zinco, *500*.

NEBBIA G. – Ulteriori precisazioni sull'uso dei coefficienti di Coriolis nelle equazioni del moto di corrente, *422*.

NOBREGA P., vedi BIOCCA E.

O

OLIVELLI G. – Sulle frange di interferenza di Selényi, *794*.

ORUNESU M., vedi BOCCHIOTTI S.

OTTAVIANI G. – Sulla indipendenza delle funzioni misurabili, *393*.

P

PANCINI E., vedi CONVERSI M.

PANETTI M. – Correzione del difetto di equilibramento di un motore con cilindri allineati, *121*.

PERRI T. – Malformazioni cefaliche in embrioni di Anfibi, con particolare riguardo ad esperienze di röntgen-irradiazione, *213*.

PERRIER C. – Regola di Zambonini e condizioni di isomorfismo, *246*.

PICCIONI O., vedi CONVERSI M.

PICONE M. – Sulla traduzione in equazione integrale lineare di prima specie dei problemi al contorno concernenti i sistemi di equazioni lineari a derivate parziali, *365*.

— Sulla traduzione in equazione integrale lineare di prima specie dei problemi al contorno concernenti i sistemi di equazioni lineari a derivate parziali, *485*.

— Sulla traduzione in equazione integrale lineare di prima specie dei problemi al contorno concernenti i sistemi di equazioni lineari a derivate parziali, *717*.

PUGLISI R. – Fattori ostacolanti la germinazione nelle Pomoidee, *68*.

R

RAUNICH L. – Ricerche preliminari di meccanica dello sviluppo sull'embrione di « Petromyzon planeri », *101*.
REVERBERI G. – Ulteriori annotazioni biologiche sulla « Callianassa laticauda » parassitata dalla « Jone thoracica », *345*.
REVERBERI G. e MINGANTI A. – Sul centro di differenziazione del cervello, situato nei blastomeri vegetativi anteriori dell'uovo di Ascidie dello stadio 8, *86*.
— Ulteriori esperimenti comprovanti l'esistenza di un centro di differenziazione e di un centro di inibizione cerebrali nel germe di Ascidie allo stadio di otto blastomeri, *348*.
RIGAMONTI R. – Soluzioni solide tra ossido di rame ed ossidi di metalli bivalenti. I sistemi CuO—NiO, CuO—MgO e CuO—ZnO, *446*.
ROLLERO A. – Punto flecnodale delle superficie, *30*.
— Sul contatto di due rigate lungo una comune generatrice, *38*.
— Ancora sugli sviluppi canonici di una superficie nell'intorno di un suo punto, *280*.

S

SACCHETTI A. – Sulla valutazione relativa del peso encefalico, *467*.
SACCO F. – L'età delle formazioni con Pietre Verdi, *510*.
— L'età del « Macigno », *739*.
SALVINI G., vedi MURA A.
SCAPELLATO L., vedi BONETTI E.
SCARPA O. – Sulla corrosione elettrochimica del ferro e della ghisa per effetto di correnti alternate, *502*.
SCHREIBER G. – Le grandezze nucleari nello sviluppo e metamorfosi degli Anuri. Considerazioni generali sulle ricerche cariometriche, *662*.
— Le grandezze nucleari nella spermatogenesi e la « sesquifase » nella intercinesi spermatogoniale, *843*.
SCONZO P. – Nuovi elementi dell'orbita del pianetino (1177) Gonnessia, *604*.
SCORZA DRAGONI G. – Su alcune totalità di archi di traslazione di un autoomeomorfismo piano, conservante il senso delle rotazioni e privo di punti uniti, *34*.
SIGNORINI R. – Struttura dell'Appennino Lucano. Nota I, *642*.
— Struttura marginale dell'Appennino Lucano. Nota II, *808*.
SILVA G. – Moto dei satelliti intorno al Sole. – Parte I. Moti diretti o retrogradi, *228*.
— Moto dei satelliti attorno al Sole – Parte II – Concavità o convessità della traiettoria verso il Sole, *378*.
— Moto dei satelliti attorno al Sole. – Parte III. Pianeta e satellite con orbite circolari su piani, comunque inclinati, *726*.
SILVESTRI F. – Nuove notizie sulla Cecidomia delle olive (« Prolasioptera berlesiana » Paoli), *750*.
STAMPACCHIA G. – Sulle condizioni che determinano gli integrali di un sistema di due equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, *411*.
— Sulla definizione assiomatica dell'area di una superficie rettificabile, *542*.
STEFANELLI A. – I problemi della determinazione istogenetica e del differenziamento dei neuroni, inquadrati nel campo della embriologia sperimentale, *673*.

T

TAGLIAFERRI G., vedi MURA A.
TARANTA M. P. – L'assunzione di ossigeno durante lo sviluppo larvale e la metamorfosi di Bufo vulgaris, *847*.
TIBALDO L. – Un teorema sulle funzioni misurabili rispetto ad una e continua rispetto ad un'altra variabile. Applicazioni, *146*.
TORALDO DI FRANCIA G. – Sull'interferenza di molte vibrazioni con fasi distribuite a caso, *186*.
— Il teorema di Malus-Dupin generalizzato e la trasformazione dell'interferenza inversa, *787*.
TORTONESE E. – Ricerche zoologiche nel canale di Suez e dintorni. – I. Echinodermi, *835*.
TROTTER A. – Caratteri e fenomeni della riproduzione nel Nocciuolo (« Corylus Avellana » L.): l'impollinazione, *745*.

U

UDESCHINI P. – Moto plastico-viscoso dei ghiacciai, *570*.

V

VIGHI L. – Sul metamorfismo di due lenti carbonatiche delle Valli del Busento e dell'Jassa (Cosenza), *812*.

VILLA M. – Sulle trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo nel caso cremoniano, *136*.

VINACCIA G. – Il Poliseliometro, *47*.

— Sull'insolazione intertropicale delle superfici poliedriche, *774*.

VITAGLIANO G., vedi MONTALENTI G.

VOLTERRA E. – Problemi dinamici della trave in regime ereditario. Nota I, *42*.

VOLTERRA E. – Problemi dinamici della trave in regime ereditario. Nota II, *178*.

— Sul problema generale della trave poggiata su suolo elastico. – I. Formule fondamentali, *307*.

— Sul problema generale della trave poggiata su suolo elastico. – II. Applicazioni, *418*.

— Sul problema generale della piastra poggiata su suolo elastico, *595*.

Z

ZAGAR F. – Sulla variabilità del nucleo della nebulosa della Lira, *730*.

INDICE PER MATERIE

A

Analisi. — Sopra un problema di T. Satô per l'equazione differenziale $y'' = f(x, y, y')$. Nota I. E. MAGENES, *130*.
— Sopra un problema di T. Satô per l'equazione differenziale $y'' = f(x, y, y')$. Nota II. E. MAGENES, *258*.
— Problemi ai limiti per le equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine in forma parametrica. C. MIRANDA, *164*.
— Sulla indipendenza delle funzioni misurabili. G. OTTAVIANI, *393*.
Algebra. — Risoluzione apiristica dei sistemi di equazioni algebriche nei corpi finiti. G. MIGNOSI, *250*.
Antropologia. — La statura degli italiani ventenni nati dal 1854 al 1920. A. COSTANZO, *707*.
— Sulla valutazione relativa del peso encefalico. A. SACCHETTI, *467*.
Astrofisica. — Sulla variabilità del nucleo della nebulosa della Lira. F. ZAGAR, *730*.
Astronomia. — Altezza della cromosfera negli anni 1944–45–46 ed andamento del ciclo solare. G. ABETTI, *498*.
— Ricerche sopra l'assorbimento atmosferico della radiazione solare a Roma. Nota II. M. CIMINO, *599*.
— Una camera per spettrografo ad alta luminosità. A. COLACEVICH, *181*.
— Sulla formazione delle Galassie. G. KRALL, *221*.
— Nuovi elementi dell'orbita del pianetino (1177) Gonnessia. P. SCONZO, *604*.
— Moto dei satelliti intorno al Sole. – Parte I. Moti diretti o retrogradi. G. SILVA, *228*.
— Moto dei satelliti attorno al Sole. Parte II. Concavità o convessità della traiettoria verso il Sole. G. SILVA, *378*.
— Moto dei satelliti attorno al Sole. – Parte III. Pianeta e satellite con orbite circolari su piani comunque inclinati. G. SILVA, *726*.
— Il Poliseliometro. G. VINACCIA, *47*.
— Sull'insolazione intertropicale delle superficie poliedriche. G. VINACCIA, *774*.

B

Biochimica. — Su un fattore ipoglicemizzante dal duodeno di uccelli. S. BOCCHIOTTI, B. M. BELOTTI e E. DE LANGLADE, *476*.
— Sulla modificazione dell'attività diabetogena dell'allossana addizionata ad aminoacidi in vivo ed in vitro. S. BOCCHIOTTI e M. ORUNESU, *696*.
Biofisica. — Sulla interazione tra semi vegetali in germinazione. – I. F. BELLINZAGHI, *205*.
— Sulla interazione tra semi vegetali in germinazione. – II. Interazione ed energia di posizione. F. BELLINZAGHI, *210*.
— Sulla interazione tra semi vegetali in germinazione. – III. Interazione e velocità di germinazione. F. BELLINZAGHI, *351*.
Biologia. — L'ossidazione biologica della sfingosilfosforilcolina. M. ALOISI, *98*.
— Il comportamento batterico in presenza delle etanolamine e della colina. M. ALOISI e P. BUFFA. *853*.
— Sulla trasformazione del sesso nei Crostacei Decapodi. G. BAFFONI, *83*.
— Il metabolismo batterico del glicerolo e dei suoi derivati. – I. Importanza del numero e della posizione delle funzioni alcooliche. E. BONETTI e M. ALOISI. *701*.
— Le variazioni del tasso ematico di acido piruvico nella febbre. E. BONETTI e L. SCAPELLATO, *680*.
— Ricerche spettrofotometriche sulla luce emessa da batteri fotogeni. Nota II. B. DE LERMA, *78*.
— Riviviscenza di germi patogeni e non patogeni dopo trattamento con ammoniaca. F. DI RAIMONDO, *864*.
— Nuove ricerche sulla sterilizzazione di embrioni di pollo mediante irradiazione con raggi γ. Costante determinazione del sesso femminile negli embrioni irradiati. R. DULBECCO, *659*.

— « Gregarina dimorpha » n. sp. parassita di « Chlaenius vestitus » Payk con osservazioni sulla sua variabilità e sul suo dimorfismo sessuale. A. FILIPPONI, *856*.
— Su alcuni aspetti del differenziamento del tessuto nervoso in condizione di espiantò. L. FORTI, *202*.
— La « Macrophomina Phaseoli » (Maubl.) Ashby, diffusa come polifago parassita in Italia. G. GOIDÀNICH e L. CAMICI, *459*.
— Il nucleo intermedio e la regione pretettale del talamo in alcuni teleostei. V. MAZZI *667*.
— L'assetto cromosomico e l'interferenza dei chiasmi nella spermatogenesi di « Simulium equinum L. » (Dipt. Simuliidae). G. MONTALENTI, *471*.
— L'interferenza dei chiasmi oltre il centromero. G. MONTALENTI, *656*.
— Assetto cromosomico e interferenza dei chiasmi in « Pronotropis appulum » (Orth. Acrid.). G. MONTALENTI e G. VITAGLIANO, *474*.
— Malformazioni cefaliche in embrioni di Anfibi, con particolare riguardo ad esperienze di röntgen–irradiazione. T. FERRI, *213*.
— Ulteriori annotazioni biologiche sulla « Callianassa laticauda » parassitata dalla « Jone thoracica ». G. REVERBERI, *345*.
— Sul centro di differenziazione del cervello, situato nei blastomeri vegetativi anteriori dell'uovo di Ascidie dello stadio 8. G. REVERBERI e A. MINGANTI, *86*.
— Ulteriori esperimenti comprovanti la esistenza di un centro di differenziazione e di un centro di inibizione cerebrali nel germe di Ascidie allo stadio di otto blastomeri. G. REVERBERI e A. MINGANTI, *348*.
— Le grandezze nucleari nello sviluppo e metamorfosi degli Anuri. Considerazioni generali sulle ricerche cariometriche. G. SCHREIBER, *662*.
— Le grandezze nucleari nella spermatogenesi e la « sesquifase » nella intercinesi spermatogoniale. G. SCHREIBER, *843*.
— I problemi della determinazione istogenetica e del differenziamento dei neuroni inquadrati nel campo della embriologia sperimentale A. STEFANELLI, *673*.
— L'assunzione di ossigeno durante lo sviluppo larvale e la metamorfosi di Bufo vulgaris. M. P. TARANTA, *847*.

Botanica. — La « Semigamia », singolare comportamento del nucleo spermatico nelle uova diploidi delle specie apomittiche del genere Rudbeckia (Asteraceae) e conseguente embriogenesi di tipo chimerico. E. BATTAGLIA, *63*.
— Isolamento in vitro– di un cloro– e di un cromocondrioma A. CERUTI, *828*.
— Aspetti ecologici e fitogeografici della vegetazione algologica delle regioni desertiche libiche. V. MARCHESONI, *334*.
— Caratteri e fenomeni della riproduzione nel Nocciuolo (« Corylus Avellana » L.): la impollinazione. A. TROTTER, *745*.

C

Chimica. — Adsorbimento attivato di anidride solforosa ed ossigeno su di un catalizzatore a base di vanadato d'argento. N. AGLIARDI, *617*.
— Cinetica delle reazioni lente. – I. Acetilazione dell'alcole metilico. U. BERETTA e L. JANNELLI, *197*.
— Cinetica delle reazioni lente. – II. Acetilazione dell'alcole etilico. U. BERETTA e L. JANNELLI, *321*.
— Le leghe fra praseodimio e indio. A. IANDELLI, *327*.
— Adsorbimento attivato e reazioni chimiche superficiali. G. NATTA e N. AGLIARDI, *383*.
— Influenza di promotori sull'adsorbimento attivato dell'ossido di zinco. G. NATTA e N. AGLIARDI, *387*.
— Adsorbimento attivato del deuterio dell'ossido di zinco. G. NATTA e N. AGLIARDI, *500*.
— Soluzioni solide tra ossido di rame ed ossidi di metalli bivalenti. I sistemi CuO—NiO, CuO—MgO e CuO—ZnO. R. RIGAMONTI, *446*.
Citogenetica. — La natura verosimilmente ibrida e poliploide del « Laurus nobilis L. » rivelata dall'analisi citogenetica. E. BATTAGLIA, *463*.
Commemorazioni. — Commemorazione del Socio FEDERICO ENRIQUES G. CASTELNUOVO, *3*.
Comunicazioni varie. — *104, 108, 218, 481, 878*.
Concorsi a premi. — *882*.
Cristallochimica. — Regola di Zambonini e condizioni di isomorfismo. C. PERRIER, *246*.

E

Ecologia vegetale. — Analisi pollinica dell'atmosfera di Venezia. S. FOGOLARI, *73*.

Elettrochimica. — Nuove esperienze sul trasporto elettrico degli ioni nei metalli liquidi e solidi. – Sistema rame–mercurio e sistema ferro–mercurio. G. BIANCHI, *58*.

— Comportamento anodico dello stagno in soluzione alcalina. Nota I. G. BIANCHI, *623*.

— Il trasporto elettrico degli ioni nei metalli liquidi e solidi. – Sistema rame–amalgama di rame, di zinco, di cadmio e di piombo. G. BIANCHI, *627*.

— Comportamento anodico dello stagno in soluzioni alcaline. Nota II. G. BIANCHI, *805*.

— Sulla corrosione elettrochimica del ferro e della ghisa per effetto di correnti alternate. O. SCARPA, *502*.

Embriologia sperimentale. — Ricerche preliminari di meccanica dello sviluppo sull'embrione di « Petromyzon planeri ». L. RAUNICH, *101*.

F

Fisica. — Sulla dipendenza del raggio nucleare dal peso atomico. E. AMALDI e B. N. CACCIAPUOTI, *243*.

— Nuovo metodo per misurare la velocità della luce. A. AMERIO, *238*.

— Un'esperienza sulla teoria della relatività. A. AMERIO, *736*.

— Grandezze caratteristiche dei trasduttori elettromeccanici. I. BARDUCCI, *190*.

— Impedenza meccanica specifica dei tubi di piccola sezione. I. BARDUCCI, *431*.

— Causalità e indeterminazione nei fondamenti della Meccanica quantica. L. CASTOLDI, *610*.

— Sul funzionamento degli eiettori. C. CODEGONE, *799*.

— Sul comportamento dei Mesoni positivi e negativi alla fine del loro percorso. M. CONVERSI, E. PANCINI e O. PICCIONI, *54*.

— Teoria semiclassica dei processi multipli. N. DALLAPORTA, *783*.

— Influenza del dispositivo sperimentale su alcune misure di sciami generati da fotoni M. DELLA CORTE, *311*.

— Dispositivo per determinare il piano della vibrazione luminosa di un fascio polarizzato rettilineamente. F. DEMICHELIS, *797*.

— Sulla misura delle lunghezze d'onda ultrasonore mediante due fasci di onde progressive. A. GIACOMINI, *791*.

— Sull'assorbimento delle onde ultrasonore da parte di miscugli di liquidi viscosi. Nota II. E. GROSSETTI, *606*.

— Sulla spaziatura dei granuli lungo traccie di particelle ionizzanti nelle lastre fotografiche. G. LOVERA, *51*.

— Sulle frequenze di oscillazione molecolari. C. LOVERA, *318*.

— Sul tempo di sensibilità della camera di Wilson. A. MURA, *314*.

— Sulla presenza di una componente penetrante negli sciami estesi della radiazione cosmica. A. MURA, G. SALVINI e G. TAGLIAFERRI, *437*.

— Sulle frange di interferenza di Selényi. G. OLIVELLI, *794*.

— Sull'interferenza di molte vibrazioni con fasi distribuite a caso. G. TORALDO DI FRANCIA, *186*.

— Il teorema di Malus–Dupin generalizzato e la trasformazione dell'interferenza inversa. G. TORALDO DI FRANCIA, *787*.

Fisiologia vegetale. — Escreti fungini e mitosi cellulari. Nota II. F. M. GEROLA, *651*.

— Escreti fungini e mitosi cellulari. Nota III. F. M. GEROLA, *830*.

— Fattori ostacolanti la germinazione nelle Pomoidee. R. PUGLISI, *68*.

G

Geodesia. — Su una correzione per i valori della gravità, C. MORELLI, *780*.

Geologia. — Sui brachiopodi di Val di Sogno nel Baldo occidentale e sul riferimento cronologico del loro giacimento. G. ALBERTINI, *456*.

— Sull'esistenza del Maestrichtiano nella Migiurtinia. G. CHECCHIA–RISPOLI, *743*.

— Intorno ai criteri di ricerca per energia geotermica. F. IPPOLITO, *821*.

— Sull'esistenza del Campaniano nella Migiurtinia. A. M. MACCAGNO, *639*.

— Sulla tettonica del M. Circeo (Lazio). C. MAXIA, *632*.

— Argillificazione del diabase e genesi di alcune argille scagliose rosse appenniniche. E. MONTANARO GALLITELLI, *815*.

— L'Età delle formazioni con Pietre Verdi. F. SACCO, *510*.
— L'età del «Macigno». F. SACCO, *739*.
— Struttura marginale dell'Appennino Lucano. Nota I. R. SIGNORINI, *642*.
— Struttura marginale dell'Appennino Lucano. Nota II. R. SIGNORINI, *808*.
— Sul metamorfismo di due lenti carbonatiche delle Valli del Busento e dell'Jassa (Cosenza). L. VIGHI, *812*.

Geometria. — La «piccola variazione» di una curva algebrica reale connessa, con speciale riguardo al caso di Harnack. Nota I. B. BIGI, *27*.
— La «piccola variazione» di una curva algebrica reale connessa, con speciale riguardo al caso di Harnack. Nota II. B. BIGI, *125*.
— Sulle Jacobiane di una corrispondenza puntuale fra piani. E. BOMPIANI, *22*.
— Varietà prodotto topologico di spazi multipli. E. BOMPIANI, *493*.
— Sulle superficie di terzo ordine aventi un punto doppio biplanare o uniplanare, F. CARBONE *547*.
— Sulle superficie analitiche aventi un punto biplanare o uniplanare. F. CARBONE, *551*.
— Sulle trasformazioni puntuali che hanno direzioni inflessionali passanti per punti fissi. G. CASADIO, *555*.
— Sulla curva doppia della proiezione di una superficie generale dell'S_4, da un punto generico su un S_3, A. FRANCHETTA, *276*.
— Punto flecnodale delle superficie. A. ROLLERO, *30*.
— Sul contatto di due rigate lungo una comune generatrice. A. ROLLERO, *38*.
— Sulle trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo nel caso cremoniano. M. VILLA, *136*.

I

Idraulica. — Ulteriori precisazioni sull'uso dei coefficienti di Coriolis nelle equazioni del moto di corrente. G. NEBBIA, *422*.

M

Matematica. — Le approssimazioni nella risoluzione delle equazioni differenziali ordinarie. – I. Teorema d'esistenza. E. BAJADA, *261*.
— Le approssimazioni nella risoluzione delle equazioni differenziali ordinarie. – II. Applicazioni. E. BAJADA, *398*.
— Nuova trattazione di problemi al contorno di una striscia per l'equazione di Laplace in due variabili. C. BIRINDELLI, *269*.
— Risoluzione effettiva, mediante integrali definiti, dell'equazione differenziale binomia: $\frac{d^n y}{d x^n} - a(x) y = f(x)$. M. CARAFA, *152*.
— Risoluzione delle equazioni funzionali lineari nel campo analitico, mediante un numero finito di integrazioni. M. CARAFA, *521*.
— Operatori lineari nello spazio Hilbertiano suscettibili di riduzione a forma normale. L. CASTOLDI, *141*.
— Sulla stabilità delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari. Nota I. S. FAEDO, *564*.
— Sulla stabilità delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari. Nota II. S. FAEDO, *757*.
— Sui funzionali continui con la metrica di Fréchet. G. FICHERA, *174*.
— Sull'integrazione delle equazioni della elasticità. G. FICHERA, *403*.
— Sull'esistenza delle funzioni potenziali nei problemi della Fisica matematica. G. FICHERA, *527*.
— Sulla conservazione dell'esistenza di radici di un sistema di equazioni, nel passaggio al limite. S. GHEZZO, *159*.
— Condizioni necessarie e sufficienti per i momenti di una funzione limitata. A. GHIZZETTI, *533*.
— Un'osservazione sul metodo di Ritz ed applicazione al calcolo della frequenza fondamentale di una membrana circolare con foro circolare eccentrico. A. GHIZZETTI, *559*.
— Sugli elementi eccezionali dell'algebra legata a un gruppo di ordine finito in un corpo a caratteristica p. L. LOMBARDO-RADICE, *170*.
— Il difetto di regolarità di un gruppo finito rispetto a un divisore primo del suo ordine. L. LOMBARDO-RADICE, *766*.
— Sul comportamento asintotico degli integrali dell'equazione: $y''(x) + p(x) y'(x) + q(x) y(x) = 0$ quando $\lim_{x \to +\infty} q(x) = +\infty$. Nota I. T. MANACORDA, *537*.

— Sul comportamento asintotico degli integrali dell'equazione $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ quando $\lim_{x \to +\infty} q(x) = +\infty$. Nota II. T. MANACORDA, *752*.

— Sopra una classe di reti e di superficie, in relazione con le congruenze di rette di Waelsh. F. MARCUS, *408*.

— Sopra una classe di congruenze di rette proiettivamente applicabili. F. MARCUS, *764*.

— Sulla traduzione in equazione integrale lineare di prima specie dei problemi al contorno concernenti i sistemi di equazioni lineari a derivate parziali. M. PICONE, *365*.

— Sulla traduzione in equazione integrale lineare di prima specie dei problemi al contorno concernenti i sistemi di equazioni linearia derivate parziali. M. PICONE, *485*.

— Sulla traduzione in equazione integrale lineare di prima specie dei problemi al contorno concernenti i sistemi di equazioni lineari a derivate parziali. M. PICONE, *717*.

— Ancora sugli sviluppi canonici di una superficie nell'intorno di un suo punto. A. ROLLERO, *280*.

— Su alcune totalità di archi di traslazione di un autoomeomorfismo piano, conservante il senso delle rotazioni e privo di punti uniti. G. SCORZA DRAGONI, *34*.

— Sulle condizioni che determinano gli integrali di un sistema di due equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. G. STAMPACCHIA, *411*.

— Sulla definizione assiomatica dell'area di una superficie rettificabile. G. STAMPACCHIA, *542*.

— Un teorema sulle funzioni misurabili rispetto ad una e continua rispetto ad un'altra variabile. Applicazioni. L. TIBALDO, *146*.

Meccanica. — Considerazioni sulle turbine a gas a ciclo semichiuso. A. CAPETTI, *767*.

— Sull'attrito di rotolamento nei solidi elastici. Nota II. C. CATTANEO, *285*.

— Il superamento della barriera del suono in aviazione. Nota IV. G. A. CROCCO, *113*.

— Sulla teoria delle schiere di profili alari. C. FERRARI, *289*.

— Intorno alla trasmissione del moto fra assi sghembi mediante ruote elicoidali. R. GIOVANNOZZI, *586*.

— Statica dei mezzi elastici cosidetti «viscosi». Nota I. G. KRALL, *233*.

— Statica dei mezzi elastici viscosi e sue applicazioni. Nota II. G. KRALL, *371*.

— Turbolenza nelle scie piane. G. MORETTI, *299*.

— Correzione del difetto di equilibramento di un motore con cilindri allineati. M. PANETTI, *121*.

— Moto plastico-viscoso dei ghiacciai. P. UDESCHINI, *570*.

— Problemi dinamici della trave in regime ereditario. Nota I. E. VOLTERRA, *42*.

— Problemi dinamici della trave in regime ereditario. Nota II. E. VOLTERRA, *178*.

— Sul problema generale della trave poggiata su suolo elastico. – I. Formule fondamentali. E. VOLTERRA, *307*.

— Sul problema generale della trave poggiata su suolo elastico. – II. Applicazioni. E. VOLTERRA, *418*.

— Sul problema generale della piastra poggiata su suolo elastico. E. VOLTERRA, *595*.

Meccanica dei fluidi. — Sulla determinazione del profilo «ottimo» per le pale dei compressori assiali. C. FERRARI, *576*.

Microbiologia. — Intorno all'azione dell'ormone follicolare sulle fermentazioni batteriche. G. GIOLITTI, *94*.

Mineralogia. — Sulla simmetria della manganolangbeinite. A. BELLANCA, *451*.

Morfologia. — Fenomeni di correlazione statistica nel numero delle cellule gangliari spinali nei due antimeri. E. DELORENZI, *89*.

O

Opere pervenute in dono all'Accademia, *111, 220, 363, 484, 715, 883*.

P

Paleontologia. — Sul genere «Brissopatagus» Cotteau. G. CHECCHIA-RISPOLI, *516*.

Patologia. — Preparazione del curaro da parte degli Indi Makù. Piante usate. Attività. (Regione dell'Alto Rio Negro-Amazzoni). Nota I. E. BIOCCA, *689*.

— Ricerche chimico-biologiche sulla composizione del curaro Makù. Nota II. E. BIOCCA e M. IPPOLITO, *872*.

— Osservazioni sull'immunità nella toxoplasmosi. E. Biocca e P. Nobrega, *353*.

Personale Accademico, *108, 218, 359, 878*.

Presentazione di libri *109, 219, 359, 482, 878*

Presentazione di Note e Memorie *109, 219, 360, 482, 712, 880*.

R

Relazioni di Commissioni *109, 882*.

T

Temi per discussioni *110, 882*.

Z

Zoologia. — Note araneologiche. – XXIV. Nuovi dati sulla partenogenesi naturale degli Araneidi. B. Monterosso, *340*.

— Note araneologiche. – XXV. Considerazioni sul tipo di partenogenesi riscontrato negli Araneidi. B. Monterosso, *646*.

— Note araneologiche. – XXVI. Del modo con cui i Ragni dei gen. « Scytodes » e « Loxosceles » catturano la preda. B. Monterosso, *839*.

— Nuove notizie sulla Cecidomia delle olive (« Prolasioptera berlesiana » Paoli). F. Silvestri, *750*.

— Ricerche zoologiche nel Canale di Suez e dintorni. – I. Echinodermi. E. Tortonese, *835*.

INDICI DEI FASCICOLI

FASCICOLO 1.

GENNAIO 1947.

G. CASTELNUOVO. – Commemorazione del Socio FEDERICO ENRIQUES . . . . Pag. 3

NOTE DI SOCI

E. BOMPIANI. – Sulle Jacobiane di una corrispondenza puntuale fra piani . . Pag. 22

NOTE PRESENTATE DA SOCI

B. BIGI. – La « piccola variazione » di una curva algebrica reale connessa, con speciale riguardo al caso di Harnack. Nota I (pres. dal Socio *L. Berzolari*) . . . Pag. 27
A. ROLLERO. – Punto flecnodale delle superficie (pres. dal Socio *E. Bompiani*) . . . 30
G. SCORZA DRAGONI. – Su alcune totalità di archi di traslazione di un autoomeomorfismo piano, conservante il senso delle rotazioni e privo di punti uniti (pres. dal Corrisp. *R. Caccioppoli*) 34
A. ROLLERO. – Sul contatto di due rigate lungo una comune generatrice (pres. dal Socio *E. Bompiani*) 38
E. VOLTERRA. – Problemi dinamici della trave in regime ereditario. Nota I (pres. dal Socio *A. Signorini*) 42
G. VINACCIA. – Il Poliseliometro (pres. dal Socio *G. Armellini*) 47
G. LOVERA – Sulla spaziatura dei granuli lungo traccie di particelle ionizzanti nelle lastre fotografiche (pres. dal Corrisp. *L. Pochettino*). 51
M. CONVERSI, E. PANCINI e O. PICCIONI. – Sul comportamento dei Mesoni positivi e negativi alla fine del loro percorso (pres. dal Corrisp. *E. Amaldi*) 54
G. BIANCHI. – Nuove esperienze sul trasporto elettrico degli ioni nei metalli liquidi e solidi. Sistema rame–mercurio e sistema ferro–mercurio (pres. dal Corrisp. *O. Scarpa*) 58
E. BATTAGLIA. – La « Semigamia », singolare comportamento del nucleo spermatico nelle uova diploidi delle specie apomittiche del genere Rudbeckia (Asteraceae) e conseguente embriogenesi di tipo chimerico (pres. dal Corrisp. *A. Chiarugi*) . . 63
R. PUGLISI. – Fattori ostacolanti la germinazione nelle Pomoidee (pres. dal Socio *G. Gola*) 68
S. FOGOLARI. – Analisi pollinica dell'atmosfera di Venezia (pres. dal Socio *G. Gola*) 73
B. DE LERMA. – Ricerche spettrofotometriche sulla luce emessa da batteri fotogeni. Nota II (pres. dal Corrisp. *U. Pierantoni*) 78
G. BAFFONI. – Sulla trasformazione del sesso nei Crostacei Decapodi (pres. dal Corrisp. *G. Cotronei*) 83
G. REVERBERI e A. MINGANTI. – Sul centro di differenziazione del cervello, situato nei blastomeri vegetativi anteriori dell'uovo di Ascidie dello stadio 8 (pres. dal Corrisp. *G. Cotronei*). 86
E. DELORENZI. – Fenomeni di correlazione statistica nel numero delle cellule gangliari spinali nei due antimeri (pres. dal Socio *G. Levi*) 89
G. GIOLITTI. – Intorno all'azione dell'ormone follicolare sulle fermentazioni batteriche (pres. dal Socio *F. Silvestri*) 94

M. Aloisi. – L'ossidazione biologica della sfingosilfosforilcolina (pres. dal Socio *G. Vernoni*). . . . . Pag. 98
L. Raunich. – Ricerche preliminari di meccanica dello sviluppo sull'embrione di «Petromyzon planeri» (pres. dal Corrisp. *G. Brunelli*) 101
G. de Ruggiero. – Relazione sul viaggio compiuto negli Stati Uniti 104

Personale Accademico 108
Comunicazioni varie 108
Presentazione di libri 109
Relazioni di Commissioni 109
Presentazione di Note e Memorie 109
Temi per discussioni 110
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta dell'11 gennaio 1947 111

FASCICOLO 2.

Febbraio 1947.

NOTE DI SOCI

G. A. Crocco. – Il superamento della barriera del suono in aviazione. Nota IV. Pag. 113
M. Panetti. – Correzione del difetto di equilibramento di un motore con cilindri allineati. 121

NOTE PRESENTATE DA SOCI

B. Bigi. – La «piccola variazione» di una curva algebrica reale connessa, con speciale riguardo al caso di Harnack. Nota II (pres. dal Socio *L. Berzolari*) . . . Pag. 125
E. Magenes. – Sopra un problema di T. Satô per l'equazione differenziale $y''=f(x,y,y')$. Nota I (pres. dal Corrisp. *G. Sansone*) 130
M. Villa. – Sulle trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo nel caso cremoniano (pres. dal Socio *E. Bompiani*) 136
L. Castoldi. – Operatori lineari nello spazio Hilbertiano suscettibili di riduzione a forma normale (pres. dal Socio *L. Berzolari*) 141
L. Tibaldo. – Un teorema sulle funzioni misurabili rispetto ad una e continua rispetto ad un'altra variabile. Applicazioni (pres. dal Socio *M. Picone*) 146
M. Carafa. – Risoluzione effettiva, mediante integrali definiti, dell'equazione differenziale binomia: $\frac{d^n y}{dx_n} - a(x)y = f(x)$ (pres. dal Socio *U. Amaldi*) 152
S. Ghezzo. – Sulla conservazione dell'esistenza di radici di un sistema di equazioni, nel passaggio al limite (pres. dal Socio *M. Picone*) 159
C. Miranda. – Problemi ai limiti per le equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine in forma parametrica (pres. dal Corrisp. *R. Caccioppoli*) 164
L. Lombardo-Radice. – Sugli elementi eccezionali dell'algebra legata a un gruppo di ordine finito in un corpo a caratteristica p (pres. dal Socio *E. Bompiani*) 170
G. Fichera. – Sui funzionali continui con la metrica di Fréchet (pres. dal Socio *M. Picone*) 174
E. Volterra. – Problemi dinamici della trave in regime ereditario. Nota II (pres. dal Socio *A. Signorini*) 178

A. Colacevich. – Una camera per spettrografo ad alta luminosità (pres. dal Socio *G. Abetti*) . . . . . Pag. 181
G. Toraldo di Francia. – Sull'interferenza di molte vibrazioni con fasi distribuite a caso (pres. dal Socio *G. Abetti*). 186
I. Barducci. – Grandezze caratteristiche dei trasduttori elettromeccanici (pres. dal Socio *A. Signorini*) 190
U. Beretta e L. Jannelli. – Cinetica delle reazioni lente. – I. Acetilazione dell'alcole metilico (pres. dal Socio *F. Giordani*) 197
L. Forti. – Su alcuni aspetti del differenziamento del tessuto nervoso in condizione di espianto (pres. dal Corrisp. *G. Cotronei*) 202
F. Bellinzaghi. – Sulla interazione tra semi vegetali in germinazione. Nota I (pres. dal Socio *P. Rondoni*). 205
F. Bellinzaghi. – Sulla interazione tra semi vegetali in germinazione. – II. Interazione ed energia di posizione (pres. dal Socio *P. Rondoni*) 210
T. Perri. – Malformazioni cefaliche in embrioni di Anfibi, con particolare riguardo ad esperienze di röntgen-irradiazione (pres. dal Corrisp. *G. Cotronei*) 213

Personale Accademico 218
Comunicazioni Varie. 218
Presentazione di Note e Memorie. 219
Presentazione di libri 219
Opere pervenute in dono all'Accademia, presentate nella seduta dell'8 febbraio 1947 220

FASCICOLO 3.

Marzo 1947.

NOTE DI SOCI

G. Krall. – Sulla formazione delle galassie . . . . . Pag. 221
G. Silva. – Moto dei satelliti intorno al Sole. – Parte I. Moti diretti o retrogradi 228
G. Krall. – Statica dei mezzi elastici cosidetti « viscosi ». Nota I. 233
A. Amerio. – Nuovo metodo per misurare la velocità della luce 238
E. Amaldi e B. N. Cacciapuoti. – Sulla dipendenza del raggio nucleare dal peso atomico 243
C. Perrier. – Regola di Zambonini e condizioni di isomorfismo 246

NOTE PRESENTATE DA SOCI

G. Mignosi. – Risoluzione apiristica dei sistemi di equazioni algebriche nei corpi finiti (pres. dal Corrisp. *M. Cipolla*) . . . . . Pag. 250
E. Magenes. – Sopra un problema di T. Satô per l'equazione differenziale $y''=f(x, y, y')$. Nota II (pres. dal Corrisp. *G. Sansone*) 258
E. Bajada. – Le approssimazioni nella risoluzione delle equazioni differenziali ordinarie. – I. Teorema d'esistenza (pres. dal Corrisp. *G. Sansone*) 261
C. Birindelli. – Nuova trattazione di problemi al contorno di una striscia per l'equazione di Laplace in due variabili (pres. dal Socio *M. Picone*) 269
A. Franchetta. – Sulla curva doppia della proiezione di una superficie generale dell'S_4 da un punto generico su un S_3 (pres. dal Socio *E. Bompiani*) 276
A. Rollero – Ancora sugli sviluppi canonici di una superficie nell'intorno di un suo punto (pres. dal Socio *E. Bompiani*) 280

C. Cattaneo. – Sull'attrito di rotolamento nei solidi elastici. Nota II (pres. dal Socio *A. Signorini*) . . . . . Pag. 285
C. Ferrari. – Sulla teoria delle schiere di profili alari (pres. dal Socio *M. Panetti* . . 289
G. Moretti. – Turbolenza nelle scie piane (pres. dal Socio *M. Panetti*) 299
E. Volterra. – Sul problema generale della trave poggiata su suolo elastico. – I. Formule fondamentali (pres. dal Socio *M. Picone*) 307
M. Della Corte. – Influenza del dispositivo sperimentale su alcune misure di sciami generati da fotoni (pres. dal Corrisp. *L. Tieri*). 311
A. Mura. – Sul tempo di sensibilità della camera di Wilson (pres. dal Corrisp. *G. Polvani*) 314
G. Lovera. – Sulle frequenze di oscillazione molecolari (pres. dal Corrisp. *A. Pochettino*) 318
U. Beretta e L. Jannelli. – Cinetica delle reazioni lente. – II. Acetilazione dell'alcole etilico (pres. dal Socio *F. Giordani*). 321
A. Iandelli. – Le leghe fra praseodimio e indio (pres. dal Socio *L. Rolla*) 327
V. Marchesoni. – Aspetti ecologici e fitogeografici della vegetazione algologica delle regioni desertiche libiche (pres. dal Socio *G. Gola*) 334
B. Monterosso. – Note araneologiche. – XXIV. Nuovi dati sulla partenogenesi naturale degli Araneidi (pres. da Socio *A. Russo*) 340
G. Reverberi. – Ulteriori annotazioni biologiche sulla « Callianassa laticauda » parassitata dalla « Jone thoracica » (pres. dal Corrisp. *G. Cotronei*) 345
G. Reverberi e A. Minganti. – Ulteriori esperimenti comprovanti l'esistenza di un centro di differenziazione e di un centro di inibizione cerebrali nel germe di Ascidie allo stadio di otto blastomeri (pres. dal Corrisp. *G. Cotronei*) 348
F. Bellinzaghi. – Sulla interazione tra semi vegetali in germinazione. – III. Interazione e velocità di germinazione (pres. dal Socio *P. Rondoni*) 351
E. Biocca e P. Nobrega. – Osservazioni sull'immunità nella toxoplasmosi (pres. dal Corrisp. *V. Puntoni*) 353

Personale Accademico 359
Presentazione di libri 359
Presentazione di note e memorie 360
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta dell'8 marzo 1947 . . 363

FASCICOLO 4.

Aprile 1947.

NOTE DI SOCI

M. Picone. – Sulla traduzione in equazione integrale lineare di prima specie dei problemi al contorno concernenti i sistemi di equazioni lineari a derivate parziali . . . . . Pag. 365
G. Krall – Statica dei mezzi elastici viscosi e sue applicazioni. Nota II 371
G. Silva. – Moto dei satelliti attorno al Sole – Parte II – Concavità o convessità della traiettoria verso il Sole 378
G. Natta e N. Agliardi. – Adsorbimento attivato e reazioni chimiche superficiali (pres. dal Corrisp. *G. Natta*) 383
G. Natta e N. Agliardi. – Influenza di promotori sull'adsorbimento attivato dell'ossido di zinco (pres. dal Corrisp. *G. Natta*) 387

NOTE PRESENTATE DA SOCI

G. Ottaviani. – Sulla indipendenza delle funzioni misurabili (pres. dal Corrisp. *F. P. Cantelli*) . . . . . Pag. 393
E. Bajada. – Le approssimazioni nella risoluzione delle equazioni differenziali ordinarie. – II. Applicazioni (pres. dal Corrisp. *G. Sansone*) 398
G. Fichera. – Sull'integrazione delle equazioni dell'elasticità (pres. dal Socio *M. Picone*) 403
F. Marcus. – Sopra una classe di reti e di superficie, in relazione con le congruenze di rette di Waelsh (pres. dal Socio *E. Bompiani*) 408
G. Stampacchia. – Sulle condizioni che determinano gli integrali di un sistema di due equazioni differenziali ordinarie del primo ordine (pres. dal Socio *M. Picone*) 411
E. Volterra. – Sul problema generale della trave poggiata su suolo elastico. – II. Applicazioni (pres. dal Socio *M. Picone*). 418
G. Nebbia. – Ulteriori precisazioni sull'uso dei coefficienti di Coriolis nelle equazioni del motó di corrente (pres. dal Socio *U. Bordoni*) 422
I. Barducci. – Impedenza meccanica specifica dei tubi di piccola sezione (pres. dal Socio *U. Bordoni*) 431
A. Mura, G. Salvini e G. Tagliaferri. – Sulla presenza di una componente penetrante negli sciami estesi della radiazione cosmica (pres. dal Corrisp. *G. Polvani*) 437
R. Rigamonti. – Soluzioni solide tra ossido di rame ed ossidi di metalli bivalenti. I sistemi CuO—NiO, CuO–MgO e CuO—ZnO (pres. dal Socio *M. G. Levi*) . . . 446
A. Bellanca. – Sulla simmetria della manganolangbeinite (pres. dal Corrisp. *E. Onorato*) 451
G. Albertini. – Sui brachiopodi di Val di Sogno nel Baldo occidentale e sul riferimento cronologico del loro giacimento (pres. dal Socio *G. Dal Piaz*) 456
G. Goidànich e L. Camici. – La «Macrophomina Phaseoli» (Maubl.) Ashby, diffusa come polifago parassita in Italia (pres. dal Socio *D. De Blasi*). 459
E. Battaglia. – La natura verosimilmente ibrida e poliploide del «Laurus nobilis L.» rivelata dall'analisi citogenetica (pres. dal Corrisp. *A. Chiarugi*) 463
A. Sacchetti. – Sulla valutazione relativa del peso encefalico (pres. dal Corrisp. *S. Sergi*) 467
G. Montalenti. – L'assetto cromosomico e l'interferenza dei chiasmi nella spermatogenesi di «Simulium equinum L.» (Dipt. Simuliidae) (pres. dal Corrisp. *G. Cotronei*) 471
G. Montalenti e G. Vitagliano. – Assetto cromosomico e interferenza dei chiasmi in «Prionotropis appulum» (Orth. Acrid.) (pres. dal Corrisp. *G. Cotronei*) . . . 474
S. Bocchiotti, B. M. Belotti e E. De Langlade. – Su un fattore ipoglicemizzante dal duodeno di uccelli (pres. dal Corrisp. *U. Lombroso*). 476

Comunicazioni varie. 481
Presentazione di libri 482
Presentazione di Note e Memorie. 482
Opere pervenute in dono all'Accademia, presentata nella seduta del 12 aprile 1947 . 484

FASCICOLO 5.

Maggio 1947.

NOTE DI SOCI

M. Picone. – Sulla traduzione in equazione integrale di prima specie dei problemi al contorno concernenti i sistemi di equazioni lineari a derivate parziali . . Pag. 485

E. Bompiani. – Varietà prodotto topologico di spazi multipli . . . . . Pag. 493
G. Abetti. – Altezza della cromosfera negli anni 1944–45–46 ed andamento del ciclo solare 498
G. Natta e N. Agliardi. – Adsorbimento attivato del deuterio sull'ossido di zinco (pres. dal Corrisp. *G. Natta*) 500
O. Scarpa. – Sulla corrosione elettrochimica del ferro e della ghisa per effetto di correnti alternate 502
F. Sacco. – L'Età delle formazioni con Pietre Verdi. 510
G. Checchia-Rispoli. – Sul genere « Brissopatagus » Cotteau 516

NOTE PRESENTATE DA SOCI

M. Carafa. – Risoluzione delle equazioni funzionali lineari nel campo analitico, mediante un numero finito di integrazioni (pres. dal Socio *G. Castelnuovo*) . Pag. 521
G. Fichera. – Sull'esistenza delle funzioni potenziali nei problemi della Fisica matematica (pres. dal Socio *M. Picone*) 527
A. Ghizzetti. – Condizioni necessarie e sufficienti per i momenti di una funzione limitata (pres. dal Socio *M. Picone*) 533
T. Manacorda. – Sul comportamento asintotico degli integrali dell'equazione: $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ quando $\lim_{x \to +\infty} q(x) = +\infty$. Nota I (pres. dal Corrisp. *G. Sansone*). 537
G. Stampacchia. – Sulla definizione assiomatica dell'area di una superficie rettificabile (pres. dal Corrisp. *R. Caccioppoli*). 542
F. Carbone. – Sulle superficie di terzo ordine aventi un punto doppio biplanare o uniplanare (pres. dal Socio *E. Bompiani*) 547
F. Carbone. – Sulle superficie analitiche aventi un punto doppio biplanare o uniplanare (pres. dal Socio *E. Bompiani*) 551
G. Casadio. – Sulle trasformazioni puntuali che hanno direzioni inflessionali passanti per punti fissi (pres. dal Socio *E. Bompiani*) 555
A. Ghizzetti. – Un'osservazione sul metodo di Ritz ed applicazione al calcolo della frequenza fondamentale di una membrana circolare con foro circolare eccentrico (pres. dal Socio *M. Picone*) 559
S. Faedo. – Sulla stabilità delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari. Nota I (pres. dal Socio *M. Picone*) 564
P. Udeschini. – Moto plastico-viscoso dei ghiacciai (pres. dal Socio *C. Somigliana*) 570
C. Ferrari. – Sulla determinazione del profilo « ottimo » per le pale dei compressori assiali (pres. dal Socio *M. Panetti*) 576
R. Giovannozzi. – Intorno alla trasmissione del moto fra assi sghembi mediante ruote elicoidali (pres. dal Corrisp. *E. Pistolesi*) 586
E. Volterra. – Sul problema generale della piastra poggiata su suolo elastico (pres. dal Socio *M. Picone*) 595
M. Cimino. – Ricerche sopra l'assorbimento atmosferico della radiazione solare a Roma. Nota II (pres. dal Socio *G. Armellini*) 599
P. Sconzo. – Nuovi elementi dell'orbita del pianetino (1177) Gonnessia (pres. dal Socio *G. Armellini*) 604
E. Grossetti. – Sull'assorbimento delle onde ultrasonore da parte di miscugli di liquidi viscosi. Nota II (pres. dal Socio *A. Carrelli*) 606
L. Castoldi. – Causalità e indeterminazione nei fondamenti della Meccanica quantica (pres. dal Socio *L. Rolla*) 610
N. Agliardi. – Adsorbimento attivato di anidride solforosa ed ossigeno su di un catalizzatore a base di vanadato d'argento (pres. dal Corrisp. *G. Natta*) 617
G. Bianchi. – Comportamento anodico dello stagno in soluzione alcalina. Nota I (pres. dal Corrisp. *O. Scarpa*) 623

G. Bianchi. – Il trasporto-elettrico degli ioni nei metalli liquidi e solidi. – Sistema rame–amalgama di rame, di zinco, di cadmio e di piombo (pres. dal Corrisp. *O. Scarpa*) . . . . . Pag. 627
C. Maxia. – Sulla tettonica del M. Circeo (Lazio) (pres. dal Corrisp. *G. Checchia–Rispoli*) 632
A. M. Maccagno. – Sull'esistenza del Campaniano nella Migiurtinia (pres. dal Corrisp. *G. Checchia–Rispoli*) 639
R. Signorini. – Struttura marginale dell'Appennino Lucano. Nota I (pres. dal Corrisp. *G. Checchia–Rispoli*) 642
B. Monterosso. – Note araneologiche. – XXV. Considerazioni sul tipo di partenogenesi riscontrato negli Araneidi (pres. dal Socio *A. Russo*) 646
F. M. Gerola. – Escreti fungini e mitosi cellulari. Nota II (pres. dal Socio *G. Gola*) 651
G. Montalenti. – L'interferenza dei chiasmi oltre il centromero (pres. dal Corrisp. *G. Cotronei*) 656
R. Dulbecco. – Nuove ricerche sulla sterilizzazione di embrioni di pollo mediante irradiazione con raggi γ. Costante determinazione del sesso femminile negli embrioni irradiati (pres. dal Socio *G. Levi*) 659
G. Schreiber. – Le grandezze nucleari nello sviluppo e metamorfosi degli Anuri. Considerazioni generali sulle ricerche cariometriche (pres. dal Socio *G. Gola*) 662
V. Mazzi. – Il nucleo intermedio e la regione pretettale del talamo in alcuni teleostei (pres. dal Corrisp, *N. Beccari*) 667
A. Stefanelli. – I problemi della determinazione istogenetica e del differenziamento dei neuroni inquadrati nel campo della embriologia sperimentale (pres. dal Corrisp. *G. Cotronei*) 673
E. Bonetti e L. Scapellato. – Le variazioni del tasso ematico di acido piruvico nella febbre (pres. dal Corrisp. *G. Vernoni*) 680
E. Biocca. – Preparazione del curaro da parte degli Indi Makù. Piante usate. Attività. (Regione dell'Alto Rio Negro–Amazzoni). Nota I (pres. dal Corrisp. *V. Puntoni*) 689
S. Bocchiotti e M. Orunesu. – Sulla modificazione dell'attività diabetogena dell'allossana addizionata ad aminoacidi in vivo ed in vitro (pres. dal Corrisp. *U. Lombroso*) 696
E. Bonetti e M. Aloisi. – Il metabolismo batterico del glicerolo e dei suoi derivati. – I. Importanza del numero e della posizione delle funzioni alcooliche (pres. dal Socio *G. Vernoni*) 701
A. Costanzo. – La statura degli italiani ventenni nati dal 1854 al 1920 (pres. dal Corrisp. *S. Sergi*) 707

Presentazione di Note e Memorie 712
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 10 maggio 1947 . 715

FASCICOLO 6.

GIUGNO 1947.

NOTE DI SOCI

M. Picone. – Sulla traduzione in equazione integrale lineare di prima specie dei problemi al contorno concernenti i sistemi di equazioni lineari a derivate parziali Pag. 717
G. Silva. – Moto dei satelliti attorno al Sole. – Parte III. Pianeta e satellite con orbite circolari su piani comunque inclinati 726
F. Zagar. – Sulla variabilità del nucleo della nebulosa della Lira 730
A. Amerio. – Un'esperienza sulla teoria della relatività 736

F. Sacco. – L'età del «Macigno» . . . . . Pag. 739
G. Checchia-Rispoli. – Sull'esistenza del Maestrichtiano nella Migiurtinia 743
A. Trotter. – Caratteri e fenomeni della riproduzione nel Nocciuolo («Corylus Avellana» L.): l'impollinazione 745
F. Silvestri. – Nuove notizie sulla Cecidomia delle olive («Prolasioptera berlesiana» Paoli) 750

NOTE PRESENTATE DA SOCI

T. Manacorda. – Sul comportamento asintotico degli integrali dell'equazione $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ quando $\lim_{x \to +\infty} q(x) = +\infty$. Nota II (pres. dal Corrisp. *G. Sansone*) . . . . . Pag. 752
S. Faedo. – Sulla stabilità delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari. Nota II (pres. dal Socio *M. Picone*) 757
F. Marcus. – Sopra una classe di congruenze di rette proiettivamente applicabili (pres. dal Socio *E. Bompiani*) 764
L. Lombardo-Radice. – Il difetto di regolarità di un gruppo finito rispetto a un divisore primo del suo ordine (pres. dal Socio *E. Bompiani*) 766
A. Capetti. – Considerazioni sulle turbine a gas a ciclo semichiuso (pres. dal Socio *M. Panetti*) 767
G. Vinaccia. – Sull'insolazione intertropicale delle superficie poliedriche (pres. dal Socio *G. Armellini*) 774
C. Morelli. – Su una correzione per i valori della gravità (pres. dal Socio *G. Cassinis*) 780
N. Dallaporta. – Teoria semiclassica dei processi multipli (pres. dal Corrisp. *E. Persico*) 783
G. Toraldo Di Francia. – Il teorema di Malus-Dupin generalizzato e la trasformazione dell'interferenza inversa (pres. dal Socio *G. Abetti*) 787
A. Giacomini. – Sulla misura delle lunghezze d'onda ultrasonore mediante due fasci di onde progressive (pres. dal Socio *L. Lombardi*) 791
G. Olivelli. – Sulle frange di interferenza di Seléni (pres. dal Socio *M. Panichi*) . . . 794
F. Demichelis. – Dispositivo per determinare il piano della vibrazione luminosa di un fascio polarizzato rettilineamente (pres. dal Socio *E. Perucca*) 797
C. Codegone. – Sul funzionamento degli eiettori (pres. dal Corrisp. *G. Polvani*) . . 799
G. Bianchi. – Comportamento anodico dello stagno in soluzioni alcaline. Nota II (pres. dal Corrisp. *O. Scarpa*) 805
R. Signorini. – Struttura marginale dell'Appennino Lucano. Nota II (pres. dal Corrisp. *G. Cecchia-Rispoli*) 808
L. Vighi. – Sul metamorfismo di due lenti carbonatiche delle Valli del Busento e dell'Jassa (Cosenza) (pres. dal Socio *R. Fabiani*) 812
E. Montanaro Gallitelli. – Argillificazione del diabase e genesi di alcune argille scagliose rosse appenniniche (pres. dal Corrisp. *G. Checchia-Rispoli*) 815
F. Ippolito. – Intorno ai criteri di ricerca per energia geotermica (pres. dal Corrisp. *G. D'Erasmo*) 821
A. Ceruti. – Isolamento in vitro- di un cloro- e di un cromocondrioma (pres. dal Socio *G. Gola*) 828
F. M. Gerola. – Escreti fungini e mitosi cellulari. Nota III (pres. dal Socio *G. Gola*) 830
E. Tortonese. – Ricerche zoologiche nel Canale di Suez e dintorni. – I. Echinodermi (pres. dal Socio *F. Sacco*) 835
B. Monterosso. – Note araneologiche. – XXVI. Del modo con cui i Ragni dei gen. «Scytodes» e «Loxosceles» catturano la preda (pres. dal Socio *A. Russo*) . . . 839
G. Schreiber. – Le grandezze nucleari nella spermatogenesi e la «sesquifase» nella intercinesi spermatogoniale (pres. dal Socio *G. Gola*) 843

M. P. TARANTA. – L'assunzione di ossigeno durante lo sviluppo larvale e la metamorfosi di Bufo vulgaris (pres. dal Corrisp. *G. Cotronei*) . . . . . Pag. 847
M. ALOISI e P. BUFFA. – Il comportamento batterico in presenza delle etanolamine e della colina (pres. dal Corrisp. *G. Vernoni*) 853
A FILIPPONI. – «Gregarina dimorpha» n. sp. parassita di «Chlaenius vestitus» Payk con osservazioni sulla sua variabilità e sul suo dimorfismo sessuale (pres. dal Socio *A. Russo*) 856
F. DI RAIMONDO. – Riviviscenza di germi patogeni e non patogeni dopo trattamento con ammoniaca (pres. dal Corrisp. *V. Puntoni*) 864
E. BIOCCA e M. IPPOLITO. – Ricerche chimico-biologiche sulla composizione del curaro Makù. Nota II (pres. dal Corrisp. *V. Puntoni*) 872

Personale Accademico 878
Comunicazioni Varie. 878
Presentazione di libri 878
Presentazione di Note e Memorie. 880
Relazioni di Commissioni 882
Concorsi a Premi 882
Temi per discussioni 882
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta dell'11 giugno 1947 . 883
Indice per Autori 887
Indice per materie 893
Indici dei fascicoli 899